

Универзитет у Београду Архитектонски факултет

Јелена Ж. Милошевић

**ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА У
МОРФОГЕНЕЗИ ПОВРШИНСКИХ
КОНСТРУКТИВНИХ СИСТЕМА**

докторска дисертација

Београд, 2015.

University of Belgrade Faculty of Architecture

Jelena Ž. Milošević

**ISOGOMETRIC ANALYSIS IN MORPHOGENESIS
OF SURFACE STRUCTURAL SYSTEMS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2015.

ментор

др Миодраг Несторовић
редовни професор
Универзитет у Београду Архитектонски факултет

чланови комисије

Академик Ђорђе Злоковић
редовни члан
Српска академија наука и уметности

др Александар Чучаковић
ванредни професор
Универзитет у Београду Грађевински факултет

др Ташко Манески
редовни професор
Универзитет у Београду Машински факултет

Изјава захвалности

Желела бих да захвалим свима који су ми помогли у протеклом периоду. Свом ментору проф. др Миодрагу Несторовићу који је својим искуством и конструктивним саветима допринео успешном завршетку овог рада. Академику Ђорђу Злоковићу чији су теоријски, практични и едукативни рад и достигнућа у области конструктивних система и просторних структура били инспиративни за мене, али и на коментарима који су значајно допринели финалној форми дисертације. Члановима комисије проф. др Ташку Манском и проф. др Александру Чучаковићу. Проф. др Глигору Раденковићу који је, у једном тренутку, својим изузетним знањем из области теорије конструкција помогао да разумем одређене кључне концепте. Докторанду Саши Ковачевићу на помоћи око програмске имплементације. Проф. Браниславу Стојановићу који ми је помогао у одлуци да наставим образовање. Проф. Александру Вуји на интересовању за проблеме којима се бавим и охрабривању да истрајем. Колегама са усмерења Конструктивни системи на Докторским студијама са којима сам делила заједничке проблеме. Породици на неизмерној подршци и разумевању, а посебно баки Марији која је одувек највише веровала.

Јелена Милошевић

Подаци о докторској дисертацији

Наслов дисертације

ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА У МОРФОГЕНЕЗИ ПОВРШИНСКИХ
КОНСТРУКТИВНИХ СИСТЕМА

Резиме

Тезом је предложен неконвенционални поступак за пројектовање површинских конструктивних система којим се интегришу геометријске методе за моделовање форме и рачунарске процедуре за симулацију понашања структура. Предложени поступак је у форми морфогенетске процедуре у којој се потенцијали структуралне анализе користе у фази конципирања решења, а који се одликује интерактивношћу и флексибилношћу неопходним за специфичан процес пројектовања површинских структура. Дефинисање алгорита, који омогућава једноставније и ефикасније пројектовање површинских конструктивних система, реализовано је имплементацијом изогеометријске анализе, нумеричким поступком у ком се геометрија и кинематика описују истим функцијама. За разлику од уобичајено коришћене класичне анализе методом коначних елемената, у којој се врши интерполација геометрије, изогеометријски концепт подразумева анализу на основу егзактно дефинисане почетне геометрије, описане NURBS технологијом, чиме је омогућено пројектовање, анализа и подешавање модела употребом јединственог типа података. Полазећи од теоријског и концептуалног оквира развијен је оригинални алгоритамско-програмски код који је имплементиран у оквир CAD система заснованог на NURBS геометријској репрезентацији, а који омогућава аутоматско генерисање форми оптималних у погледу структуралних перформанси. Имплементација процедуре демонстрира ефикасност предложеног приступа и потврђује да унапређење креативних алата омогућава иновацију и оптимизацију процеса пројектовања.

Кључне речи

Површински конструктивни системи, генерисање структура, оптимизација структура, дигитална морфогенеза, изогеометријска анализа, NURBS

Научна област

Архитектура и урбанизам

Ужа научна област

Конструктивни системи

УДК број

624.074:519.6(043.3)

Data on Doctoral Dissertation

Thesis title

ISOGEOMETRIC ANALYSIS IN MORPHOGENESIS OF SURFACE
STRUCTURAL SYSTEMS

Abstract

The thesis proposes unconventional procedure for design of surface structural systems, that integrates geometrical methods for modeling of form and computational procedures for simulation of structural behavior. The proposed procedure is in the form of morphogenetic strategy in which potentials of structural analysis are used in the conception phase of the design. The procedure is interactive and flexible, which is necessary for specific design process of surface structures. The definition of the algorithm, that facilitates more simple and efficient design of surface structural systems, was realized by implementation of Isogeometric analysis, numerical procedure in which geometry and kinematics of the structure are represented by the same functions. Contrary to the classical Finite element analysis, which is carried out on the interpolation of geometry, isogeometric concept implies analysis based on the exact definition of initial geometry, described by NURBS technology. This enables design, analysis and modifications of the model by application of the single data type. Starting from the theoretical and conceptual framework, the original algorithm was developed, and implemented as code program in CAD system based on NURBS geometric representation. The code enables automated generation of forms optimal in respect of structural performances. Implementation of the procedure demonstrates effectiveness of the proposed approach and confirms that advancement of the creative tools facilitates innovation and optimization of the design process.

Key words

Surface structural systems, generating of structures, optimization of structures, digital morphogenesis, Isogeometric analysis, NURBS

Academic Expertise

Architecture and Urbanism

Field of Academic Expertise

Structural Systems

UDC number

624.074:519.6(043.3)

Методе

Логичка аргументација, симулација у истраживањима кроз пројекат | *Logical argumentation, Simulation in design explorations*

Предмет

Генерисање површинских конструктивних система | *Generation of surface structural systems*

Кључни концепти

Морфогенеза | *Morphogenesis*

Процес развоја оптималних форми у ограниченим условима контекста пројектовања коришћењем рачунарских технологија.

Изогеометрија | *Isogeometry*

Приступ анализи система у коме се функције коришћене за репрезентацију геометрије користе за описивање кинематике система.

Изогеометријска морфогенеза | *Isogeometric Morphogenesis*

Процедура за генерисање оптималних конструктивних система, која користи јединствену геометријску репрезентацију за пројектовање и анализу.

Морфоген медијум за пројектовање | *Morphogen design driver*

Назив за програмски алгоритам који управља продукцијом формалних решења у процесу морфогенезе.

Површински конструктивни системи | *Surface structural systems*

Дводимензионалне структуре код којих се утицаји преносе просторно.

Генеративно пројектовање система | *Generative design of systems*

Процес пројектовања у коме се користе артифицијелних продукционих система са одређеним степеном аутономије који партиципирају у одлучивању и одређивању крајњих резултата креативног процеса.

Интегративно пројектовање система | *Integrative design of systems*

Приступ којим се у процесу пројектовања система обједињују дизајн и инжењерска анализа употребом конзистентних модела који олакшавају развој варијантних и тражење оптималних решења.

ПРВИ ДЕО - Увод	11
1.1 Формулација проблема, циљева и задатака	13
1.2 Методологија	19
1.3 Структура рада	21
ДРУГИ ДЕО - Генерисање површинских конструктивних система	25
2.1 Генеративно пројектовање	29
2.1.1 Технике генерисања форме површинских система	38
2.1.1.1 Аналогне технике	41
2.1.1.2 Дигиталне технике	54
2.1.2 Морфогенеза	81
2.1.2.1 Биоапропријација	84
2.1.2.2 Рачунарска морфогенеза	94
2.2 Генеративна оптимизација	101
2.2.1 Оптимизација структуралних перформанси.	103
2.2.1.1 Принципи оптимизације	104
2.2.1.2 Методе оптимизације	107
2.2.2 Генетски алгоритам	110
2.2.2.1 Елементи генетског алгоритма	111
2.2.2.2 Оператори генетског алгоритма.	118
2.3 Моделовање система	130
2.3.1 Геометријско моделовање система	133
2.3.1.1 <i>Spline</i> параметарске криве и површи	136
2.3.1.2 Технике моделовање геометрије система	152

2.3.2	Изогеометријско моделовање система.....	162
2.3.2.1	Изогеометријски концепт.....	164
2.3.2.2	Изогеометријска теорија система.....	170
2.4	Резиме.....	184
ТРЕЋИ ДЕО - Изогеометријска морфогенеза		188
3.1	Основе	190
3.1.1	Генеративни систем	193
3.1.1.1	Кључни концепти.....	194
3.1.1.2	Приказ основних фаза генеративне процедуре.....	197
3.1.2	Модел генеративног система	199
3.1.2.1	Геометријска и физичка апроксимација	201
3.1.2.2	Нумеричка апроксимација	204
3.2	Имплементација	208
3.2.1	Пројектовање генетског алгорита.....	210
3.2.1.1	Функција евалуације.....	211
3.2.1.2	Генетско кодирање пројектних варијабли и генетски оператори	214
3.2.2	Програмска имплементација.....	217
3.2.2.1	Прототип програмског модула	218
3.2.2.2	Функционални тестови применом на референтним површима.....	219
3.3	Примена.....	226
3.3.1	Прилог концепту тражења форме (<i>form-finding</i>).....	228
3.3.1.1	Дефиниција генеративне процедуре за тражење форме	229
3.3.1.2	Студија случаја: генерисање форме љуске.....	232
3.3.2	Прилог концепту унапређења форме (<i>form-improving</i>)	244
3.3.2.1	Дефиниција генеративне процедуре за унапређење форме.....	245
3.3.2.2	Студија случаја: генерисање форме мембране.....	247
3.4	Резиме.....	258

ЧЕТВРТИ ДЕО - Закључна разматрања.....	262
4.1 Сумирање резултата	262
4.2 Смернице за будућа истраживања.....	265
4.3 Финална размишљања	267
Преглед коришћених акронима.....	276
Преглед коришћених ознака.....	277
Преглед илустрација	280
Преглед табела	285
Референце	286
Биографија аутора	304
ПРИЛОЗИ.....	305

ПРВИ ДЕО

Увод

Полазећи од претпоставке да архитектура представља технолошку дисциплину, радом се истражују релације између различитих технологија у процесу пројектовања архитектонских структура. Задатак тезе је да ослаби стриктност границе између инжењерства и архитектуре, а њени резултати представљају основу за даља истраживања у области конструктивних система, а посебно у домену унапређења рачунарских конструката.

Рад је мотивисан све учесталијом тенденцијом пројектовања објеката нестандардних слободних форми (*free-form*), чије се генерисање и развој истражују коришћењем различитих приступа. Подстакнут константним развојем моћног графичког интерфејса који пружа велики степен слободе израза, овај тренд представља прилог поновној актуелизацији органских облика и пластичних потенцијала њихових реализација.

Проблем генерисан све већим могућностима у презентацији неконвенционалних концепција, представља одрживост њихове реализација која захтева већи степен интеракције између различитих аспеката и њихово разматрање у свакој од фази креативног процеса. За разлику од пројеката који се заснивају искључиво на формалним истраживањима и динамичним трансформацијама дигитално генерисаних објеката комплексне геометрије, овим радом подржава се приступ заснован на перформансама као инклузивни оквир за конципирање архитектонских структура.

Интегративна логика имплицира нове релације између различитих страна троугла форма-функција-конструкција, и концепт објекта као рационалне органске структуре настале помирењем захтева инжењерства и архитектуре. Приступ води формама које имају конструктивну функцију, које су резултат процеса заснованих на природи, физици, које делују и остварују различите

интеракције, позивају на оптимизацију и теже да инкорпорирају перцептивне и естетске аспекте.

У оквирима овог рада коришћен је мултидисциплинарни приступ. Трансфер технологија, знања и употреба метода, процеса и процедура других дисциплина подрезумева напор да се оне интегришу на нов начин који треба да одговори специфичним потребама и условима архитектонске струке. Транспозиција креативног алата утиче на промишљање процеса пројектовања кроз логику оперисања примењене алатке, омогућавајући категоријске трансформације и иновацију. Претходно имплицира потребу за преиспитивањем конвенционалног односа архитектуре и средстава за њену продукцију.

Већа софистицираност процеса пројектовања имплицира примену абстрактнијих конструката који посредују између идеје о модификацији и самог акта модификације реалности, као основне намере пројектантске активности. Креирања оваквог вида међу презентације којом се симулирају могући сценарији без њихове реалне имплементације представља концепт истраживања кроз пројекат. Абстраховањем услова и ограничења реалног проблема, затим њиховим формулисањем у правила која чине експлорациони конструкт (алгоритам), и имплементацијом добијају се алати који управљају (*design driver*) процесом тражења решења у дефинисаном простору. У овој поставци се, циљ, средство, решење и сам простор претраге заједно развијају.

Претходна истраживања указују да и поред бројних експеримената, хибридних платформи, и примера имплементације различитих генеричких стратегија, овакви приступи и даље нису довољно и адекватно заступљени у актуелној пракси, као и да у том смислу има места за даља истраживања и унапређења. Користећи приступ заснован на методама логичке аргументације, симулације у истраживањима кроз пројекат и операционим истраживањима тезом је обезбеђен теоријски и концептуални оквир за развој процедуре и алата за генерисање површинских конструктивних система, који представљају главни допринос овог рада, а чија функционалност је тестирана кроз примере и експерименталне пројекте.

1.1 Формулација проблема, циљева и задатака

Генерисање оптималних конструктивних система представља процес тражења решења у оквирима задатих услова. Сходно граничном карактеру области, различити домени су повезани у том процесу који може резултовати унапређењем перформанси постојећих, или генерисањем нових решења. Продукција и примена физичких или дигиталних алата у пројектним истраживањима (*design explorer*), омогућава унапређење процес претраге проширујући опсег могућих решења. Процедура предложена тезом у функцији је потврђивања претходног става, а експериментални пројекти реализовани њеним коришћењем демонстрирају ефикасност оваквог приступа.

Проблем у фокусу овог истраживања ограничен је на рачунарско генерисање површинских конструктивних система, које карактерише изражена међузависност форма-структура, односно утицај глобалне геометрије на ефикасност конструкције, и биће разматран са различитих аспеката.

Конзистентност процеса продукције коју је потребно обезбедити у ситуацији повећане комплексности пројектних проблема представља посебан аспект рачунарског генерисања система. Проблем доследности приликом транзиције концепта (идеје) у објекат (реализација) посебно је изражен у случају неконвенционалних површинских типологија чија успешна и економична изградња представља изазов услед сложености геометрије, мале дебљине и захтеване велике прецизности. Конзистентност је, у првом реду, могуће обезбедити холистичким приступом и успостављањем интерактивних релација између различитих аспеката архитектуре. С обзиром на синергетско деловање форме, структуре и материјала код површинских система, у циљу реализације ефикасних решења, неопходно је укључивање свих наведених чинилаца и њихов равноправан третман од иницијације процеса пројектовања. Коришћење метода генерисања које инкорпорирају све релевантне утицаје у процесу тражења решења резултује рационалним концептима. Оваквим приступом избегавају се значајније модификације у каснијим фазама.

Интегрисано информационо окружење као контекст тражења решења представља следећи аспект проблема. Увођење дигиталних технологија имплицирало је измештања процеса у сферу аутоматизованог, симулативног и интерактивног. Укључивањем метода и технологија других дисциплина, у циљу унапређења процеса пројектовања, бришу се стриктне границе које омеђују различите области. У оваквој поставци још један аспект разматраног проблем је у начинима на који се одређене технологије примењују. Коришћење све већег броја различитих алата у процесу пројектовања намеће потребу за њиховом интеграцијом. Претходно се односи и на пројектантске стратегије оријентисане на перформансе структура и активно коришћење потенцијала њихове анализе у архитектури. Ове стратегије засноване су на интеграцији метода рачуарске геометрије и нумеричке анализе у поступку продукције и концептуализације форме. Радом се истражује проблем повезивање и адаптације ових метода специфичним захтевима архитектонског пројектовања.

Формулација система утицаја представља први кључни аспект у процесу тражења пројектног решења, које треба да одговори скупу захтева. У процесу пројектовања анализа или разумевање проблема у великој мери је интегрисана са синтезом или генерисањем решења. Утицајни фактори осликавају сложено, садржајно и разуђено проблемско окружење, и у процесу пројектовања имају полазну позицију. Анализом и валоризацијом утицајних фактора у првом кораку формулише се јединствени сет услова за предметни проблем, који се даље инструментализују као потенцијали, односно корисне инфомације за продукцију пројектног решења. У случају овог истраживања механичке особине структуре представљају фаворизовани утицајни фактор коме се сходно додељује највећа тежина. Абстраховањем система утицаја њиховом репрезентацијом и имплементацијом дефинише се средство/процедура за тражење пројектног решења. Механика међузависности утицајних фактора, репрезентације и имплементације разматрана је процедуром која је предмет овог истраживања.

Примена модела у процесу тражења решења је следећи кључни аспект. Иако концепт има своје предходнике, попут коришћења технике израде физичких модела за проналажење форме, тренутно се рачуарски програми за анализу структура у великом броју пројектата углавном користи пасивно, након што је

форма објекта артикулисана, за евалуацију и дијагностику перформанси претходно дефинисаних формалних решења и евентуалну корекцију форме у циљу унапређења механичких особина. У оквиру овог рада примењен је реверзни приступ, коришћен у једном броју истраживачких пројеката [Kil06], [Pug09], [She00] итд., у коме геометрија добијена као резултат дејства физичких утицаја представља формално решење. С обзиром да недетерминистичка природа реверзног мапирања отвара велики број могућих решења чак и за најједноставније случајеве, у оваквом приступу, од кључне важности је прецизно дефинисање релација између субјекта (програмског конструкта) и објекта (површинске структуре) пројектовања како би се добили смислени резултати. Проблем имплементације овог концепта, биће разматран приликом развоја програмског конструкта који се користи у процесу тражења решења.

Избор технике абстракције у циљу логички заснованог редуковања комплексности, омогућава једноставнију манипулацију, обраду и интерпретацију релација које управљају генеративним процесом. Свакако, неопходно је балансирње између предности оваквог приступа репрезентације проблема и негативне стране у смислу редукционизма који може узроковати губитак одређених карактеристика. У оквирима овог истраживања, као форма абстракције, примењени су дигитални модели. Процес морфогенезе, којим се на основу артикулације интерне генеративне логике аутоматски продукују оптимална формална решења, абстрахован је применом генетског алгорита. Абстракција површинских система реализована је применом рачунарских технологија и то NURBS за геометријско моделовање и изогеометријске анализе за моделовање механичког понашања.

У релацији са претходно дефинисаним проблемом истраживања, разматраним са становишта наведених аспеката, могуће је идентификовати пет главних тема које представљају основу истраживања: симулација, површи, структура, систем, претрага. Овако генерално дефинисане теме даље је могуће разложити на уже подтеме. Свака од тема заснована је на историјском и концептуалном развоју различитих области и опширније третирана кроз бројну литературу. За предметно истраживања од важности је пре свега сагледавање значаја наведених тема,

њихових релација и утицаја на имплементацију рачунарства у процес пројектовања архитектонских структура.

Циљ истраживања је унапређење и оптимизација процеса пројектовања површинских конструктивних система развојем и имплементацијом рачунарске, генеративне процедуре. Предложена процедура користи структуралне перформансе као примарне критеријуме евалуације и основу процеса генерисања и рафинације комплексних формотектоничних конфигурација, како би се рационално и ефикасно искористиле конструктивне карактеристике и очувала конзистентност између предложеног концепта и реализованог решења, као крајњег исхода процеса пројектовања. Циљ истраживања је да развијена метода и алат нађу примену у пројектовању геометријски сложених површинских конструктивних система, чија реализација би хипотетички била могућа коришћењем адекватних технологија и материјала.

Циљ рада је и да укаже на потенцијале укључивања различитих технологија у процес пројектовања и продукције архитектуре. Развој интероперабилних техника и протокола између CAD и CASA система у правцу је креирања континуално-интегралног, дизајн-анализа процеса архитектонско-инжењерског пројектовања комплексних форми површинских структура, у оквирима виртуалног, тродиманзионалног окружења. У следећој, верификационој фази процеса добијена решења могла би бити тестирана кроз дигиталну израду физичког модела/прототипа, као корака који претходи изградњи реалне конструкције. Претходно ће у раду бити проверено експерименталним пројектима, којима се проверава и став да потенцијали технологије могу бити креативни потенцијали.

Задаци истраживања дефинисани су на основу претходно идентификованих аспеката проблема и утврђених циљева, водећи се критеријумима повезаним са перформансама крајњих резултата. Потенцијали идентификовани у оквирима наведених аспеката проблема инструментализовани су у аспекте истраживачких задатка.

Интеграција технологија у процес генерисања површинских структура и потенцијали укључивања различитих аналогних и дигиталних техника тражења форме једно је од полазних разматрања. Креативни допринос ових алата има свој

историјски значај, а употреба дигиталних технологија у ове сврхе отвара нове могућности у примени и развоју поузданих, прецизних и ефикасних метода. Тренд развоја у овој области није ограничен на напредно коришћење постојећих комерцијалних програма већ и на развој специјализованих подрутина и функција прилагођених потребама специфичних задатака. Искуства употребе неких од техника, илустрована примерима, почетна су позиција даљих истраживања приказаних радом. У наставку рада, задатак представљају теоријска разматрања и анализе аспеката примене технологија и метода које ће бити коришћене за развој оригиналне процедуре:

- генетског алгорита,
- *Spline* параметарске геометријске репрезентације,
- NURBS засноване изогеометријске анализе.

Задатак је да се знања о наведеним технологијама интегришу на начин који одговара особеном проблему пројектовања неконвенционалних површинских структура. Тежиште представља разматрање могућности интеграције дигиталних NURBS заснованих алата за дизајн и анализу, односно да се установе модели коришћења предности изогеометријске анализе у контексту специфичности логике процеса пројектовања архитектонских структура.

Развој процедуре за генерисање површинских конструктивних система, у којој се структуралне перформансе користе као критеријуми евалуације ефикасности формалних решења, главни је задатак истраживања. У односу на постојеће, задатак је креирање ефикаснијег поступка, што је реализовано применом:

- морфогенезе и
- изогеометрије.

Примена концепта морфогенезе имплицира аутоматизовану продукцију оптималних формалних решења на основу артикулације интерне генеративне логике. У оквиру овог динамичног процеса, изогеометријска анализа користи се за евалуацију структуралних перформанси. Применом изогеометријског концепта омогућено је да се функције коришћене за геометријску репрезентацију користе и за анализу. Предходним је реализовано да се дизајн, анализа и модификације модела спроводе употребом јединственог типа података, без потребе за

конверзијом, што значајно олакшава и убрзава процес узастопних анализа варијантних форми. Резултати анализе обезбеђују повратне информације, омогућавају поређење алтернатива и селекцију решења која поседују најбоље перформансе у итеративном процесу. Такође, задатак је да се предложена метода, заснива на креирању решења која настају, развијају се и материјализују варирањем геометријских и физичких варијабли, као и да се одликује интерактивношћу и флексибилношћу, посебно неопходним за иницијалну фазу процеса архитектонског пројектовања.

Програмска имплементација предложеног алгоритма процедуре за аутоматизовано генерисање рационалних површинских структура, представља следећи задатак. У том смислу написан је програмски код који оперише у окружењу програмског система за дизајн (CAD). Предложени концепт процедуре спроводи се тако што генетски алгоритам (GA) управља интеракцијом између примењених компјутерских алата, и то:

- CAD софтвером за тродимензионално моделовање заснованом на NURBS технологији којим се врши описивање геометрије облика и
- солвером за NURBS засновану изогеометријску анализу којом се врши евалуација структуралних перформанси.

Развијени генеративни систем производи геометријске облике и на основу повратних информација анализе тражи конструктивно оптимална решења.

Експериментални пројекти су у функцији тестирања операбилности предложене процедуре и њене програмске имплементације. У том смислу, разматране су следеће типологије површинских конструктивних система:

- континуални крути системи (љуске),
- континуални меки системи (мембране).

Експериментални пројекти илуструју да апликација компјутерских метода у процесима пројектовања, и усвајање структуралних перформанси као приоритета, омогућава формалну артикулацију конструктивних архитектонских морфологија. Намера је и да се прикажу предности приступа у коме дефинисање и имплементација процедуре и алата представљају интегрални део кретивног

процеса пројектовања, у складу са формалним и технолошким променама које намећу потребе за редефинисањем конвенционалног процеса пројектовања.

На основу дефинисаног предмета, циљева и задатака формулисане су четири главне хипотезе:

- **Хипотеза 1.** Генерисање површинских конструктивних система на основу ограничења структуралних перформанси представља креативни приступ који обезбеђује рационално искоришћење конструктивних капацитета форме, функционално и структурално јединство.
- **Хипотеза 2.** Примена морфогенетске стратегије као продукционог система и приоритета заснованих на структуралним перформансама у фази концепције омогућава формална истраживања, артикулацију, адаптацију архитектонских морфологија и унапређење процеса пројектовања.
- **Хипотеза 3.** Интегрисање геометријских и аналитичких рачунарских процедура за математичко моделовање у процес морфогенезе омогућава аутоматизовану продукцију низа формалних предлога, на основу артикулисане интерне генеративне логике, и селекцију оптимизованих решења.
- **Хипотеза 4.** Примена изогеометријског концепта, односно описивање геометрије и кинематике јединственим функцијама, омогућава дефинисање алгорита који обезбеђује једноставније, егзактније и ефикасније генерисање површинских конструктивних система и оптимизацију процеса пројектовања.

1.2 Методологија

За проверу хипотеза и спровођење истраживања, а у функцији остваривања прецизности, континуитета, конзистентности и везе свих сегмената истраживања, користиће се следеће методе и у оквиру њих адекватне технике и технологије: логичка аргументација, симулација и моделовање, и студија случаја [Gro02].

Логичка аргументација. Претпоставке које подржавају становиште да се коришћењем научних метода и напредних технологија може унапредити процес

пројектовања припадају структуралистичкој парадигми, као најширем оквиру истраживања. Дефинисање методе за рачунарско генерисање рационалних површинских система реализовано је коришћењем математичко-формалног логичког система. За предложени концептуални систем, дефинисан је алгоритам, који представља основу за развој програмског кода. Функционалност система проверена је његовом применом у изради експерименталних пројеката.

Примењене су интерне и екстерне тактике. Математичка репрезентација, представља интерну тактику примењену за развој система - рачунарског конструкта за аутоматизовано генерисање оптималних облика. Примењена екстерна тактика је аналогија. Нови систем је антиципиран на основу везе понашања његовог садржаја и атрибута са другим метасистемима који постоје у природи - бионичке парадигме. Коришћени бионички конструкти су морфогенеза и еволуционе стратегије. Потребно је нагласити да је систем успостављен овим истраживањем изведен из претходних идеја, а да се оригиналност огледа у његовом унапређењу у светлу развоја нових концепата.

Симулација и моделовање. За спровођење истраживања коришћена је метода симулације. Ова метода омогућава динамичну и интерактивну реплику (или претпоставку) реалног контекста, а манипулацијама одређених фактора добијају се резултати у виду повратних података. За апстраховану дескрипцију физичких законитости реалног проблема коришћени су рачунарски модели.

Стратегија је спроведена симулацијом метода биолошке оптимизације и применом рачунарских технологија за моделовање геометрије и крутости система. Природни процеси еволуције и селекције, у оквирима овог рада, симулирани су применом генетског алгоритма. За моделовање геометрије система коришћени су параметраски модели засновани на NURBS репрезентацији. Док је за симулацију напрезања у конструкцији (стања напона и деформације услед задатих утицаја), уместо уобичејено коришћених рачунарских програма заснованих на методи коначних елемената, употребљена NURBS заснована изогеометријска анализа.

Ефикасно коришћење потенцијала рачунарских технологија реализовано је креирањем аутоматизованих система за генерисање форме, чиме је олакшано изналажење решење продукцијом варијанти и постепеним подешавањем. Такође,

радом се фаворизује хибридни приступ интерпретацији резултата. У овом приступу комбинују се компјутерска аутоматизација и тзв. мануелно подешавање, како би се елиминисала ограничења потпуно аутоматизованих процеса изражена у ситуацијама које није могуће егзактно дефинисати.

Студија случаја. Примена ове методе у служби је провере функционалности и одрживости формулисаног логичког система и његове програмске имплементације. Ова стратегија примењена је са намером да се демонстрирају предности генеративног приступа пројектовању површинских конструктивних система, као и да се изведе генерализација о могућностима шире примене развијене процедуре и алата.

Метода је спроведена израдом конкретних експерименталних пројеката на основу задатака дефинисаних за потребе овог истраживања. Дефинисани случајеви покривају распон различитих површинских система. Добијене повратне информације представљају основ за могуће корекције, унапређења и допуну система и алата.

Интеграцијом наведених комплементарних метода, коришћењем њихових предности, односно неутралисањем индивидуалних слабости обезбеђено је богатство информација, повећана јачина аргумената, уверљивост и валидност добијених резултата.

1.3 Структура рада

Рад је заснован на комплексној интеракцији између различитих тема, што је приказано дијаграмом на слици 1.3.1. Резултати истраживања организовани су у четири дела подељена на поглавља. Први део је уводни, другим делом обрађена је тема генерисања површинских конструктивних система, трећим делом је приказана изогеометријска морфогенеза, а четвртим делом су обухваћена закључна разматрања.

Други део. У оквиру друге целине тема генерисања површинских конструктивних система обрађена је кроз три поглавља - генеративно пројектовање, генеративна оптимизација и моделовање система.

Генеративно пројектовање је поглавље којим је разматрана примена овог концепта и дат преглед различитих аналогних и дигиталних техника за проналажење форме (*form-finding*). Посебно је обрађена морфогенеза, као један од кључних концепата рада. Преглед је илустрован примерима у којима се примењују ови поступци, а којима је успостављен концепт истраживања кроз пројекат у области конструктивних система, интегрисањем ограничења структуралних перформанси. Примена појединих метода на конкретним задацима у функцији су припреме за главне експерименталне пројекте приказане у оквиру наредног дела. Нека од истраживања публиковани су у [Nes13a], [Mil13b], [Mil14a], [Mil14b].

Генеративна оптимизација представља поглавље у оквиру кога је дат преглед основних принципа проблема оптимизације перформанси конструктивних система, затим различите стратегије, поступци и алгоритми који се примењују у ту сврху. Овај преглед представља шири контекст за детаљнији приказ теме генетског алгоритма, као поступка који ће бити примењен у истраживању. Концепт генетског алгоритма, начин његовог оперисања, његови елементи и оператори обухваћени приказом, илустровани су примером.

Моделовање система, је поглавље организовано у два потпоглавља која обрађују кључне технологије за овај рад - геометријско и изогеометријско моделовање. Геометријско моделовање приказује поступке дескрипције геометрије система помоћу NURBS параметарских кривих и површи. Полазећи од развоја идеја у овој области у наставку су обрађене основне карактеристике, класификација, као и методе генерисања површи и проверене кроз примере. У оквиру потпоглавља изогеометријско моделовања описана је NURBS заснована изогеометријска анализа. Поглављем је дата приказ изогеометријског концепта и изогеометријске теорије површинских система без ротација.

Трећи део. У оквирима ове целине приказана је процедура изогеометријске морфогенезе, развијена овим радом. Концепт, формулација, програмска

имплементација и евалуација ове процедуре у смислу могућности њене примене у процесу пројектовања површинских конструктивних система, представљају централно место овог рада. Процедура је детаљно приказана кроз три поглавља основе, имплементација и примена.

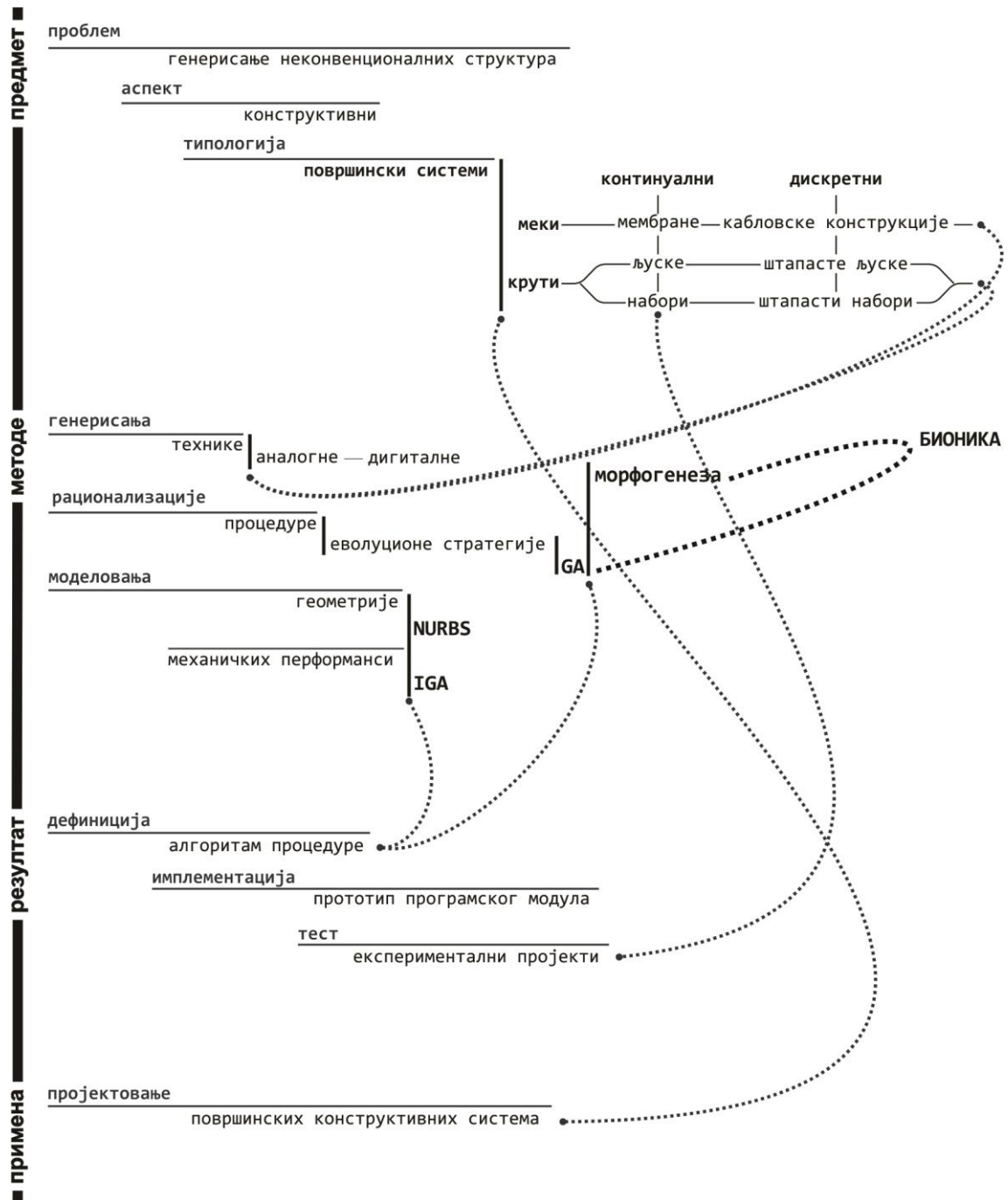
Основе процедуре обухватају опис који подразумева увођење и појашњење кључних концепата за њен развој. Затим је дат детаљан преглед и опис свих фаза генеративне процедуре. У овом поглављу је дефинисан модел генеративног система, односно геометријска, физичка и нумеричка апроксимација.

Имплементација је поглавље у оквиру кога се описује рачуарска имплементација претходно дефинисане процедуре. Посебан акценат је на прилагођавању делова генетског алгоритма специфичном проблему - функције евалуације и пројектних варијабли. Развијени програмски код је у оквиру овог поглавља тестиран на референтним површима.

Примена процедуре изогеометријске морфогенезе у процесу пројектовања површинских конструктивних система, разматрана је у смислу прилога концептима проналажења форме (*form-finding*) и унапређења форме (*form-improving*). Позиција, релевантност и одрживост ове методе као медијума за истраживања кроз пројекат проверена је пројектним експериментима. Приказани примери и функционални тестови, који су претходили главним експериментима, у функцији су успостављана ограничења домена пројектовања. Презентована су два експериментална пројекта, од којих је један прилог концепту тражења форме љуски, а други концепту унапређења форме мембрана.

Четврти део обухвата закључна разматрања којим су сумирани резултати и назначене смернице за могућа даља истраживања проблема имплементације научних метода и дигиталних технологија у процесу пројектовања површинских конструктивних система. Такође, дискутоване су импликације позиционирања структуралних перформанси као најдоминантнијег утицајног фактора у процесу пројектовања. Спроведени експериментални пројекти показују да генеративни системи засновани на структуралним перформансама имају креативни капацитет, као и да се ограничења карактеристична за овај приступ могу искористити као пројектни потенцијал. У случају пројектовања површинских конструктивних

типологија посебно се намеће потреба превазилажења приступа ограниченог искључиво на форму, подстакнутог могућностима актуелног дигиталног пројектног окружења, у корист процеса орјентисаног на перформансе, у коме се до пројектног решења долази кроз истраживања.



Слика 1.3.1 Дијаграмски приказ концепције рада

Генерисање површинских конструктивних система

Асимилација информационих технологија значајно је изменила процес пројектовања. Препознати потенцијали компјутерских алата подстакли су бројне експерименте. Транзиција процеса пројектовања у сферу аутоматизованог, симулативног и интерактивног компјутерског окружења отвара нове могућности у погледу обликовања архитектонских структура, пред које се поставља задатак да одговоре изазовима перформанси и естетике, а што је разматрано у [Rob93], [Pea96], [Ter06], [Hen06], [Sil06], [Gar09], [Oxm09], [Col10], [Men10], [Oxm10], [Leg11], [Oxm11], [Pet13], [Gra14]. Међутим значајније од иновативних форми су импликације које технолошки прогрес има на сам процес пројектовања.

Развој информационих теорија и технологија утицао да појам архитектонских перформанси постане инхерентно повезан са способношћу датог система да размењује информације са својим окружењем. Резултати истраживања и пројектовања интелигентних агенаса у области вештачке интелигенције проналазе своје интерпретације у пројектовању архитектонских система који имају потенцијал да перципирају своје окружење и предузимају акције које ће максимизирати њихову успешност. Истраживања у интердисциплинарно развијеној области кибернетике указују да је релација између перформанси система и његовог окружења регулисана начинима на које се информације организују, дисперзују и преводе. Односно, како је то Винер (Wiener) формулисао: *Кибернетика заузима став да структура машине или организма представља индекс очекиваних перформанси* [Wie48]. Попут комуникације у кибернетици, интеракција између циљева и истраживања у процесу пројектовања може пратити сличне шеме повратних података и суочавати се са сличним изазовима у интеракцији човек-машина.

Напредне информационе технологије омогућавају пројектовање у интегрисаном окружењу у оквиру ког архитектура и различите области

експертности континуирано размеђују, анализирају и продукују диверзитет информација. У оваквом контексту архитектура има улогу *...чвора у комуникационој мрежи унутар и између дисциплина и режима знања и продукције* [Mar03]. Примена компјутерских технологија у обради информација је процес који прати добро дефинисан модел који је могуће изразити као алгоритам или протокол. Аналогно, пројектовање представља продуктивну дисциплину практичног резоновања и аргументације оријентисану на решавање проблема, која поседује специфичну технологију, односно форму системског размишљања фундаменталну за процес креације. Иако флексибилан и уобичајено нелинеаран, процес пројектовања је планиран и састоји се од различитих секвенци, *...пројектанти морају да сакупљају информације о проблему, да их проучавају, предлажу решења и, не обавезно, да их доводе у ред...* [Law80]. У том смислу, употреба рачунарских генеративних стратегија у процесу тражења пројектних решења представља одговор на повећану софистицираност и комплексност процеса и форми, које намећу потребу креирања посредних продукционих система абстракцијом реалних проблема, услова и ограничења.

Док у домену инжењерства решавање проблема засновано на перформансама представља доминантан приступ, у архитектури која је често више артистички усмерена перформансе остају неухватљив појам, који одређени теоретичари интерпретирају у смислу структуралне и енергетске ефикасности, док други траже начине да понашање архитектонских објеката повежу са концептима позајмљеним од различитих мислилаца од Хусерла (Husserl) до Делазе (Deleuze). Овако широка поставка концепта перформанси оставља простор да се под њега подведе читав спектар архитектонског стваралаштва реализован на принципима рационалности [Gro12]. У оквирима овог рада разматрања ће бити фокусирана на позицију структуралних перформанси као утицајног фактора у процесу конципирања архитектонских форми. Без намере да се сва комплексност процеса пројектовања редукује на један аспект, циљ наредних разматрања је да укажу на креативне потенцијале укључивања различитих технологија у процес продукције архитектуре.

Процес конципирања архитектонске форме неретко се одвија готово без узимања у обзир конструктивних захтева, а структурална анализа се

конвенционално користи пасивно тек након што је форма објекта артикулисана. Оваквој пост-дизајн рационализацији, коју карактерише недовољан степен интеракције између архитеката и инжењера, супротстављен је холистички приступ у коме се перформансе користе у фази концепције за проналажење форми које имају капацитет да преведу намере аутора, енвајорментална и техничка ограничења у интегрисана морфолошка решења. Тежиште разматрања је на поступцима проналажења форми који омогућавају генерисање материјално и структурално ефикасних решења. Овакав приступ као почетну позицију у процесу пројектовања могуће је идентификовати још у радовима Гаудија (Gaudí), а затим конструктора Торохе (Torroja), Канделе (Candela), Ислера (Isler), Нервија (Nervi), Арупа (Arup), Фулера (Fuller), Ота (Otto), који су у периоду између 1945. и 1970. године реализовали значајан број објеката развијајући и примењујући оригиналне методе често засноване на опсервацијама из природе; преко Фостера (Foster), па све до експеримената савремене дигиталне авангарде SOM, ATK, NOX, Менгеса (Menges), Белмонда (Balmond), Сасакија (Sasaki) и других који стварају у постдигиталној ери.

Ово истраживање у основи се бави темом архитектонске форме као резултатом утицаја структуралних перформанси. Став је да генерисање површинских конструктивних система, засновано на приоритетима ограничења која намећу механичке перформансе, обезбеђује рационално искоришћење конструктивних капацитета форме, функционално и структурално јединство компонената система и креативан обликовни израз. Јединствену природу површинских конструктивних система карактерише интеракција геометрије и просторног преношења утицаја која имплицира тражење компромисних решења у процесу пројектовања, у коме је оптимална форма само један од аспеката. У том смислу разумевање понашања и принципа конструисања ових система је од важности, јер омогућава адекватан пројектни предлог као одговор на програм, место и време.

Реализација неконвенционалних површинских структура унапређена је иновацијама у области рачунарских технологија, материјалних система и производних процеса. Развој дигиталних алата за дизајн, анализу и производњу омогућава креирање нових изражајних форми, дијагностику њиховог понашања и

осмишљавање ефикасних стратегија њихове реализације. Реактуелизацији примене ових конструкција доприноси и чињеница да императив одживости прожима актуелну архитектонску теорију и праксу. Површински системи оптимално користе материјал и ресурсе. Њихова мала уграђена енергија може бити један од фактора штедње енергије током животног циклуса конструкције и представља тему које може мотивисати даља истраживања. Имајући у виду и претходно, у оквирима овог рада проблематика површинских система се ипак разматра на нивоу који је фундаменталнији од аспекта одрживости.

У идеалном случају површински системи (танке еластичне љуске) представљају оптимизоване структуре. Типично за оптимизоване системе је да могу бити екстремно осетљиви на промене параметара. Један од кључних параметара ових система је њихов иницијални облик. Закривљена геометрија љускама омогућава да оптерећење преносе претежно мембранским напрезањем. У случају просторно хомогеног стања напона, које се јавља код мембрана, као специјалног случаја танких еластичних љуски, ситуација је још повољнија. С обзиром да оптимизација може бити генератор нестабилности и осетљивости на имперфекције, приликом пројектовања љуски потребно је омогућити да се оптерећења преносе претежно мембранским дејством избегавајући савијања, током читавог животног циклуса. Ова идеална ситуација заснована је на бројним предусловима [Nes00] и уобичајено зависи од параметара - оптерећења, адекватних граничних услова и материјализације система.

На нивоу концепције, оптимизацију је могуће спровести коришћењем метода за генерисање форме. Структуре настале применом ових метода нису резултат искључиво захтева естетике или физике, већ представљају колаборацију архитектуре и инжењерства у процесу креирања форми која искрено изражавају своју функцију. Пре употребе рачунара равнотежни облици структура тражени су кроз израду различитих врста физичких модела и применом ограничавајућих мануелних поступака. Развој дигиталних технологија омогућио је не само развој нумеричких метода, већ и измештање процеса проналажења форме у комплексно, динамично, виртуално окружење, отварајући могућност за формулисање нових генеративних поступака.

2.1 Генеративно пројектовање

Генеративни процеси у стваралаштву, на извешан начин, одувек су заступљени. Употребу симетрије, образаца и репетиције могуће је идентификовати још код најстарије познатих култура. Међутим, тек у уметностима XX века процес и концепт постају централне теме. Такве тенденције у основи су процес арт (*Process Art*) покрета, орјентисаног на идеје иза *objet d'art* и технике његове реализације, као и концептуалног правца чији је фокус на процесу осмишљавања дела и сазнањима која настају у том поступку.

Перетпоставља се да је термин генеративно први пут употребљен у контексту аутоматизоване компјутерске графике још 1960-тих [Vod10]. Коришћен је да означи геометријску, абстрактну уметност у којој се репетицијом, трансформацијама и варијацијама једноставних елемената генеришу комплексне форме. Термин генеративна уметност (*Generative Art*) први пут употребљен је у смислу динамичног система за креирање уметничких догађаја за назив конференције одржане у Милану 1998. године, док је његово коришћење у називу департмана Генеративни системи (*Generative Systems*), основаног 1970. године на *School of the Art Institute of Chicago*, у контексту примене нових технологија у креативном процесу [She83] први пример увођења овог приступа у едукацији. Термин генеративна математика (*Generative Mathematics*) уводи Франке (Franke), а односи се на *истраживања математичких операција погодних за генерисање уметничких приказа* [Fra89]. Крајем XX века орјентација заједнице генеративних уметника на интердисциплинарност, прелажење граница области и конвергенцију донекле је управо заснована на дељењу значења овог термина.

Генеративно стваралаштво односи се на коришћење артифицијелних продукционих система са одређеним степеном аутономије у креативном процесу. Ти системи независно од аутора партиципирају у одлучивању и одређивању крајњих резултата креативног процеса. Иако се начелно може применити ма који систем који поседује генеративни потенцијал¹, у те сврхе најчешће се користе

¹ Погрешно је генеративне системе изједначавати са системима заснованим на правилима. Увођење ограничавајућих правила у стваралачки процес, попут на пример забране коришћења одређеног облика, није конструктивно по себу из разлога јер не обезбеђује резултат, већ одређује само шта не може бити урађено.

аутоматизовани рачунарски системи. Компјутерски генерисано уметничко дело производ је алгоритамски детерминисаног система правила (програмских инструкција). У том процесу аутор допушта компјутерском систему да учествује у доношењу неких одлука, задржавајући позицију онога ко одлучује о правилима.

Иако резултати настају (*emerge*) у контролисаним процесима, у овом недетерминистичком приступу они нису унапред познати, чиме је остављен простор за неочекивано. Попут алеаторике² у музици, где су уметници приликом креације вођени процесима заснованим на случајности, или *вештачке ДНК* (*Artificial DNA*), генеративног приступ у уметности у коме конструисани систем има способност да генерише непредвидљиве догађаје препознатљивог заједничког карактера. Генеративна уметност свој израз проналази у статичним артефактима, резултатима процеса који нису експонирани, или у процесима који се одвијају и производе резултате у реалном времену. Аутономија система представља критични аспект у генеративним уметностима. Актуелни приступи подразумевају коришћење аутономних система код којих је контрола доста редукована. Али и другу крајност тзв. *живо кодирање* (*live coding*), односно коришћење интерактивних програмских језика којим је омогућена модификација генеративних система у току самог извођења операција [McL11].

Генеративни системи су есенцијални део процеса генеративног пројектовања. По свом карактеру могу бити уређени, неуређени или комплексни. Уређени системи су стари колико и уметност, а подразумевају примену низова, мапирања података, симетрије, теселација, секвенци бројева и низова, комбинаторике или особине као што је златни пресек. Неуређени генеративни системи постају актуелни у XX веку и уобичајено користе методе насумичног бирања (*randomization*), стохастичку, или аспекте теорије хаоса. Актуелни приступ подразумева примену комплексних система који представљају мешавину уређених и неуређених. По свом понашању генеративни системи могу бити линеарни и нелинеарни. За разлику од линеарних на понашање нелинеарних система није могуће применити принцип суперпозиције, односно понашање оваквог система не може се изразити сумом (или производом) понашања његових

² Алеаторика (од лат. *aleo* што значи коцка) у музици представља технику у којој је одређени део процеса стварања музичког дела, ред елемената или параметара препуштен мање или више случајности, чиме се постиже стваралачка слобода.

делова. Генеративни системи могу се понашати адаптивно у смислу да имају капацитет да се мењају и уче из тог искуства.

Може се рећи да је дискурс око генеративног пројектовања инспирисан нестабилношћу и комплексношћу. Фасцинација нестабилношћу посланица је утицаја Дарвиновог (Darwin) погледа на свет у континуланом процесу еволуције и промене, који је имплицирао и транзицију од Њутнове (Newton) парадигме стабилности ка Пригожиновим (Пригожин) истраживањима у области физике која се баве нестабилношћу/неравнотежом, феноменом малих промена иницијалних стања која воде великим амплификацијама ефеката промене. Односно како је Клаусер (Clauuser) изразио ... *еволуција је једна од најдефинитивнијих одлика генеративне уметности која процесира (или структурира) и мења (или трансформише), те долике су изражене и самим термином генеративно који имплицира динамични развој и кретање. ... (резултат) није креација уметника већ пре продукција генеративних процеса - самопреципитација структуре* [Cla88].

Гел-Ман (Gell-Mann) и Лојд (Lloyd) појам ефективне комплексности уређених и неуређених система виде у смислу да висока уређеност система минимизира ентропију дозвољавајући максималну компресију података, док је висока неуређеност максимизира онемогућавајући значајнију компресију података. Претходно је у супротности са раним информационим теоријама [Mol68] које заступају став да се комплексност повећава повећањем неуређености. Комплексни системи, функционишу на сличан начин као биолошки системи, који су инспирација и основа за њихово креирање.

Према Галантеру (Galanter) теорија комплексних система најчешћа је основа генеративног пројектовања [Gal03]. Комплексни систем је ма који систем који подразумева већи број компонената, агенаса, процеса, итд. који су у интеракцији и чија је укупна активност нелинеарна. Ови системи уобичајено изражавају карактеристику хијерархијске самоорганизације, која је везана за њихово настајање [Roc03]. У многим системима могуће је разликовати скуп фундаменталних градивних блокова, главних конституената система који ступају у интеракције. Они се проучавају на одређеном нивоу, другачијем од сложених структура или функција чије се проучавање и објашњење одвија на вишем нивоу.

Примери ових система су гени који усмеравају процесе развоја, имуни систем организама, социјалне колоније инсеката³, неуронске мреже у мозгу, екосистеми, социјалне мреже које се састоје од саобраћаја, инфраструктуре и телекомуникационих система, економије, итд. Компоненте, односно градивни блокови комплексних система, и саме могу бити комплексни системи.

Везе између компонената су такве да колапс једне или више компоненти може довести до тзв. каскадног колапса и фаталних последица по функционисање система у целини. Уобичајено комплексни системи су у пољу термодинамичких градијената и карактерише их дисипација енергије. Ови системи нису у енергетској равнотежи, али упркос томе могу бити стабилни⁴. Имајући у виду да су ови системи динамични и да се временом могу мењати, меморија, односно историја понашања такође представља битну одлику у смислу да претходно стање може имати импликације на тренутно. Топологија динамичне мреже комплексних система је често таква да су локалне интерконеције густе док је број интеррегионалних конекција мали⁵.

За разлику од линеарних система где постоји директна пропорционалност између узрока и последица, нелинеарне релације код комплексних система утичу да мале пертурбације могу имати велике, пропорционалне или немати никакве ефекте. Релације у оквиру система садрже повратне спреге (*feedback loops*), тако да повратни подаци увек постоје у систему, а ефекат понашања одређеног елемента повратно утиче на промене самог елемента. Генеративне методе које имају примену у процесу пројектовања дубоко су укорењене у моделовању динамике система. Оне по природи представљају репетитивне процесе у којима се решење развија кроз одређени број итерација пројектних операција, а повратне петље представљају специфичну карактеристику њиховог компјутерског моделовања. Приликом креирања петљи могуће је применити различите

³ Нпр. термит као јединка поседује одређене карактеристике у погледу психологије, биохемије, биолошког развоја које је могуће анализирати на једном нивоу, док заједница термита испољава специфично социјално понашање приликом грађења мравињака које је потребно анализирати на другом нивоу.

⁴ Синергетика (*Synergetics*) представља интердисциплинарну научну област, коју је основао Хакен (Haken), а која се бави објашњењем феномена формација/творевина и само-организације образаца и структура у отвореним системима који су далеко од термодинамичке равнотеже. Само-организација захтева макроскопске система, који се састоје од мноштва нелинеарних подсистема који су у интеракцији, а дешава се у зависности од контроле екстерних параметара (енвајорменталних, флукса енергије).

⁵ Оваква топологија карактеристична је за природне системе, на пример кортекс код човека карактерише густа локална повезаност, док свега неколико аксона повезује делове кортекса са осталим деловима мозга.

приступе, од једноставних механизма, код којих модел узима свој излазни податак (*output*) за улаз (*input*), до релативно комплексних који укључују пројектовање еволуционих рутина.

Поред компјутерских система у генеративном процесу могуће је користити и друге системе - хемијске, биолошке, механичке, роботичке, паметних материјала, мануалне рандомизације, матаметичке, мапирања података, симетрије, теселација, итд. Биолошки системи честа су инспирацију за креирање генеративних метода. Према Соду: *Генеративно пројектовање представља морфогенетски процес који користи алгоритме конструисане као не-линеарне системе за бесконачан број јединствених и не-поновљивих резултата које, као и у природи, производи идејни-код* [Sod11]. Пример су генеративне шеме које користе генетске алгоритме како би креирале варијације. Према [Str10] стратегије инспирисане природом које се примењују у генеративним процесима сумиране су помоћу три кључна појма: *мапирање, колективитет и еволуција*. Могуће је успоставити директну релацију између ових појмова и *репрезентације, композиције и варијације* информација које су основ за креирање објеката. Уз напомену да генеративно пројектовање увек подразумева еволуцију података који су у његовој основи.

Процес развоја у природи неизбежно води комплексности. Међутим хијерархијски структурирана комплексност у природи реализована је једноставним градивним јединицама и економичним средствима. ДНК кодирање свих природних форми постиже се помоћу свега четири нуклеотида, који користе само двадесет триплета, којима се специфицирају аминокиселине, које производе протеине, који учествују у изградњи организама. Претходно иде у прилог тези да једноставна правила могу да генеришу *emergent* особине и наизглед недетерминисано понашање. Скуп малих акција покреће процес и у комбинацији са осталим малим акцијама делује до појаве препознатљивог глобалног образаца понашања. Када се достигне одређена критична граница комплексности организми добијају способност да се самоорганизују и саморепродукују на безброј начина производећи на само једнако комплексне већ и компликованије јединке од њих самих [Fra95].

Приступи које нуди еволуционо рачунарство (*evolutionary computation*) посебно су продуктивни у поступку реализације комплексних израза и естетике било да је у питању примена интерактивне селекције, узгоја индивидуа који води унапраћеним хибридним решењима применом правила аутоматске селекције или оба [Von07]. Компјутерски системи који такође иду у правцу комплексности су дифузионо-ограничене агрегације (*diffusion-limited aggregation*), Л-системи (L-systems), неуронске мреже (*neural networks*), ћелијска аутомата (*cellular automata*), системи реакција-дифузија (*reaction-diffusion systems*), вештачки живот (*artificial life*), понашање роја (*swarm behaviour*) и друге биолошки инспирисане методе. Импликација примене ових генеративних система су архитектонски објекти чије форме се не перципирају као фиксни ентитет већ као реактивни систем, врста полуорганске машине која се на одређени начин понаша као живи организам.

Процес генеративног пројектовања за разлику од конвенционалног приступа у коме је релације између субјекта (пројектанта) и објекта углавном директна, подразумева креирање генеративног система (продукционог средства или експлорационог конструкта) који посредује у стварању објекта. У оваквој поставци суштина је у овладавању релацијама између објекта пројектовања, правила (спецификација) и услова (ограничења). Уобичајено саставни део генеративног процеса чине: пројектни дијаграм, средство за креирање варијација и средство за селектовање жељених резултата. Без намере линеаризације, процес се начелно одвија у две фазе. Прва фаза представља дефинисање проблема, формулисање сета правила, услова и ограничења релевантних за процес тражења решења и њихова трансформација у експлорациони систем/конструкт који се у другој фази користи за продукцију решења. Концепт процедуре за генерисање површинских конструктивних типологија, која је предмет овог истраживања, сличан је описаном сценарију.

Примену генеративних система у архитектури могуће је идентификовати још у Леонардовим студијама цркви централног плана и Дирановој (Durand) књизи *Précis des Leçons d'Architecture*. Ови продукциони системи припадају реторици граматике облика (*shape grammar*), у основи су комбинаторички или конфигурациони, што је према Мичелу (Mitchell) присту који вуче корене још од Аристотелове матафизике [Mit90]. У процесу решавања архитектонских проблема

овај приступ заснива се на претпоставци да је могуће конструисати неку врсту репрезентације, којом се могу приказати различита стања, која су одговор неком специфицираном критеријуму, а која се траже кроз пермутације. Архитектонске проблеме је ипак тешко описати на овај начин. Док је у време индустријализација 1960-тих година масовна производња подстицала овакве процесе пројектовања који су преузимали форму компјутерске рационализације и методологије модуларне координације и конструктивне прецизности, пост-индустријализација подржана могућностима аутоматизације и дигиталне производње донела је тежњу за новом флексибилношћу (*mass-customization*) орјентисаном на динамичне процесе и искуства која воде у правцу повећане комплексности.

Генеративног промишљања такође је могуће идентификовати у радовима Тјанг (Tung) [Tun69]. Пројекат за Градску кулу (*City tower*) у Филаделфији на коме је радила заједно са Каном (Kahn) представља визуелну експресију поимања идеја о расту, органицизму, топологији и монументалности. Овај концепт настао је под јаким утицајем континуираног развоја неведених идеја короз претходна архитектонска инстраживања аутора и сазнања у областима аналитичке математике, геометрије и биологије [Jua00]. Јадн од пионира примене генеративног приступа у области архитектонског и урабинстичког пројектовања Соду (Soddu), своје идеје приказао је у књизи *Citta' Aleatorie* [Sod89]. Соду је 1987. године креирао артефицијелни ДНК италијанских средњевековних градова на основу кога је омогућено генерисање практично неограниченог броја сродних 3D модела [Sod14]. Према Содуу: *Генеративна уметност је идеја реализована као генетско кодирање вештачких догађаја, као конструкција динамичних комплексних система способних да генеришу бескрајне варијације. Сваки генеративни пројекат је концепт-софтвер који ради производећи јединствене не-поновљиве догађаје, као што су музика или 3D објекти, као могући и вишеобразни изрази генеративних идеја код којих је изузетно препознатљива визија припадности уметнику/дизајнеру/музичару/архитекти/математичару* [Sod98].

Генеративно пројектовање повезује се са продукцијом естетике сложености и варијација с једне стране, и дискурсом перформанси⁶ и конструктивном

⁶ Коларевић дефинише перформативну архитектуру (*performance architecture*) као приступ у коме се особине објекта или понашање објекта у односу на одређене утицаје, користе као потенцијали у процесу конципирања решења [Kol05].

инжењерском логиком с друге. У оба случаја продукција објеката се одиграва под утицајем спољашњих сила и фактора (субјективних или природних). Међутим, док се у првом случају генеративни приступ користи у процесу креирања комплексних геометрија и репетитивних форми заснованих на визуелним особинама, инспирисаних на пример радовима Лина (Lynn), Новака (Novak) или Парела (Parrell), који у потпуности искључују конструктивне или тектоничне принципе, у другом случају, који ће бити разматран у контексту овог рада, фокус је на примени генеративних система у процесима тражења структурално рационалних форми (*form-finding*) симулацијом њиховог понашања⁷. За разлику од традиционалног, у коме се симулације структуралних перформанси објекта користе у каснијим фазама, у овом приступу оне се користе у фази концепције. Уместо експлицитних одлука пројектанта, симулације утицаја и ограничења управљају модификацијама параметара модела и воде унапређњима заснованим на повратним информацијама. Експлорациони конструкти који управљају овим генеративним процесима могу се имплементирати у виду различитих техника.

Развој дигиталних технологија утицао је да њихова употреба у ове сврхе постане доминантна до те мере да се, као што је већ наведено, тренутно под генеративним пројектовањем најчешће подразумева рачунарско пројектовање (*computational design*). У том смислу, Криш (Krish) дефинише: *Генеративно пројектовање је трансформација рачунарске енергије у креативну експлорациону енергију која подржава пројектанта (човека) у истраживању већег броја пројектних могућности у оквирима ограничења која је могуће модификовати* [Siv13]. Претходном је допринео развој класичних програмских окружења (*Processing, Fluxus, openFrameworks*), графичких едитора (*Max/Msp, Pure Data, Isidora, Quartz Composer, vvv, Grasshopper*) и скриптинга (*AutoLisp, Rhinoscript, Scriptographer*) који омогућавају релативно једноставну имплементацију идеја чак и пројектантима са малим искуством у области програмирања.

Интеграција алата за параметраско пројектовање и симулацију у процес пројектовања подстакли су нову реторику дозвољавајући објективним екстерним

⁷ За разлику од редукционистичких приступа експерименталног креирања форми на основу параметара заснованих на сликама (*image-based parameters*) и функциоанализма заснованог у првом реду на утилитарности, перформализам (*performalism*) представља дискурс/правац који обезбеђује шири оквир за конципирање архитектонске форме, укључује и повезује оба приступа [Gro12].

информацијама да одређују вредности које генеришу пројектна решења. У том смислу, Лич (Leach) тврди *...(циљеви перформенси) данас су прихваћени од самог почетка у процесу пројектовања као позитивни инпути ... (што) има за циљ да лоцира архитектонски дискурс у објективнији оквир где ефикасно коришћење ресурса замењује естетски угођај (предходних) радова [Lea09].* Даље Лич сматра да коришћење перформанси као генератора архитектонског пројекта отвара врата новој парадигми: *...(овај) приступ дизајну... изазива хегемонију одозго на доле (top-down) процеса прављења форме (form-making) мењајући га са одозго на горе (bottom-up) логиком проналажења форме (form-finding) [Lea09].*

Наглашавајући предности увођења одозго на горе објективности у процес пројектовања, Менгес (Menges) пише да проналажење форме *...екстернализује (даје одређени облик) релацији између процеса формације, покретачке информације, и резултујуће форме... [Men10].* Док Килиан (Kilian) то објашњава на следећи начин *...израз пројектне намере премешта се од буквалног давања форме ка спецификацији контекстуалних параметара, почетних услова и наравно самог система оптимизације... [Kil06].* Ова експлицитна дефиниција релација између улазних података, експлорационог система и евалуација крајњег производа најупечатљивије илуструје процес пројектовања у коме се користи приступ проналажења форме. Међутим, утисак је да су очекивања која се односе на ефекте увођења одозго на горе објективности у овом тренутку преувеличана и на неки начин камуфлирају бројне и комплексне одлуке које је неопходно донети у поступку проналажења форме и интерпретације добијених резултата.

Алгоритамска имплантација генеративних система отворила је дебату да ли се примена оваквог приступа може сматрати процесом пројектовања. Он то у традиционалном смислу свакако није, имајући у виду да дигитални медији који се користе за продукцију поседују критични генеративни карактер, и да на тај начин произведене форме представљају резултат динамичних процеса који је јединствен у свом одговору на постављене услове. Функција генеративних система и техника на извешан начин превазилази улогу алата, посебно у смислу што активно партиципирају у креирању решења и на неки начин обликују пројектантов процес мишљења. У одређеним аспектима систем преузима улогу пројектанта, међутим иницијални корак формирања концепта (генеративног система) ослања се на

пројектантове способности - интуицију, перцепцију, аналогiju, имагинацију које представљају традиционално покретачку снагу архитектонских идеја. Такође, генеративно пројектовање не траба схватити као посебан правац у оквиру архитектуре с обзиром да се не обраћа садржају већ се у првом реду односи на технике која се користи у креативном процесу.

2.1.1 Технике генерисања форме површинских система

Процес генерисања површинских конструктивних система подразумева коришћење различитих техника за симулацију њихових механичких перформанси. Форме ових система детерминисане су напрезањима, што је карактеристика која их подводи под реторику проналажења форме (*form-finding*). Методе проналажења форме заправо су развијане у реалцији са конструктивним типологијама које крутост остварују обликом (у првом реду танких љуски и мембрана) [All10], иницијално следећи инжењерску филозофију која проблем конципирања форме редукује на идентификацију решења ефикасних искључиво у конструктивном погледу.

Услед усложњавања сазнања инжењерска професија дивергирала је од архитектуре почетком XVIII века. Након раздвајања, грађевинско инжењерство постаје више научно оријентисано и у служби суплемента креативно настројене архитектуре. Претходно искуствене стратегије примењиване при решавању инжењерских проблема, замењене су научним приступима. Примена научних теорија довела је до развоја одређеног броја образаца који су коришћени у поступку решавања пројектних проблема, а који не иду у прилог инвентивности. Развој лаких конструкција, посебно од средине XX века, поново је подстакло инжењере на физичке експерименте. У том периоду ото развија пројектантске стратегије инспирисане природом које назива *Formfindung* или проналажење форме [Ott94]. Од 1960-тих година настојање је да се ограничења мануелних експеримената превазиђу употребом ефикасних, поузданих, и прецизних рачунарских симулација.

Актуелни развој дигиталних технологија и њихова примена у правцу је конвергенције инжењерства и архитектуре. Могућност једновременог разматрања различитих пројектних захтева у рачунарском окружењу имплицира постављање већег боја циљева у поступцима проналажења форме. Резултати овакво проширене претраге често су, уместо структурално оптималних форми, компромисна субоптимална решења која одговарају различито дефинисаном низу евалуационих критеријума. На овај начин, позиција техника за проналажења форме измењена је из поступака за решавање пробелма (*problem-solver*) у позицију подстицајних, интерактивних, пројектантских алата за истраживање форме (*form-exploration*) или унапређење форме (*form-improvement*) [Pug09] што су све чешће улоге ових техника. Након више од тридесте година од раних истраживања у овој области Ото је дефинисао да је улога инжењера ... *да истражују механику самоадаптације* (у оквиру овог контекста) *из разлог јер су адаптивни ентитети под дејством сила које узрокују конфигурацију, модификацију и брисање* [Ott94]. Још увек постоји доста простора за унапређење тренутно расположивих техника како би се реализовала ова замисао.

Процеси тражења форме најчешће се дефинишу као: *Проналажење (оптималног) облика који представља (или апроксимира) стање статичке равнотеже* [Lew03]. Хабер (Haber) и Абел (Abel) проналажење форме називају *иницијалним проблемом равнотеже*, на тај начин наглашавајући чињеницу да су, у многим случајевима, поред облика непознате и силе (напрезања) [Hab82]. У том смислу и Блецингер (Bletzinger) дефинише поступак тражења форме као: *Проналажење облика равнотеже сила у оквиру задатих граница, а у односу на одређено стање напрезања* [Vee11]. Развој истраживачке области поседњих деценија је поред класичних донео и дефиниције које термину дају проширено значење, попут дефиниције Коендерса (Coenders) и Босиа (Bosia) ...*проналажење адекватне архитектонске и структуралне форме* [Coe06] или Баса (Basso) и Дел Гроса (Del Grosso) ...*процес структуралне оптимизације у коме су варијабле чворне координате* [Bas11].

У зависности од медијума који се користи за симулације, технике за тражење форме могу се начелно поделити на *аналогне* и *дигиталне*. Обе врсте техника користе се за тестирање решења, разумевање његовог понашања услед дејства

оптерећења, или процене напона и деформација у итеративном процесу тражења форме. Израда физичких модела дуго је била есенцијални део процеса пројектовања површинских система. Иако су развојем рачунара ове технике потиснуте, и даље могу бити корисне у раној фази процеса пројектовања подједнако као средство за проналажење и визуелизацију иницијалног облика који је потом могуће побољшати коришћењем дигиталних алата. Компјутерске технике за проналажење форме уобичајено су конципиране тако да симулирају понашање физичких модела. Међутим, ове технике не дају увек поуздане резултате, и емпријска провера у којој мери су блиски физички реланом понашању система у одређеним случајевима представља неопходан корак.

У основи поступака проналажења форме су *принцип обрнутог висећег модела*, *концепт контроле напрезања* и *структурална оптимизација*. Док се прва два принципа реализују подједнако применом аналогних и дигиталних техника, оптимизација је повезана са методама рачунарске анализе и заснована на математичким и физичким принципима. У сваком од случајева примена ових принципа резултује формама рационалним са аспекта структуралних перформанси. Такође потребно је направити разлику између примене ових техника у контексту тражења форме *крутих површинских система* (љуски и штапастих љуски) и *преднапрегнутих површинских система* (мембрана и кабловских мрежа). Иако су ово повезане процедуре ипак их није могуће директно применити за принципијално различите типологије.

Форме првих танких љуски грађених почетком XX века реализоване су углавном коришћењем једноставних геометријских облика (сфере, цилиндра, параболичних облика, хиперболичног параболоида, итд.) и познатих односа распона и кривина. Између осталог и из разлога јер је у то време било могуће спровести анализу љуски само за аналитички дефинисане геометрије. Међутим неки од ових геометријских облика не могу да обезбеде искључиво мембранско стање напона, услед чега је потребно увођење додатних елемената као што су ивичне греде, различите врсте ојачања, преднапрезање, и сл. Уколико се супротно уобичајеној процедури према којој се конструкција одређује за претходно дефинисан облик примени инверзна процедура: *задајући неколико геометријских параметара као што су распон и висина, оптерећење и пожељна ограничења*

напона и померања, приступи тражењу природног равнотежног облика [Ram04], бројним примерима [Isl59], [Isl80], доказано је да су резултујућа обликовна решења природнија и елагантнија, а повољније напонско стање елиминише потребу за додатним укрућењима.

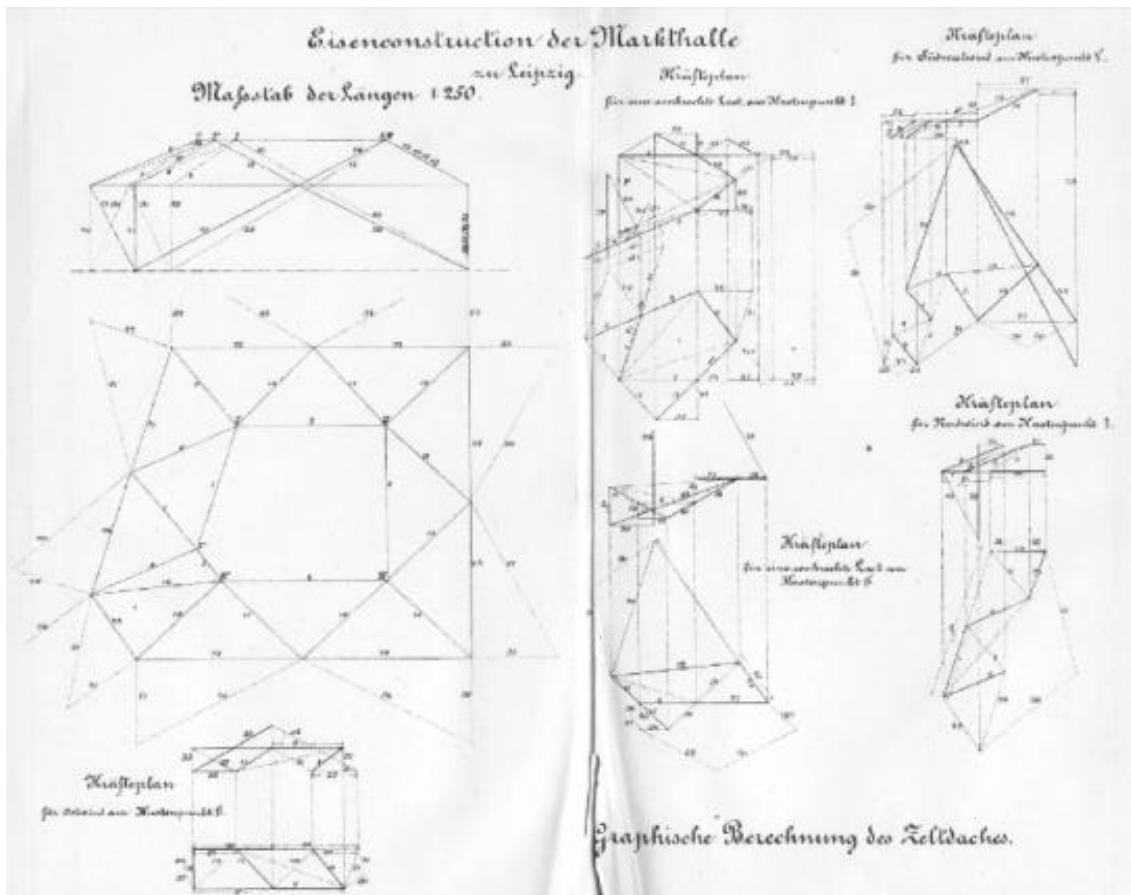
С друге стране, мембране крутост остварују искључиво уколико њихова форма обезбеђује хомогено мембранско стање напрезања које је у равнотежи са дејством спољашњих утицаја. Познато је и експериментално потврђено да је претходно могуће реализовати материјализацијом геометрије минималних површи. У случају механички преднапрегнутих мембарна код којих нема дејства спољашњег притиска добијене геометрије имају антикластични облик негативне Гаусове (Gauss) закривљености или облик нулте просечне кривине (*mean curvature*), док су у случају пнеуматских система, код којих се јављају разлике у притисцима, геометрије површи синкластичне. Једини одрживи приступ обликовању и једних и других система подразумева примену неке од техника за проналажење форме.

2.1.1.1 Аналогне технике

Дефинисање структуралних форми и иницијална истраживања њихових механичких особина вршена су помоћу мануелних техника и израдом физичких модела, комбиновањем и интеграцијом процеса пројектовања и анализе. Поделу аналогних техника за проналажење форме могуће је извршити на *аналитичке* и *експерименталне*. Аналитичке методе могу бити геометријске и математичке, док у експерименталне методе спадају обрнути viseћи модели, затегнуте и пнеуматске мембране. У креативним процесима је могуће користити и остале методе, које строго узевши, не припадају некој од предходне две категорије као што су скулптуралне форме, симулације облика љуски из природе, итд.

Графостатика представља интуитивну технику за истраживање конструктивних форми превасходно у две димензије [Cul66], [Cre79], [Cre90], [Zal98]. У основи ове методе су две репрезентације решења: дијаграм сила (полигон сила) и дијаграм форме. Ови дијаграми су међусобно повезани и геометријски условљени, а модификације које је могуће вршити на једном од њих

имплицирају промене другог и обрнуто. Претходна претпоставка допушта да се истраживања облика структуре спроводе на полигону форме или полигону сила. Развијане су и тродимензионалне методе графостатике [För92]. Ове методе представљају прилично компликоване поступке који захтевају познавање бројних специфичних правила нацртне геометрије (слика 2.1.1). Њихова примена ограничена је на статички одређене просторне штапасте системе.



Слика 2.1.1 Примена методе тродиманзионалне графостатике, реализована коришћењем нацртне геометрије, у поступку одређивања облика штапасте структуре, [För92]

Графостатика је имала ограничену примену у пројектовању површинских конструктивних система. Као алат користилу су је градитељи љуски у XIX веку, уз напомену да је техника могла бити примењена само за случај геометријски једноставних површи. За проналажење облика који репрезентује равнотежно стање површинских система неопходно је коришћење комплекснијих и софистициранијих алата попут физичких или дигиталних модела.

Експерименти са равнотежним физичким моделима представљају технике за истраживање формалних решења које и данас налазе примену у концептуалној фази пројектовања површинских конструктивних система. Због своје интуитивности и интерактивности неке од ових техника пријемчиве су пројектантима, имајући у виду да је у раној фази процеса пројектовања потребан флексибилан алат који обезбеђује брзу евалуацију и продукцију варијантних решења. Ови експерименти не подразумевају случајне претраге, већ научно засновану употребу физичких принципа у поступку добијања форми у оквирима дефинисаних граничних услова. Физички модели представљају реплику реалне ситуације, а разумевање принципа у основи ових студија архитектама омогућава да се укључе у обликовање равнотежних форми. Врста спреге структуралних и визуелних истраживања посредством овог медијума [Вил80] може имати предности у односу на рачунарске симулације, с обзиром да физички модели имају реалан карактер због чега је у неким случајевима на њима лакше извршири адаптације главних елемената (граничних услова и геометријских параметара) и детектовати механичке слабости/предности решења. Начелно, форме добијене на овај начин у великој мери зависе од примењених материјала и техника.

За израду модела претежно се користе флексибилни материјали који се причвршћују за круте рамове или други вид ослонаца, а дејство оптерећења уноси се на одговарајући начин. У основи ових експеримената је једноставан концепт: *услед дејства оптерећења флексибилни материјал који симулира површи деформише се све док унутрашња напрезања (силе затезања) имају способност да се одупру утицају спољашњег оптерећења* [Вес08]. Приликом опредељења за коришћење ове врсте техника у пројектним истраживањима, треба имати у виду да материјали примењени за њихову реализацију не представљају верну реплику материјала који се користе у изградњи реалних конструкција. Претходно има посебне импликације имајући увиду да је добијен облик у великој мери последица карактеристика материјала примењених за израду модела.

Манипулисање обликом спроводи се променом расподеле и величине оптерећења, врсте и позиције ослонаца и геометрије самог материјала. Варирањем угиба површи остварује се облик веће или мање закривљености. На облик је могуће утицати и позиционирањем отвора, или увођењем каблова посредством

којих се стварају прегибне линије (које стварају ефекат набора). Потребно је напоменути да варијације дебљине површинских система уобичајено нису укључене у ове експерименте, имајући у виду да овом техником то није једноставно. У процесу проналажења форме крутих система уобичајено се узима у обзир утицај сопственог оптерећења (као доминантан случај), док се моделовање других утицаја ретко користи у ове сврхе. За случај бетонских љуски ово најчешће предсавља приближно реалну ситуацију, међутим у случајевима када су изражени и енвајорментални утицаји (нпр. оптерећење од снега и ветра) или када је утицај одређеног оптерећења доминантан само у једном делу система, експериментално добијен облик може бити неоптималан.

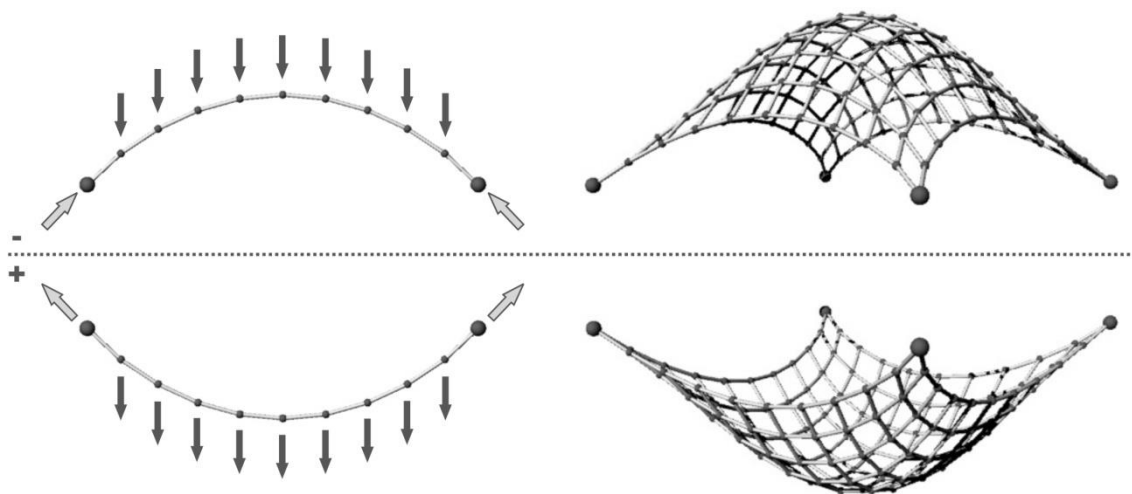
Експерименталне студије механички преднапрегнутих затегнутих мембрана подразумевају увођење сила преднапрезања, а гранични услови морају бити што реалније реплицирани како би се генерисао смисаони равнотежни облик. Површи је могуће генерисати и применом утицаја пнеуматског притиска. Овом техником се не симулира реалан утицај сопственог оптерећења с обзиром да је притисак увек управан на кривину површи модела мембране, док гравитационо оптерећење има вертикални правац. Упркос претходном, применом пнеуматских модела могуће је добити коректне резултате [Вес08]. Такође, утицаје извијања и нелинеарно понашање једино је могуће индиректно укључити у процес проналажења облика, због чега се изражено флексибилни делови и делови подложни великим деформацијама не могу увек одредити оваквим поступцима [Ram04].

Потреба за изузетном прецизношћу, посебно изражена у случају када се скалирањем димензија ових модела добијају подаци који се користе за изградњу реалних конструкција⁸, утицала је да ове технике данас буду замењене рачунарским симулацијама. Ипак експерименти са физичким моделима могу представљати корисан тродиманзионални алат који подржава пројектанте у концептуалној фази и средство комуникације између архитеката и инжењера у колаборативном процесу. Њихово коришћење у овој фази процеса пројектовања не мора да буде у служби дефинисања финалне геометрије већ њене

⁸ Применом различитих технологија мерења, снимања и дигитализације физичких модела, што је детаљније разматрано у [Вес08], могуће је добити податке за CAD моделе, односно моделе који су основа за нумеричку анализу. На овај начин омогућено је даље унапређење форме решења, параметраске студије, линеарна и нелинеарна анализа конструкције, итд.

апроксимације (пропорција, простора, висина и сл.) и евалуације квалитета решења у естатском и просторном смислу. У том случају чак и мања прецизност може бити довољно информативна за креирања модела који ће се даље унапређивати у рачунарском окружењу.

Висећи модели засновани на специфичности понашања ланчаница користе се за пројектовање армирано бетонских љуски од средине XX века. Своју примену налазе у симулацији висећих структура, чији облик настаје као одговор на величину и положај сила које делују на њих. На пример, ланчаница обешена између две тачке услед дејства концентрисане силе у средишњој тачки заузеће "V" облик, док ће под дејством једнакоподељеног оптерећења заузети положај параболе. Док обешена ланчаница представља затегнути елемент, лук добијен њеном инверзијом представља притиснути систем [Nes00]. Постављањем ланчаница у два правца формира се кабловска мрежа која апроксимира површ, а чијом се инверзијом добијају сводови и љуске (слика 2.1.2).



Слика 2.1.2 Дијаграмски приказ лука/ланчанице која заузима положај услед утицаја оптерећење /лево/; исти принцип примењен за случај кабловске мреже /десно/

Код ових система услед дејства сопственог оптерећења не долази до савијања што утиче на ефикаснију искоришћеност материјала и омогућава коришћење танких конструктивних елемената, а често нама потребе ни за преднапрезањем. За израду висећих модела користе се различити поступци - жичане мреже од танких каблова или ланчанице оптерећене калибрисаним теретом, текстилни модели оптерећени гипсом или епоксидним смолама, и сл. Иако ове методе начелно дају добре резултате изузетно су захтевне у погледу рада и времена које је потребно

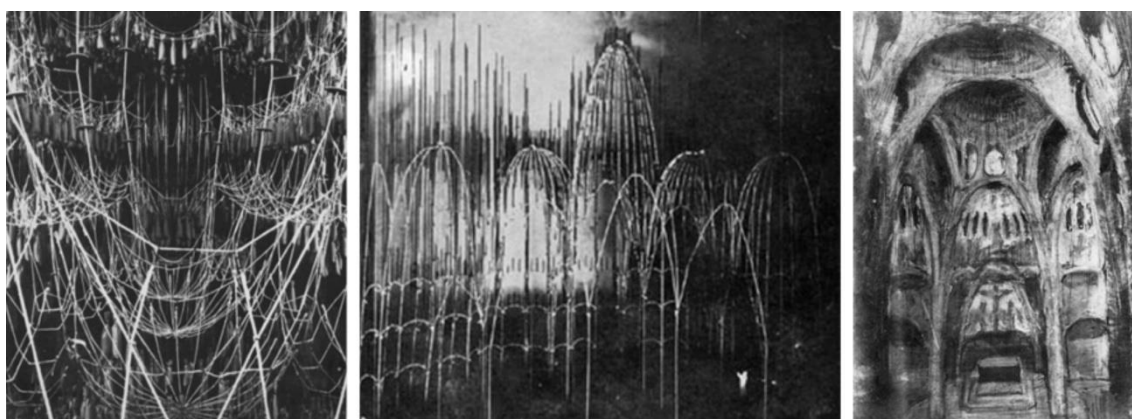
уложити у њихову израду, мерења финално добијених форми, скалирања добијених резултат, њихово прилагођавање специфичним условима и ограничењима материјала, и изградње реалне конструкције.

Жичани модели израђени од танких каблова повезаних у мрежу и оптерећени у чворовима представљају начин апроксимације континуално закривљене површи помоћу полигоналне мреже, односно једнако подељеног сопственог оптерећења помоћу концентрисаних оптерећења постављених на блиским растојањима. Оптерећење генерише промену угла под којим су постављени кабови, док сами кабови на растојању између чворних тачака, имајући у виду њихову занемарљиво малу сопствену тежину, остају прави. Жичани модели могу бити израђени и од мреже ланчаница. У овом случају сопствено оптерећење је рапрезантовано тежином ланчанице која услед гравитационог дејства заузима облик катемптотне криве. Комбинација модела од ланчаница и viseћих кабловских мрежа са концентрисаним оптерећењем у чворовима погодна је за испитивање утицаја сопственог и концентрисаног оптерећења. Једна од техника израде модела је и помоћу кабловске мреже обложене одговарајућим материјалом а потом оптерећене синтетичким смолама. Равнотежни облик се формира док је смола у течном стању, а по њеном очвршћивању модел се окреће како би се приступило мерењима.

Реализација жичаних физичких модела захтева пажљив итеративан приступ. Иницијално је потребно извршити добар одабир топологије повезивања елемената како би било могуће вршити прилагођавање, регулисање и ажурирање мреже. Контролисање и постизање жељеног облика код viseћих модела није једноставно, с обзиром да било која локална промена (укаљање, додавање или промена дужина елемената) има утицаја на глобалну равнотежу система. Такође, приликом сваког померања чворова неопходно је вршити ажурирање оптерећења што утиче на равнотежу и условљава нова померања како би се пронашло ново равнотежно стање. У том смислу, резултујући модел одраз је кумулативних промена које се спроводе током процеса тражења решења. Недостатак технике је и у томе што је вредности сила у штаповима могуће одредити тек на крају, што практично значи да пројектанти током самог процеса немају информације о силама које утичу на добијање одређеног равнотежног облика. Иако претходно наведени недостаци

утичу на ограничену примену жичаних физичких модела, они ипак представљају интерактивни колаборативни алат погодан за процес истраживања релација између форме и сила.

Принцип примене инвертованог висећег ланца у поступку дефинисања идеално напетих форми лукова и сводова познат је још од Хуковог (Hooke) анаграма *riddle of arch* из XVII века [Gra86]. Принцип је у то време реализован применом доступних материјала. А од тада применило га је неколико истакнутих конструктора за реализацију својих замисли - Рен (Wren) за катедралу Св. Павла у Лондону, Полени (Poleni) за модел рехабилитације катедрале Св. Петра у Риму, Рондле (Rondelet) за куполу француског Пантеона у Паризу, као и Хубш (Hübsch) у својим радовима [Tom89]. Свакако најпознатији примери су жичани модели које је Гауди користио за реализацију својих смелих градитељских остварења. Продукција архитектонских објеката слободних форми последњих година реактуелизовала је резматрања Гаудијевог рада у контексту конструктивних и формалних аспеката пројектних решења добијених корз процес проналажење форме, као рационалном алтернативом аконтекстуалног геометријског вајања применом дигиталних технологија. Овом техником реализован је у периоду између 1898. и 1890. године тродимензионални висећи модел за крипту Колонија Гуељ (*Colònia Güell*) у Барселони (слика 2.1.3) [Tom89].

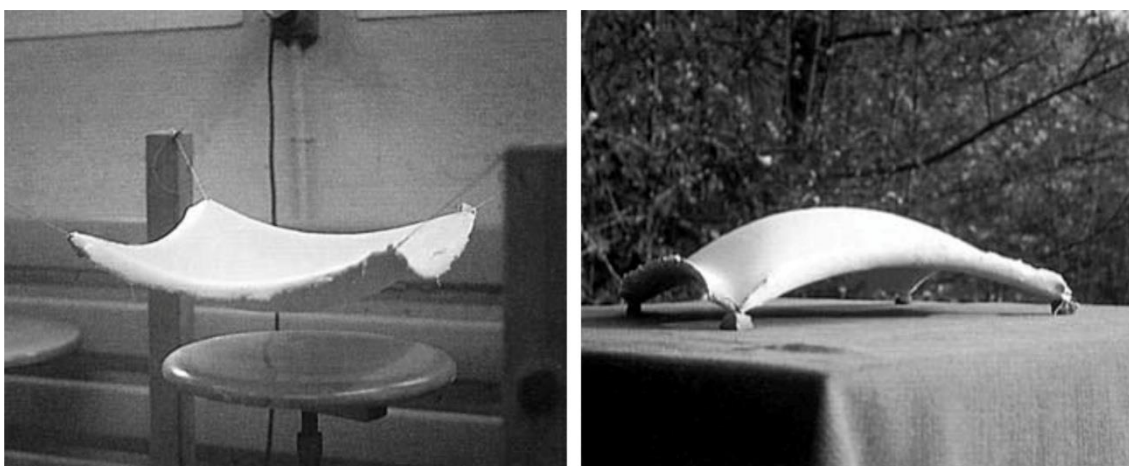


Слика 2.1.3 Колонија Гуеља, аутор Гауди - формална истраживања применом жичаног модела /лево и у средини/; фотографија модела са насликаним приказом ентеријера пример потраге за алтернативним медијумом репрезентације /десно/ [Tom89]

Гаудијева Саграда Фамилија (*Sagrada Família*) у Барселони, представља можда најпознатији објекат чија је форма резултат примене тахнике проналажења форме. Модел овог објекта реализован је слагањем делова од гипса, с обзиром да је

релација између структуре, форме и композиције комплекснија. Употреба различитих техника осликава Гаудијеву отвореност да експериментише, прошири спектар алата, али и да користи специфичне медијуме за репрезентацију различитих пројеката.

Текстилни модели такође представљају технику израде висећих модела чија је сврсисходност за моделовање љуски експериментално потврђена још 1950-тих⁹. Модели се израђују на тај начин што се тканина премазује слојем релативно тешке супстанце попут гипса, цементног малтера или смоле, како би се конструисала структура адекватне крутости. Поступак тражења равнотежне форме, подешавања и адаптације код ових модела спроводи се у фази док материјал премаза не очврсне, а потом се обртањем модела напрегнутог на затезање добија форма која репрезентује љуску у стању притиска. Практична тешкоћа ове технике је потреба да слој премаза буде једнаке дебљине како би се на тај начин симулирало једнакоподељено сопствено оптерећење. Један од најједноставнијих начина је да се премаз наноси док је текстил положен на равну површ, а да се затим постепеним спуштањем инкреметално повећава угиб све до постизања равнотежног стања (слика 2.1.4).



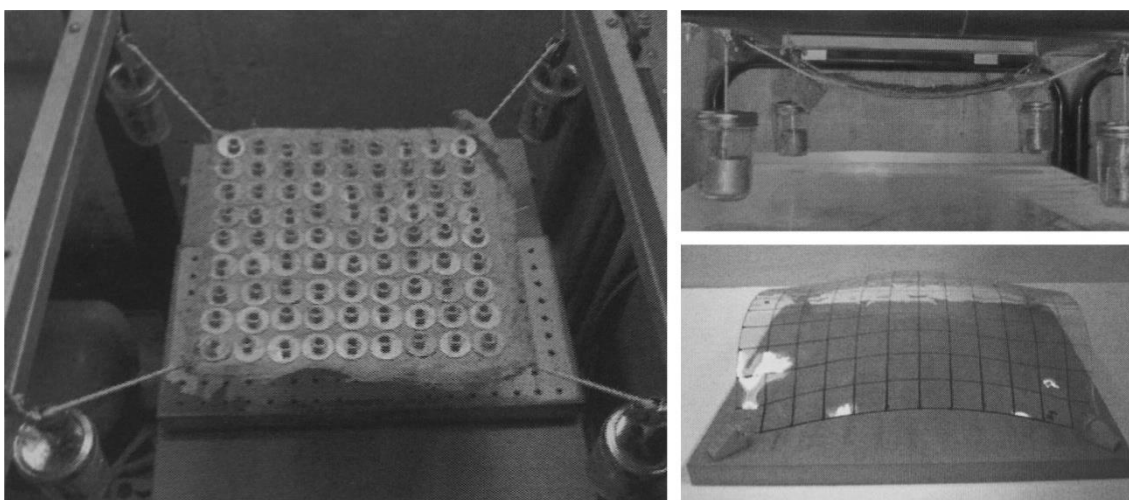
Слика 2.1.4 Истраживања форме применом текстилног модела које је спровео Ислер /лево/; финални изглед модела /десно/ [Bil11]

Тканина може имати ослонце у тачкама, дуге правих или кривих ивица, а могуће је и увођење унутрашњих ослонаца. Овом наизглед једноставном

⁹ У то време је Рамасвами (*Ramaswamy*) направио бетонску љуску распона 14m коришћењем тканине која је под дејством оптерећења од свежег бетона деформисана у равнотежни облик [Ram91]. Након очвршћивања окретањем је добијена љуска која је као префабриковани елемент коришћена за израду кровова. У [Kol90] описано је коришћење идентичног принципа за случај примене армираног бетона.

техником заправо се прилично тешко добијају коректни резултати за шта је уобичајено потребно неколико итерација. Такође, анизотропија текстила као примењеног материјала предствља значајан фактор у процесу моделовања¹⁰. Опширнији приказ ове технике могуће је наћи у [Ram91a].

Модел од термопластичних фолија (слика 2.1.5) јавили су се услед потреба за алтернативним висећим моделима који нуде бољу контролу моделовања дебљине и оптерећења. У овом поступку, равна, крута, термопластична фолија од акрила или ABS-а под утицајима једнакоподељеног оптерећења и температуре обликује се како би заузела закривљени равнотежни положај. Уклањањем топлотног извора након постепеног хлађења деформисана фолија постаје поново крута. Фолија се ослања тако да јој се омогући ротација, а неопходно је обезбедити равномерно загревање с обзиром да се разлике у температури преводе у неравномерно стање напона које се негативно одражава на форму. Проблем ове методе је недостатак тачности чиме је њена примена ограничена на концептуалну фазу.

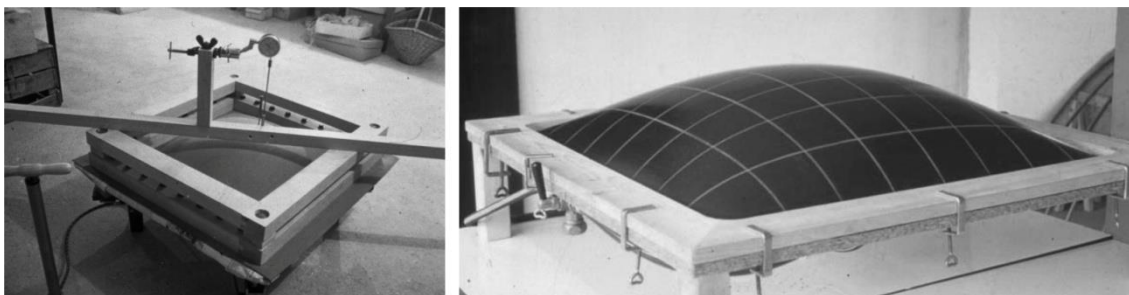


Слика 2.1.5 Истраживања форме применом термопластичне фолије ослоњене у угловима и оптерећена равномерноподељеним оптерећењем које је спровео Ислер /лево и десно горе/; финални изглед модела /десно доле/ [Вес08]

Пнеуматски модели користе се као алтернативна техника у поступцима проналажења форме површинских конструктивних система са континуланим

¹⁰ На пример, потпуно различити резултати се добијају у случају када се користи текстилни материјал са израженим анизотопним понашањем услед различите оријентације ткања (влакана). Пример приказан у [Ram04] демонстрира да за случају правоугаоног модела од текстила оријентација влакана паралелна или дијагонална у односу на правце ивица резултује потпуно различитим облицима.

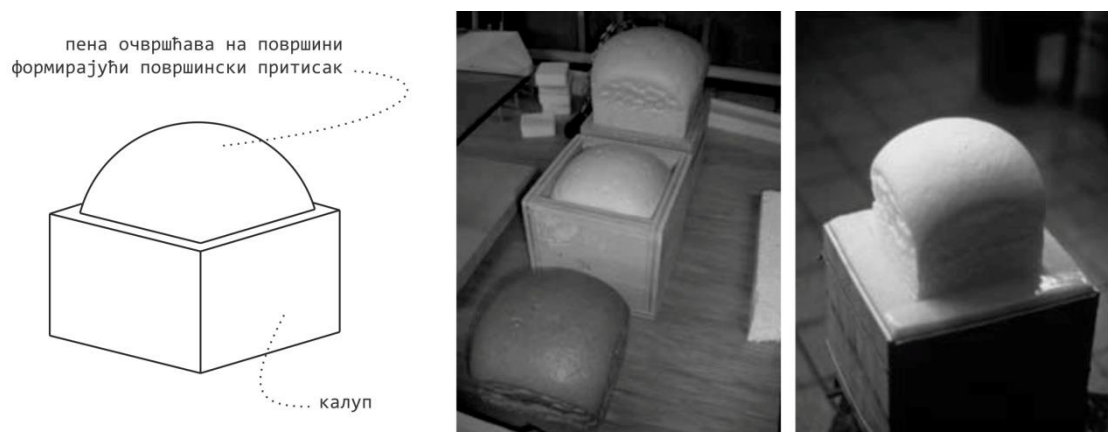
ивичним ослонцима (слика 2.1.6). За реализацију ових модела као материјал користе се ваздухонепропусне еластичне мембране које се постављају у крути контурни рам произвољног облика. Постепеним повећањем притиска долази до надувавања мембране све до тренутка када њене унутрашње силе затезања не дођу у равнотежу са притиском. Виши притисак узрокује већу закривљеност мембране и веће силе затезања. Пошто се постигне жељени облик притисак ваздуха остаје константан и приступа се мерењу модела. Овом методом се најчешће добијају синклстични облици. Често се дешава да при угловима са контуром долази до промене локалне кривине површи у антикластични облик. Ислер је на пример практиковао да врши мануелне корекције како би добио униформну синкластичну геометрију која незнатно одступа од експериментално добијеног равнотежног облика [Вес08].



Слика 2.1.6 Истраживања форме применом пнеуматског модела које је спровео Ислер - пнеуматска мембрана у огледном раму /лево/; пнеуматична форма /десно/ [Ram11]

Коришћење термопластичних фолија уместо еластичних мембрана за израду модел напрегнутих притиском представља другу могућност, коју су тестирали Ото и Раш (Rasch). Овај метод је погодан за случај контура неправилног облика. Процес подразумева загревање PVC или акрилне фолије фиксиране између две плоче иверице које представљају граничне ослонце и могу бити неправилног облика. Када фолија услед загревања омекша врши се њено надувавање ваздухом све до постизања жељеног облика, након чега се извори топлоте и притиска уклањају а фолија се оставља да се охлади и очврсне. Као и у претходним случевима и овде постоји могућност увођења каблова којим би се извршило сегментирање површи. Нема примера реализованих објаката на основу оваквих експеримената, тако да овај метод пронележења фроне још увек оставља могућности за истраживања и откривање иновативних структуралних фроне.

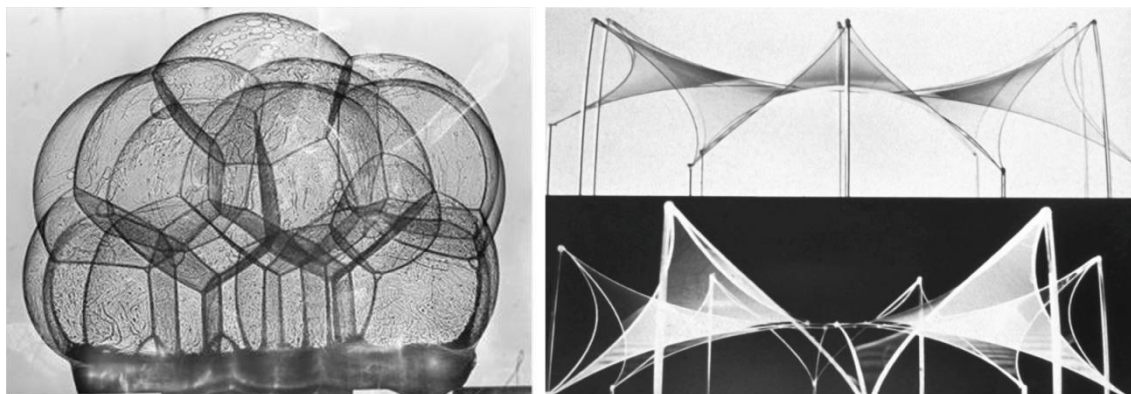
Модели добијени поступком екструдирања резултат су обсервација понашања полиуретанске пене, тачније начина њене екструзије кроз отворе. Како се пена шири кроз отвор калупа који описује геометрију основе објекта њена површина очвршћава брже у односу на пену у унутрашњем делу калупа. Ова делимично стврднута пена ограничава експанзију пене у унутрашњем делу калупа чиме се генерише површински притисак. Ефекат је сличан оном код пнеуматских мембрана с том разликом што у овом случају притисак настаје услед експандирања пене. Резултујуће форме уобичајено су синкластичне (слика 2.1.7).



Слика 2.1.7 Истраживање форме применом модела екстудиране полиуретанске пене које је спровео Ислер - концепт /лево/; изглед калупа и модела, експеримент Ислера /десно/ [Ram11]

Модели од сапунице представљају експерименталну методу за проналажење форме мембрана (слика 2.1.8). У физичком смислу филм сапунице представља систем минималне енергије који природно тежи да минимизира површ која се формира између произвољно постављених затворених граничних кривих. Ове површи са хомогеним мембранским стањем напона могуће је образovati између линерних или закривљених крутих ивица, ивица и унутрашњих ослонаца као и између ивица које нису круте у случају када се на овај начин симулира конструктивни систем мембрана са ивичним кабловима. Модели од сапунице такође могу бити у форми балона, међутим ови облици не прате законитости минималних површи већ се понашају као мембране напрегнуте притиском, а погодни су за генерисање крутих љуски или пнеуматских система. Природно кратак век трајања ових структура могуће је продужити хемијским адитивима. У том случају процес формирања површи одвија се на вишој температури, а структура добија крутост при хлађењу. Упркос, ови модели увек остају крхки и

кратког века, што представља значајно ограничење њиховог коришћења у процесу пројектовања. Модели од сапунице малих диманзија (оквирно величине до 200mm) веома су тачни из разлога јер је њихова сопствена тежина екстремно мала и практично не може да генерише девијације од геометрије минималне површи. Код модела већих димензија јављају се значајнија одступања због чега се углавном користе за визуелизацију структура [Вес08].



Слика 2.1.8 Експерименти са моделима од сапунице на Институту за лаке структуре (IL) у Штудгарту спровођени под руководством Ота - модел у форми балона /лево/ модел образован између закривљених ивица /десно/ [ILE06]

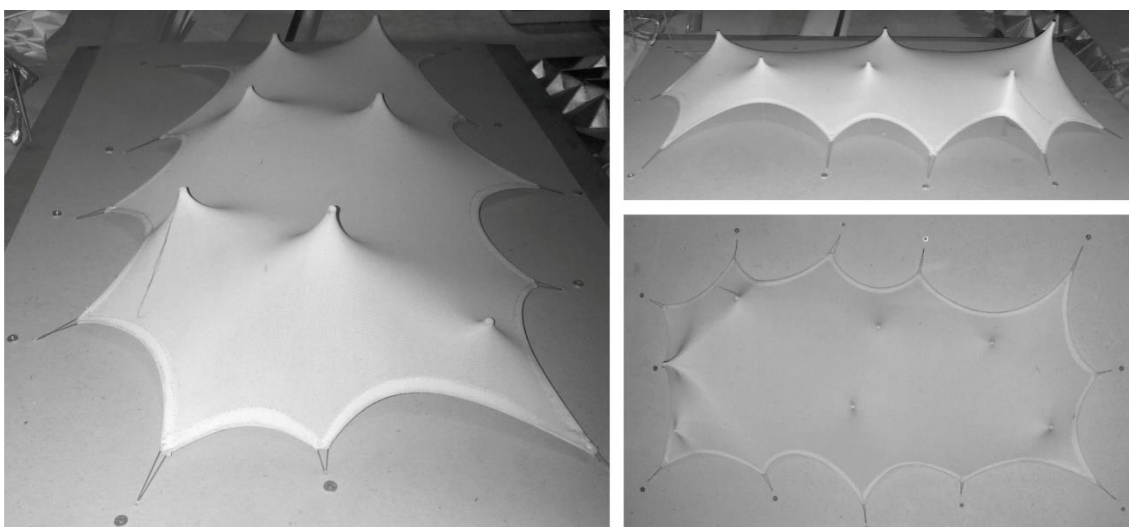
Као геометрију површинског конструктивних система није могуће користити сваки облик минималних површи добијен овим експериментима¹¹. Стога је при изради модела важно познавање основних принципа затегнутих површинских система. У случају механички преднапрегнутих површи потребно је обезбедити довољну константну антикалстичну кривину како би површ могла да прихвати поред сопственог оптерећења и преднапрезања и друга оптерећења. Уобичајене методе за повећање закривљености површи код ових модела симулирају оне коришћене у реалности - увођење каблова, унутрашњих ослонаца којима се подиже или спушта површ, крутих лукова као ослонаца итд.

Модели од растегљивих текстила (слика 2.1.9) су по особинама слични моделима од сапуница с том разликом што је овом техником могуће реализовати трајније моделе већих диманзија, код којих је могуће увести већи степен преднапрезања, што их чини практичнијом алтернативом. Равномерним

¹¹На пример раван филм сапунице формиран између две праве ивице не може се класификовати као структурална површ иако је минимална за дате граничне услове [Вес08].

Такође, многи изграђени мембрански системи не представљају минималне површи у математичком смислу из разлога јер не обезбеђују хомогена напрезања. Примена математички минималних површи, осим теоријске важности у пракси нема реалне предности [Вес08].

растежањем тканине могуће је добити облике блиске минималним површима, међутим анизотропија материјала утиче на варирање крутости у зависности од орјентације ткања што резултује одступањима у односу на математички облик. Ове девијације уобичајено нису од значаја у концептуалној фази моделских истраживања. У даљим фазама процеса пројектовања ова истраживања употпуњују се рачунарским методама које омогућавају реалистичније симулације минималних површи, варијације крутости система и преднапрезања. Једноставност израде ових физичких модела чини методу погодним медијумом који омогућава непосредно разумевање процеса обликовања мембрана.



Слика 2.1.9 Истраживања форме преднапрегнутих мембранских система применом модела од растегливог текстила - рад студената Архитектонског факултета Универзитета у Београду

Коришћење такстилних модела дуго је компензовало недостатак аналитичких алата за пројектовање мембранских конструкција. Неке од најранијих математичких истраживања везаних за алгоритме проналажења форми спровели су истраживачи из Отовог окружења на ИЛ [Вес08]. Линквиц (Linkwitz) је на ИЛ 1966. године креирао први дигитални модел најављујући на тај начин нову еру рачунарског проналажења форме (*computational form-finding*) [Ser06]. Међутим ови програми су остали високо специјализовани, а имплементација прецизних метода попут ФЕА учинила их је исувише захтевним у рачунарском смислу за фазу концептуализације. Последњих година развијен је одређени број бржих и приступачнији компјутерских алата који далеко боље одговарају потребама архитектонског пројектовања.

2.1.1.2 Дигиталне технике

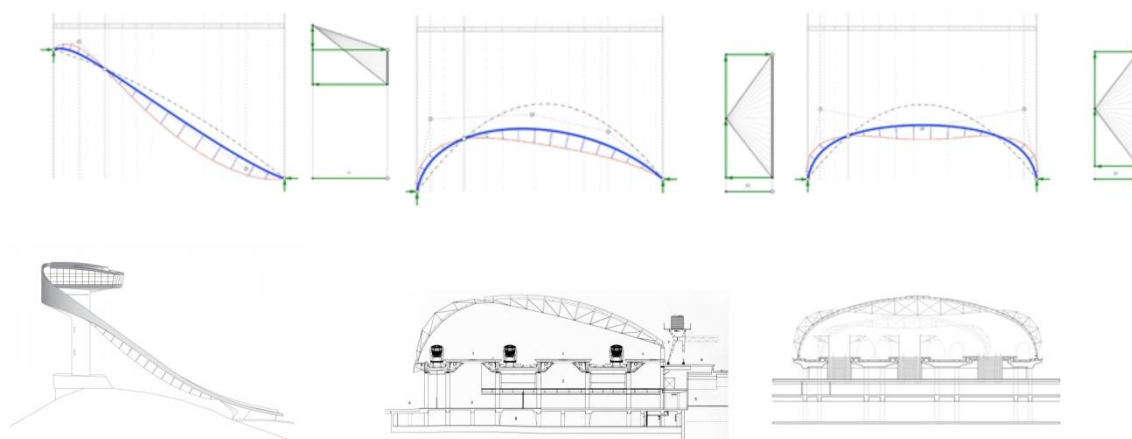
Замена физичких модела као јединих концептуалних и аналитичких алата за проналажење форме догодила се захваљујући значајном развоју CAD и CAE виртуалних техника моделовања које су омогућиле софистицираније и прецизније анализе. Методе рачунарског проналажења форме (*computational form-finding*) обухватају нумеричке процедуре којима се симулирају перформансе система. Овим методама заправо се симулира понашање физичких модела за тражење форме, због чега представљају нумеричку верификацију физичких експеримената. Релативна једноставност генерисања површинских система њиховом применом не искључује потребу за добрим познавањем ове области, с обзиром да је то предуслов да се избегну евентуалне грешке и усвајање наизглед тачних решења. Такође, коришћење ових техника захтев познавање математичких алгоритама и процедура у њиховој основи.

Дигиталне симулације омогућавају ефикасна, флексибилна истраживања, често на интерактивним основама. Њихова предност је у далеко једноставнијој манипулацији моделима, варијацији параметара (материјала, случајева оптерећења који имају доминантан утицај на облик, граничних услова, итд.), а резултати се могу непосредно користити за структуралну анализу, као и за процесе дигиталне производње. Од 1960-тих до данас развијен је већи број метода. Методе из ранијег периода уобичајено су примењиване на дискретне док су новије методе проширене на површинске системе. Несумњива предност примене ових технологија и трансформација од уско специјализованог до приступачнијег ресурса архитектонског обликовања привукла је интересовање пројектаната. Ово разматрање фокусирано је на процедуре и алате који су погодни за коришћење у фази концепције архитектонских објеката.

Методе рачунарске симулације засноване на концепту графостатике обухватају имплементације различитих алгоритама развијених на том основу. Ови алати омогућавају интерактивне конструкције и модификације геометријских ограничења која симултано контролишу приказе структуралне форме и њене статичке равнотеже у потпуности на графички начин. У односу на ручне методе

цртања, ове методе омогућавају далеко боља истраживања релација између форме и сила, различитих сценарија за дато оптерећење или варијације почетних услова.

Један од алата заснованих на графостатици ограничен на решавање дводимензионалних проблема је програма *Active Statics* који представља скуп интерактивних демонстрација [Gre03]. У мого чему ограничен али инструктиван, овај програм своју примену претежно проналази у едукацији (нпр. у настави на МИТ, Кембриџ, Масачусетс). Сличан циљ има и *eQUILIBIRUM*, пројекат који спроводи *BLOCK Research Group* на ЕТН, Цирих [Blo12]. Динамичко окружење омогућава учење кроз интерактивне цртеже који су креирани помоћу апликације *GeoGebra*¹² [Geo15]. Апликација омогућава конструисање структура применом геометријских техника које се користе у мануелним поступцима цртања без познавања програмирања (слика 2.1.10). Један од новијих приступа је графостатика заснована на ограничењима (*constraint-based graphic statics*), приказан у [Fiv13]. Ово окружење отвара могућност за интерактивну, независну, симултану контролу параметара пројектовања равнотежних структура (геометрије, унутрашњих сила, граничних услова, отпорности материјала), и има потенцијала да се унапреди за решавање тродимензионалних проблема.



Слика 2.1.10 Студије случаја објеката слободних форми генерисаних принципом графостатике у програму *eQUILIBIRUM*: решетка *Waterloo Station*, Лондон, 1994. пројектанти архитектуре: Гримшо архитекти (*Grimshaw Architects*), конструкције: Хант (Hunt) /лево/; решетка *Hauptbahnhof*, Берлин, 2006. пројектанти архитектуре: Геркан, Марг и партнери (*Gerkan, Marg and Partners*), конструкције: Азер (*Azer*) /средина/; скакаоница *Bergisel*, 2002. пројекатнт Хадид (*Hadid*) /десно/ [Blo12]

¹²*GeoGebra* је рачунарска апликација заснована на интерактивној геометрији и алгебри намењена едукацији. Софтвер је намењен конструисању динамичке геометрије, помоћу тачака, вектора, сегмената, линија, полигона, функција итд. Већина делова *GeoGebra* је бесплатан софтвер написан у објектно-орјентисаном програмском језику *Java*, и доступан за многе платформе. Пројекат је започео Хохенвартер (Hohenvarter) 2001. године на Универзитету у Салцбургу, програм се развија помоћу *open-source* програмера са целе планете.

Thrust Network Analysis - TNA је метода за генерисање аксијално напрегнутих мрежа, предложена у [Blo09]. Ова метода користи принципе графостатике и омогућава њихову одрживу екстензију на тродимензионалне проблеме. TNA методом проналази се равнотежна конфигурација мреже генерисане унутар дефинисане контуре услед гравитационог оптерећења коришћењем принципа нацртне геометрије, теорије дуалности и линеарне оптимизације. Ова интуитивна графичка метода развијена је с циљем да нађе примену у анализи зиданих сводова из прошлости као и у пројектовању нових структура. Конципирана је тако да омогућава висок ниво контроле свих степени слободе тродиманзионалног система што имплицира флексибилну, контролисану манипулацију облика у процесу формалних истраживања и проналажење нових равнотежних форми.

TNA метода користи два фундаментална елемента графостатике: дијаграм форме (Γ) и дијаграм сила (Γ^*). За описивање равнотеже у равни неоптерећених затегнутих површи, репрезентованих дискретизованом мрежом, искоришћен је поступак реципрочних фигура (*reciprocal figures*) [Wil86]. Овим поступком просторно равнотежно стање тражи се пресликавањем реципрочних фигура на две реципрочне површи и њиховим преднапрезањем у сопственој равни. Односно, за дефинисану контуру генерише се дијаграм форме, а затим његов дуал - дијаграм сила који репрезентује хоризонталне компоненте силе и начин на који су пропорционално дистрибуиране у систему. По постизању хоризонталне равнотеже, на основу конфигурације оба дводиманзионална дијаграма, прорачунава се вертикална равнотежа. Резултат овог процеса је просторна аксијално напрегнута мрежа (G) која репрезентује форму структуре напрегнуте на притисак.

Процес истраживања могућих равнотежних решења спроводи се варирањем следећих параметара: одабиром топологије иницијалне мреже (Γ) која представља хоризонталну пројекцију финалне равнотежне мреже (G); граничних услова; дистрибуцијом сила у систему, визуализовану дуалном мрежом (Γ^*); простора решења који је дефинисан горњим и доњим границама висине чворова, контуром ослоначких ивица и укупне висине решења. Манипулација параметара омогућава генерисање и модификацију пројектних решења чинећи овај интерактивни алат који интегрише дизајн и анализу флексибилним за структурално информисана архитектонска истраживања, што је приказано у [Mil14b].

Пример 1

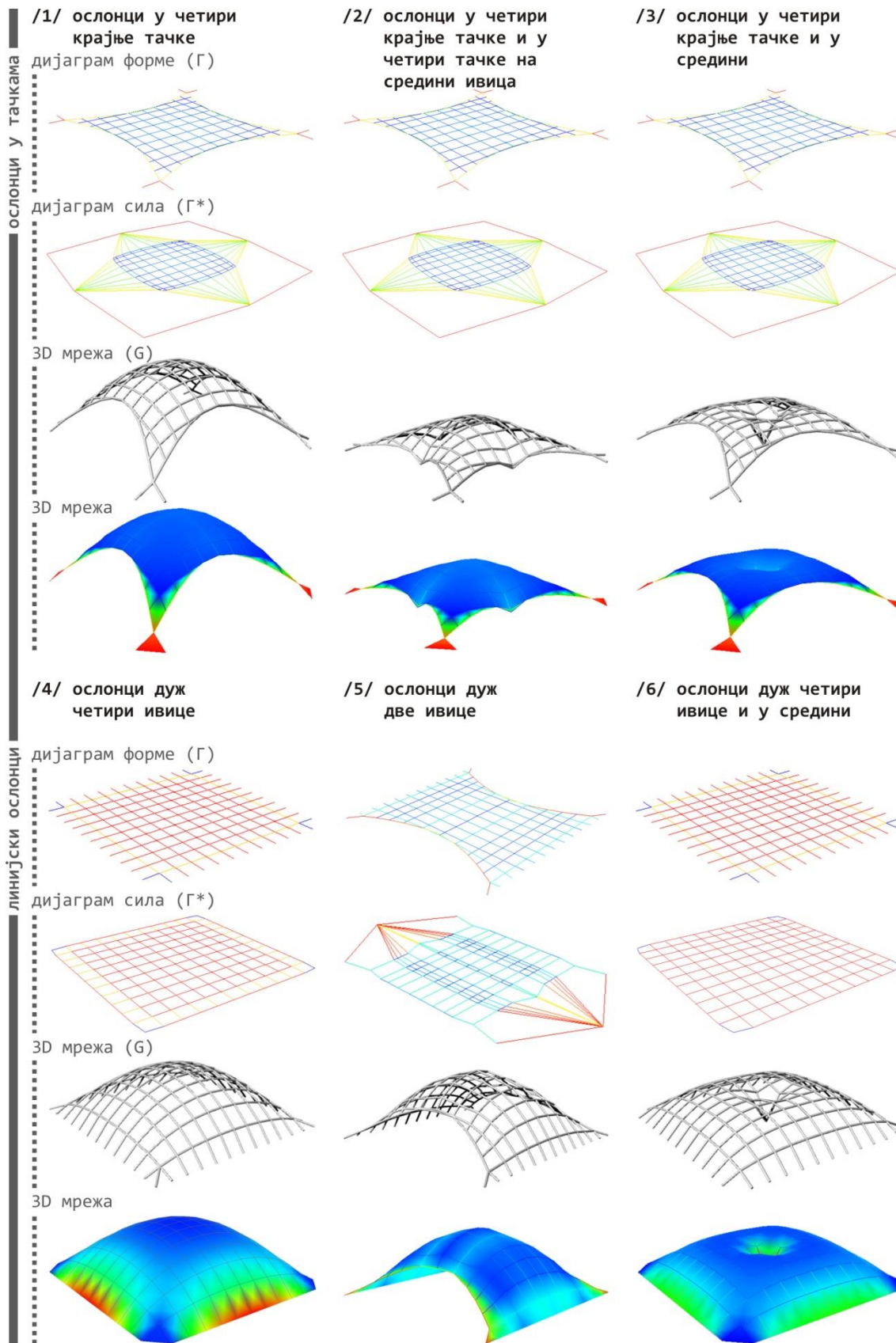
Пример приказује примену *Thrust Network Analysis* - TNA методе у процесу генерисања површинских конструктивних система. Задатак је био тестирање утицаја граничних услова на форму конструктивног система. У том смислу, у процесу тражења равнотежних форми за структуру истог облика и димензија основе примењени су различити гранични услови - начини ослањања система. Варирање овог параметра резултовало је различитим формалним решењима.

Предмет дигиталног експеримента су мреже правоугаоне основе димензија $10 \times 10\text{m}$. Дигитални модели су били основа за евакуацију форми. Истраживањем су разматране следеће варијанте ослањања система: /1/ ослонци у четири крајње тачке, /2/ ослонци у четири крајње тачке и четири тачке на средини распона, /3/ ослонци у четири крајње тачке и средишњи ослонац, /3/ ослонци дуж четири контурне ивице, /4/ ослонци дуж две контурне ивице, /6/ ослонци дуж четири контурне ивице и средишњи ослонац. Резултати истраживања приказани су на слици 2.1.11.

На основу задатог облика основе, први корак је генерисање почетне конфигурације, равне мреже - иницијалног дијаграма форме (Γ). На основу иницијалног дијаграма форме у следећем кораку генерише се дуални дијаграм - дијаграм сила (Γ^*). Затим се тражи хоризонтална равнотежа за задату вредност сила од 1000KN. По постизању хоризонталне равнотеже, дијаграм форме заправо представља хоризонталну пројекцију финалне мреже, а дијаграм сила визуализацију дистрибуције хоризонталних сила у систему. У следећем кораку тражи се облик вертикалне равнотеже - аксијално напрегнута просторна структура (G) генерисана на основу задатог фактора скалирања висине, у овом случају 5.

Истраживање је спроведено применом *RhinoVAULT*, програмског модула за *Rhinoceros®* развијеног 2012. године на ETH у Цириху [Rip12], који представља интерактивни алат за пројектовање површинских конструктивних система.

Закључак је да услед повезаности равнотежне форме система са граничним условима, варирањем услова ослањања могуће је усмерити процес пројектовања ка жељеним резултатима.



Слика 2.1.11 Резултати генерисање форме применом TNA - *RhinoVault* програмског модула

Методе рачунарског проналажења форме засноване на нумерици. Тенутно у литератури не постоји свеобухватна систематизација, класификација и компарација нумеричких метода тражења форме, из разлога коришћења различите номенклатуре, нотације, математичке формулације, али и због врло активних истраживања у области. Међутим, према [Vee12] могуће је разликовати три главне фамилије метода рачунарског проналажења форме: методе геометријске крутости, методе динамичке равнотеже и методе матрице крутости.

Методе геометријске крутости (*Geometric stiffness methods*) су независне од материјала, у њима фигурише само геометријска крутост, нпр. густина сила. С обзиром да се примењују у линеарној форми добијена решења могу се користити као прелиминарни резултати. Увођење додатних итерација, нпр. у случају оптерећења које зависи од облика (*shape dependant loading*), води у нелинеарни третман. Њихов недостатак је у томе да добијени резултати зависе од густине мреже и анизотропије. Такође, величине као што су геометријска крутост или густина силе немају реално значење и интуитивне су, због чега је тешко предвидети резултат. Новије методе управо из тог разлога користе стратегије које су засноване на претходном додељивању вредности сила а не густина сила.

Методе динамичке равнотеже (*Dynamic equilibrium methods*) користе приступ у коме се проблем динамичке равнотеже заправо своди на решење проблем статичке равнотеже, тј. добијено решење еквивалентно је облику статичке равнотеже. Недостатак ових метода је захтев за узимањем у обзир већег броја параметара, као што је нпр. временски корак (*time step*), како би се контролисала стабилност и конвергенција. Такође, параметри масе и пригушења су фиктивни и немају физичку репрезентацију.

Методе матрице крутости (*Stiffness matrix methods*)¹³ засноване су на коришћењу матрица еластичности и крутости. Ове методе спадају у најстарије и најраспрострањеније у анализи конструкција. Међутим, ове методе укључују параметре материјала што успорава прорачун и узрокује тешкоће у смислу контроле решења (стабилности) и конвергенције.

¹³ Око ове фамилије метода нема консензуса, обухватају читав спектар метода: *non-linear network computation* [Sch74], *computer erecting* [Lin76], *Newton-Raphson iteration* [Bar77], *non-linear displacement analysis* [Hab82], *transient stiffness* [Lew03]. Све ове методе као референце имају публикације Хауга (Haug) и сарадника, из периода 1970-1972. године, и Аргириса (Argyris), Ангелопулоса (Angelopoulos) и сарадника, из периода 1970-1974. године.

*Метода густине силе (Force Density Method - FDM)*¹⁴ користи се за проналажење равнотежног стања мрежа које представљају системе састављене од линеарних елемената - штапова повезаних зглобним везама у чворовима. Метода је развијена за одређивање равнотежних форми кабловских мрежа и преднапрегнутих мембрана¹⁵, а могуће је користити и за симулације висећих жичаних модела. С обзиром да су штапови система прави резултујућа геометрија заправо представља апроксимацију закривљеног облика површи реалног система. Овом методом равнотежно стање ма које мреже штапова проналази се на основу равнотеже сила у сваком чвору. Штаповима се додељује крутост која, за случај мембрана представља еквивалент крутости текстилне траке ширине једнаке растојању између штапова.

На почетку процеса тражења равнотежног облика претпоставља се недеформисана мрежа и дефинишу гранични услови који подразумевају ослободне и силу преднапрезања. Како би се извршила линеаризација једначина равнотеже, овом методом уведена је величина названа *густина силе (force density)* дефинисана као количник аксијалне силе у штапу и дужине штапа. Ова комбинована величина описује оба кључна фактора за тражење равнотежног облика - силу и геометрију. Пошто се претпостави први скуп иницијалних вредности густине сила, линеаризовани систем једначина које описују слободне чворове (*free nodes*) могуће је решити коришћењем методе ретких матрица.

Услед дејства оптерећења сваки штап система се издужује, а комбинација издужења свих штапова води промени геометрије целе мреже. Дужина и оријентација сваког од штапова система мењају се све до постизања равнотеже сила у свим чворовима. Дакле, у овом уобичајено итеративном процесу, равнотежни облик предстаља непознату, а вредности густина силе, гранични услови и оптерећење представљају варијабле чијим се подешавањем добија жељени облик. Промена дужина штапова имплицира ревизију вредности аксијалне силе, што практично значи да се и геометрија и вредности сила у штаповима добијају у процесу проналажења форме.

¹⁴ FDM су формулисали Линквиз (*Linkwitz*) и Шек (*Schek*) 1971. године.

¹⁵ FDM се данас претежно користи за пројектовање мембрана.

Задавање иницијалне вредности за густине сила у штаповима еквивалентно је уношењу силе преднапрезања у систем. Уколико се задају константне вредности густина силе, мрежа у оквирима дефинисаних граница образује облик минималне површи, а концентрације напона су могуће само у угловима и на ивицама. Међутим, релација између избора вредности густине силе и тродимензионалног равнотежног решења није једноставна, а подаци о томе на који начин извршити дистрибуцију сила да би се добио жељени тродимензионални облик не постоји, као што не постоје ни опције које ограничавају решање на претходно дефинисани простор решења [Вес08].

Развијен је један број концептуално сличних метода [Gru00], као што су Метода претпостављене геометријске крутости (*Assumed Geometric Stiffness Method* - GSM) [Hab82], Стратегија ажурирања референце (*Updated Reference Strategy* - URS) [Ble99], Вишефазна метода густине сила (*Multi-step Force Density Method* - MFDM) [Sán07], Природна метода густине сила (*Natural Force Density Method* - NFDM) [Pau08]. Принципијално слична метода је и Густина напрезања површи (*Surface Stress Density Method*) [Mau98]. У овој методи систем је апроксимиран мрежом троугаоних површинских елемената. Пандан концепту густине сила који се користи у овом поступку је величина названа *густина напрезања површи* (*Surface Stress Density*). Она представља коефицијент који изражава однос између хомогеног напона и површине елемента. Овом методом омогућено је увођење дајства гравитационих оптерећења, а инвертовање равнотежног облика добијеног услед дејства сопствене тежине, омогућава генерисање крутог континуалног система који симулира бетонску љуску.

Одређени број доступних компјутерских алата за проналежње форме затегнутих мембрана развијен је на основу ових метод, претежно за потребе инжењера и специјализованих инжењерских фирми. Пример су комерцијалне апликације *EASY* и *CADISI* (иницијално развијене за *Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen* на Универзитету у Штудгарту које је комерцијализовао и дистрибуира *technet GmbH*) [Tec12], *MPanel* (*Lightweight Structures Association*) [MPa14]. С друге стране, апликације попут *Formfinder* (*Robert Wehdorn-Roithmayr*) [Roi14] и *RhinoMembrane* [IxR14] модула за *Rhinoceros®* [Rob15] и сл. приступачније су за коришћење у области архитектонског пројектовања.

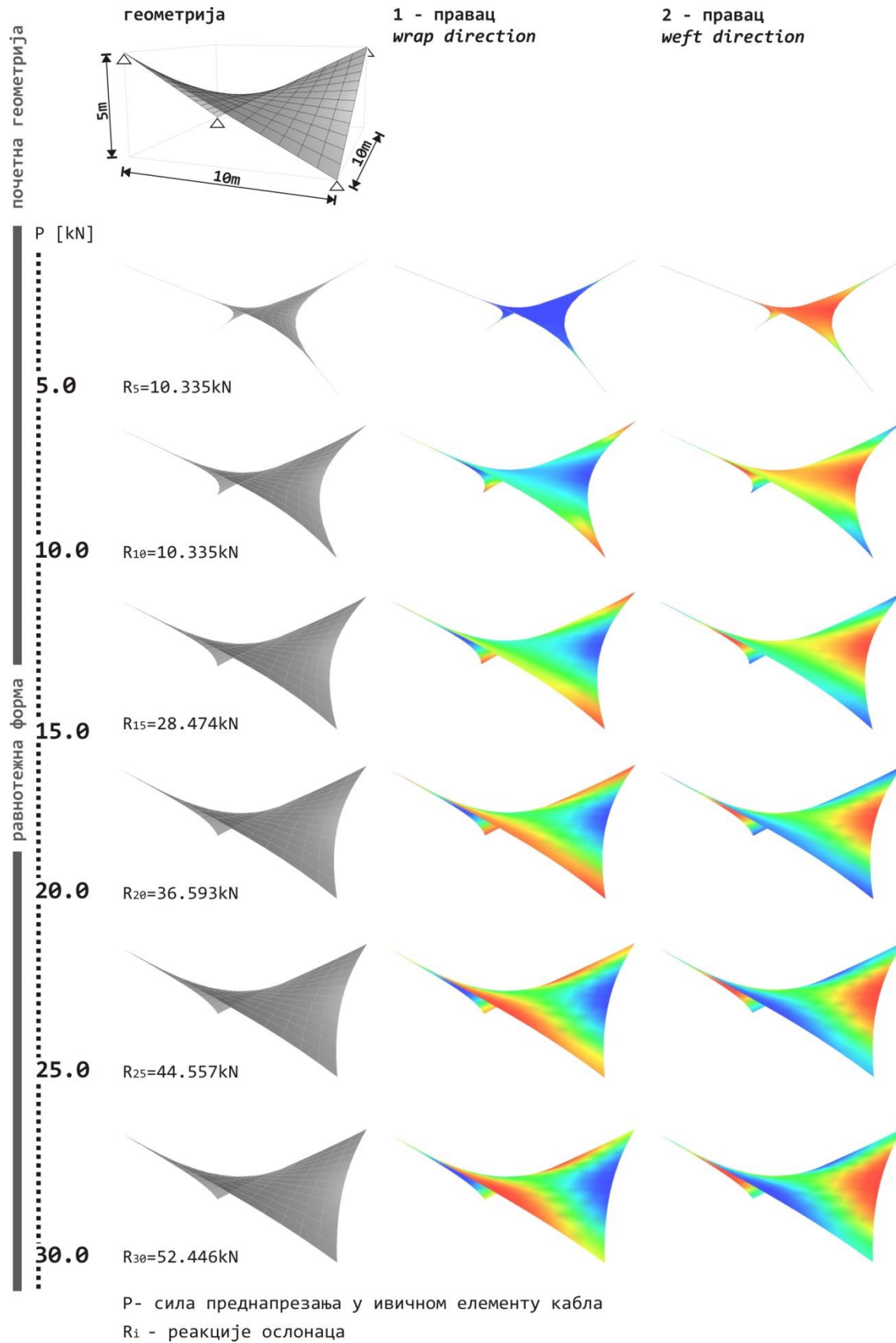
Пример 2

Пример приказује примену *Updated Reference Strategy* - URS методе која представља генерализацију методе густине сила, а коју је развио проф. Блещингер са ТУ Минхен (TU München), Немачка. Начелно ову методу могуће је применити за генерисање дисконтинуалних и континуалних површинских система, односно кабловских мрежа и мембрана. Задатак је био тестирање утицаја вредности силе преднапрезања у ивичном елементу кабла на форму мембране. У том смислу, у процесу тражења равнотежних форми за структуру истог облика и димензија основе, висине и преднапрезања мембране, вариран је параметар сила преднапрезања ивичног кабла, што је резултовало различитим формалним решењима.

Предмет дигиталног експеримента су затегнуте мреже правоугаоне основе димензија $10 \times 10\text{m}$, висине 5m . Иницијална мрежа је генерисана полазећи од NURBS површи облика хиперболичког параболоида. Структура је ослоњена у четири крајње тачке, тј. сперчена су им померања у сва три правца T_x, T_y, T_z . Мрежа је преднапрегнута силом вредности 1kN/m , а вредности сила у ивичним кабловима су вариране. Разматране су следеће вредности сила у ивичним кабловима 5kN/m , 10kN/m , 15kN/m , 20kN/m , 25kN/m , 30kN/m .

Задатак алгоритма био је да за дату топологију мреже мембранске структуре, и дато стање напрезања у елементима структуре (преднапрезања у мембрани и кабловима) пронађе одговарајући равнотежни облик. Тражење форме спроведено је применом *RhinoMembrane*, програмског модула за *Rhinoceros®*, који представља програмску имплементацију URS методе. Резултати су приказани на слици 2.1.12.

Закључак је да је равнотежна форма мембране повезана са силом преднапрезања. Варирањем вредности сила преднапрезања могуће је подешавати форму, односно повећањем силе у каблу смањује се угиб ивичног кабла што утиче на облик целе структуре. Такође мембрана од текстила има различито понашање у два главна ортогонална правца (*warp and weft directions*), тј. ортогонално анизотропно стање напрезања.



Слика 2.1.12 Резултати генерисање форме применом методе густине сила - RhinoMembrane програмског модула

Динамичка релаксација (Dynamic Relaxation - DR) представља нумеричку методу иницијално развијену у циљу рачунарске симулације понашња флуида 1960. године, чија је примена у области архитектуре за висеће системе први пут предложена 1969. године [Day69], а касније унапређена радовима [Bar77], [Top78] и др. И у овој методи површ се апроксимира мрежом - системом штапова повезаних чворовима. Сопствена тежина мреже моделује се као концентрисана маса у чворовима. На почетку процеса формирања мрежа може имати произвољан облик. Под утицајем оптерећења (преднапрезања или спољашњих сила) систем почиње да осцилује. У итеративном поступку којим се симулира псеудо-динамични процес свака наредна итерација заснива се на резултујућој геометрији предходне.

Полазећи од другог Њутновог закона кретања, силу R у i -том чвору у x правцу у тренутку t могуће је изразити као:

$$R_{ix}(t) = M_i A_{ix}(t) \quad (2.1.1)$$

где је M маса, а A убрзање чвора. Релацију између брзине V , геометрије X и силе могуће је добити двоструком нумеричком интеграцијом убрзања:

$$V_{ix}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = V_{ix}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) + \frac{\Delta t}{M_i} R_{ix}(t) \quad (2.1.2)$$

$$X_i(t + \Delta t) = X_i(t) + \Delta t \times V_{ix}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

где је Δt временски интервал између два ажурирања. Коришћењем принципа равнотеже сила релација између силе и геометрије изражава се:

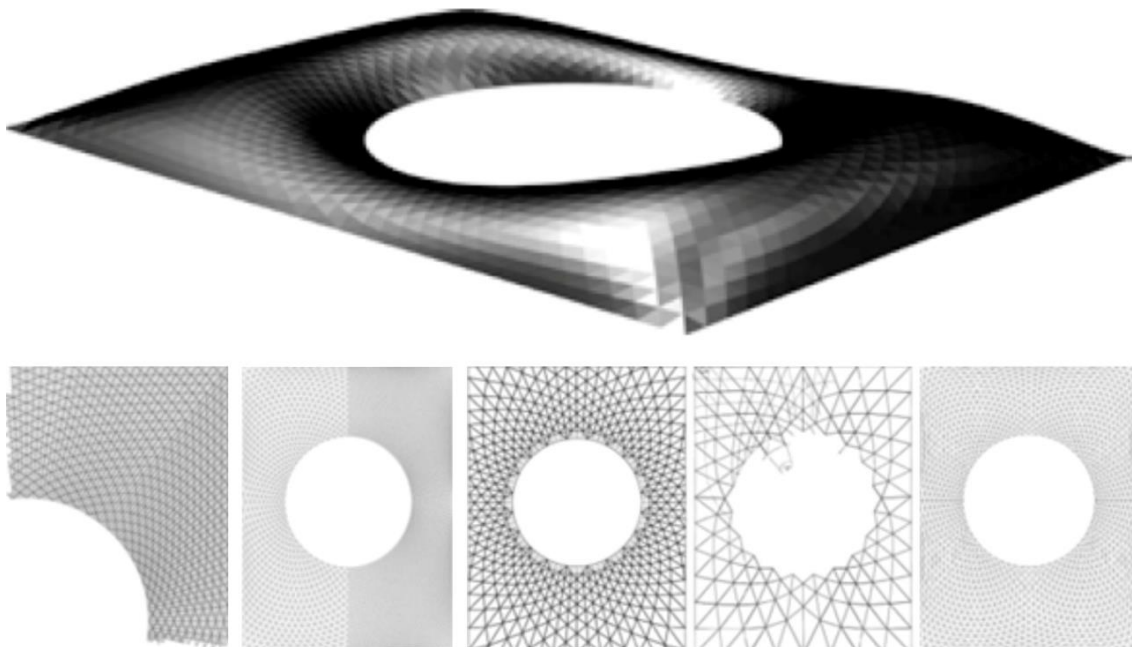
$$R_{ix}(t + \Delta t) = P_{ix}(t + \Delta t) + \sum \frac{T_m(t + \Delta t)}{l_m(t + \Delta t)} \times (X_j(t + \Delta t) - X_i(t + \Delta t)) \quad (2.1.3)$$

где су P компонента оптерећења, T затезање у штапу m између чворова i и j , а l дужина штапа.

Како би се редуковао број итерација у поступку прорачуна користе се две методе пригушења. У првој, методи вискозног пригушења (*viscous damping*) претпоставља се да веза између чворова има компоненте вискозних сила. На овај начин се реалније симулира понашање вискозних особина кабла. У другој, чешће коришћеној, методи кинетичког пригушења (*kinetic-dampening*) координате система се прорачунавају у тренутку када кинетичка енергија достигне максимум (тренутни равнотежни положај чворова), потом се геометрија ажурира, а брзине

се подешавају на нулу, на овај начин амортизују се покрети и омогућава проналажење равнотежног облика мреже. Пригушење кинетичке енергије не представља реалан физички ефекат, међутим овај приступ омогућава значајну редукцију броја итерација потребних како би се дошло до финалног решења.

Техника динамичке релаксације се примарно користи у пројектовању мембранских структура, али је могуће модификовати на начин да се уместо штапова користе гредни елементи, чиме се добија алат који може служити за проналажење форме крутих дискретних или континуланих љуски. Методе динамичке релаксације претежно се користе за унапређења већ дефинисаних облика [Bar99], међутим захваљујући алгоритамској једноставности могу имати широк спектар примене у пројектовању и оптимизацији конструктивних система. Инжењерске фирме попут Бјуро Хаполд (*Buro Happold*) користе и развијају технике динамичке релаксације. Познат пример примене ове методе представља Фостеров (Foster) кров дворишта Британског музеја (слика 2.1.13) који је реализован управо у сарадњи са инжењерима ове фирме, што је детаљније приказано у [Wil14].



Слика 2.1.13 Пример примене динамичке релаксације - кров дворишта Британског музеја, аутор Фостер и партнери (*Foster and Partners*), конструкција Вилијамс (Williams) из фирме Бјуро Хаполд (*Buro Happold*): просторни приказ мреже /горе/; приказ мреже пре и после релаксације /доле лево/; еволуција мрежа /доле десно/ [Wil14]

Систем маса-опруга (mass-spring) или честица-опруга (particle-spring), иницијално развијен за потребе компјутерске графике [Rea07], последњих деценија нашао је примену у моделовању физичких перформација конструктивних система. На овим основама развијен је једна број концептуалних алата за пројектовање који омогућавају експерименте помоћу једноставнијих дигиталних модела. Програми за анимацију већ неко време користе ову технику за креирање визуелно реалистичних приказа физичких ефеката попут одбијања еластичних тела од крутих површи, померања текстилних драперија, косе и сл. Инспирисан симулацијама текстила Гринволд (Greenwold) је написао библиотеку *Particle Spring - PS* која заправо представља вид практичне примене методе динамичке релаксације [Bar99].

Систем чини два елемента: бездимензионалне тачке у простору - честице (*particle*) које су повезане другим елементом система еластичним штаповима - опругама (*spring*). Сваки линијски елемент поседује одређени распон (*rest length*), тј. растојање између два честица које су њиме повезане, као и крутост која му се додељује као фактор пригушења (*dampening factor*). Овом техником могуће је моделовати варијетете физичких утицаја који делују у честицама, од којих се у процесу проналажења форме претежно моделују гравитациони утицаји, али на пример и утицаји притиска ваздуха којима је могуће реплицирати неке од експеримената са пнеуматским моделима.

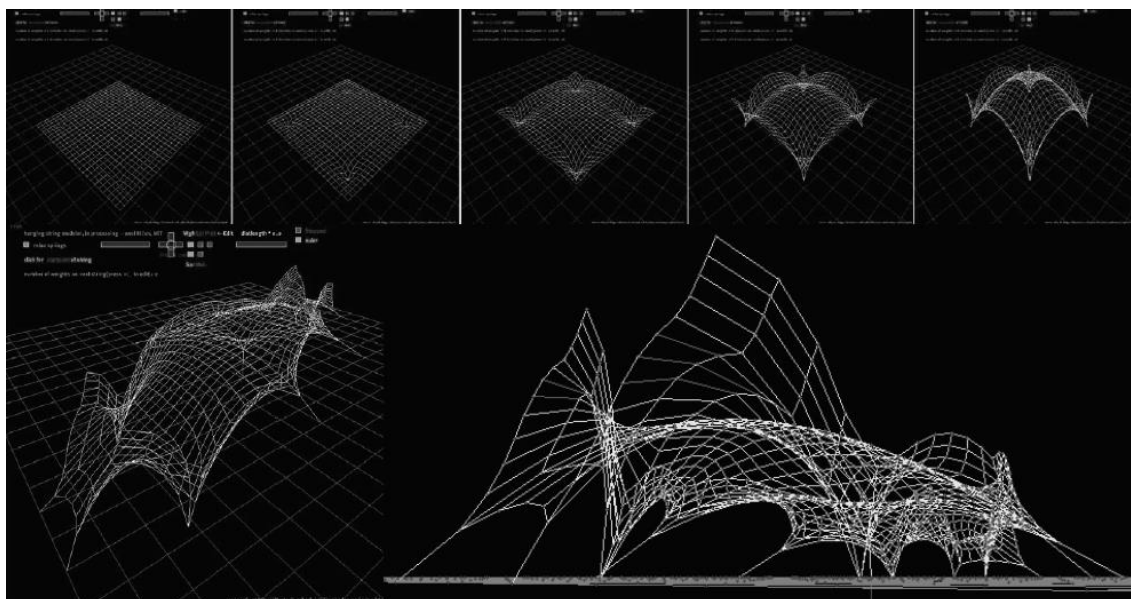
У случају проналажења равнотежне форме површи услед утицаја сопствене тежине, укупна маса система моделује се као концентрисана маса у честицама, ова вредност као и њихов почетни положај у простору (иницијална конфигурација мреже која није у равнотежи) задају се на почетку процеса. Услед дејства сила, честице се померају, а мрежа се деформише и почиње да осцилује. Ова померања могу довести систем брзо у нестабилно стање, због чега је за случај моделовања гравитационих утицаја потребно специфицирати коефицијенте пригушења. По умиривању осцилација добијена форма представља апроксимативни равнотежни облик, уколико он за дати систем постоји.

Начелно деформације линијских елемената могу варирати у зависности од њихове локације, тако да по завршетку процеса тражења равнотежне форме,

мрежа коју су иницијално чинили елементи једнаких дужина постаје мрежа елемената различитих дужина. Штапови у близини ослонаца често имају израженије деформације што је последица тога да су силе које делују у честицама заправо овешане о ослонаце, а може се кориговати локалним повећањем крутости линијских елемената.

Корелација рачунарских симулација са експериментима у којима се користе мреже каблова није потпуна, имајући у виду да код физичких модела дужина штапова остаје константна. Боља корелација може се успоставити између тражења форме применом пнеуматских модела за чију израду се користе растегљиве мембране, с обзиром да се деформишу на сличан начин као и структуре добијене рачунарским симулацијама. Варирање дужине линијских елемената рачунарских модела имплицира да је додељивање идентичних вредности маса у свим тачкама погрешно. Тачније, честице које повезују дуже елементе требало би више оптеретити. С обзиром да се дужина линијских елемената не може антиципирати, свим честицама задају се идентична оптерећења из практичних разлога.

Имплементацијом овог концепта могуће је креирати нова алтернативна окружења орјентисана на концептуално проналажње форме. Пример представља програм *CADenary* креиран на MIT који се развија од 2002. године кроз колаборацију неколико истраживача [Kil06]. Његово окружење омогућава интерактивна, тродимензионална истраживања и динамичне симулације система висећих ланчаница и мрежа (слика 2.1.14). Процес моделовања подразумева прво селекцију почетних тачака у којима је систем фиксиран, програм затим генерише флексибилну геометрију, која се потом пусти да пада како би заузела равнотежни положај, затим је могуће ротирати поглед, односно извршити визуелизацију добијене форме. Корисник има могућност варирања низа параметара који одређују равнотежну форму - место ослонаца, број чворова, број геометријских сегмената, дужину елемената. Због ограничења када су у питању улазни подаци *CADenary* омогућава генерисање само једноставних форми. Постоји простор за даљи развој овог програма у циљу повећања реалистичности симулација, а опција екструдовање попречних пресека представља корак у том правцу.



Слика 2.1.14 Структура добијена коришћењем програма *CADenary*: приказ развоја решења у процесу проналажења форме [Kil06a]

За потребе специфичне праксе, Шелден (Shelden) из *Ghery Technologies* развио је компјутерске модуле засноване на концепту маса-опруга за програмске системе *Rhinoceros*® и *CATIA*® који омогућавају моделовање правоизводних површи [She02]. Карактеристичан скулптурални процес пројектовања фирме Гери и партнери (*Ghery and Partners*), реализује се применом методологије у којој се абстракција форме врши помоћу папира. Иако Геријев приступ, начелно није конструктерски, коришћењем папира као генератора пројектног решења узимају се у обзир ограничења које намеће материјал. Папирним моделима описују се закривљене, најчешће правоизводне површи које се у реализацији објекта материјализују применом металних лимова. Кроз израду макета, врши се провера решења која се потом преводи у дигиталну репрезентацију. Пионири у коришћењу дигиталних технологија у процесу реализације објеката комплексних форми, развојем специјализованих дигиталних алата за моделовање стављају њихове потенцијале у службу пројектовања, омогућавајући флексибилан рад, интеракцију са геометријом, истраживања и анализе особина површи.

Тренутно је доступан одређени број алата заснованих на принципу маса-опруга, од којих неке омогућавају пројектантима већу флексибилност¹⁶. Како би

¹⁶ Потребно је поменути да *Autodesk* ради на развоју комерцијалне алатке *Nucleus* која је доступна као експериментални програмски модул за *Autodesk Revit*, као и за алатку за анализу *Vasari*, од 2011. године [Aut11], што на неко начин предствља врсту признања могућностима маса-ланац система.

се тачније реплицирала геометрија површинских система развијена су окружења која омогућавају да се честицама додели NURBS печ [Ваc08]. Коришћење PS библиотека у оквиру програмског језика *Processing*¹⁷ представља једну од најраспрострањенијих опција. Велики број библиотека (тзв. *third-party libraries*) проширују основне могућности *Processing*-а на најразличитије начине, а једна од бољих која додаје функцију маса-опруга је *traer.physics 3.0* [Tra12]. Потребно је поменути да иако *Processing* представља брзу алатку његово ограничење се огледа у чињеници да је имплементиран у IDE¹⁸ окружење, што практично значи да се интерактивност одвија само у оквиру програмског кода, уколико програмирањем није експлицитно креиран графички интерфејс.

Пример 3

Пример илуструје примену система маса-ланац у процесу генерисања форми површинских конструктивних система. Задатак је био тестирање корелација између форме и топологије мрежа којим се апроксимира површински конструктивни систем. У том смислу у процесу тражења равнотежних форми примењене су мреже различитих топологија. Истраживањем су обухваћене правилне, полу-правилна и неправилна теселације. Начелно, продукција варијантних решења и њихова компарација основа су циљаног избора који је могуће применити у креативном процесу пројектовања.

С обзиром да је моделовање реализовано применом честица-опруга система, први корак био је дефинисање иницијалне конфигурације скупом честица - чворова које су повезане правим штаповима. Затим су одређене тачке у којима је систем ослоњен. Свим чворовима додељена су једнака оптерећења. У процесу тражења форме коришћене су мреже идентичних правоугаоних основа димензија $20 \times 20m$, ослоњене у четири крајње тачке, и оптерећене сопственим оптерећењем. Након дефинисања свих параметра модела, програм генерише флексибилну геометрију, која се деформисала како би заузела равнотежни положај. На тај начин је добијена резултујућа форма представља шематски приказ реалне конструкције.

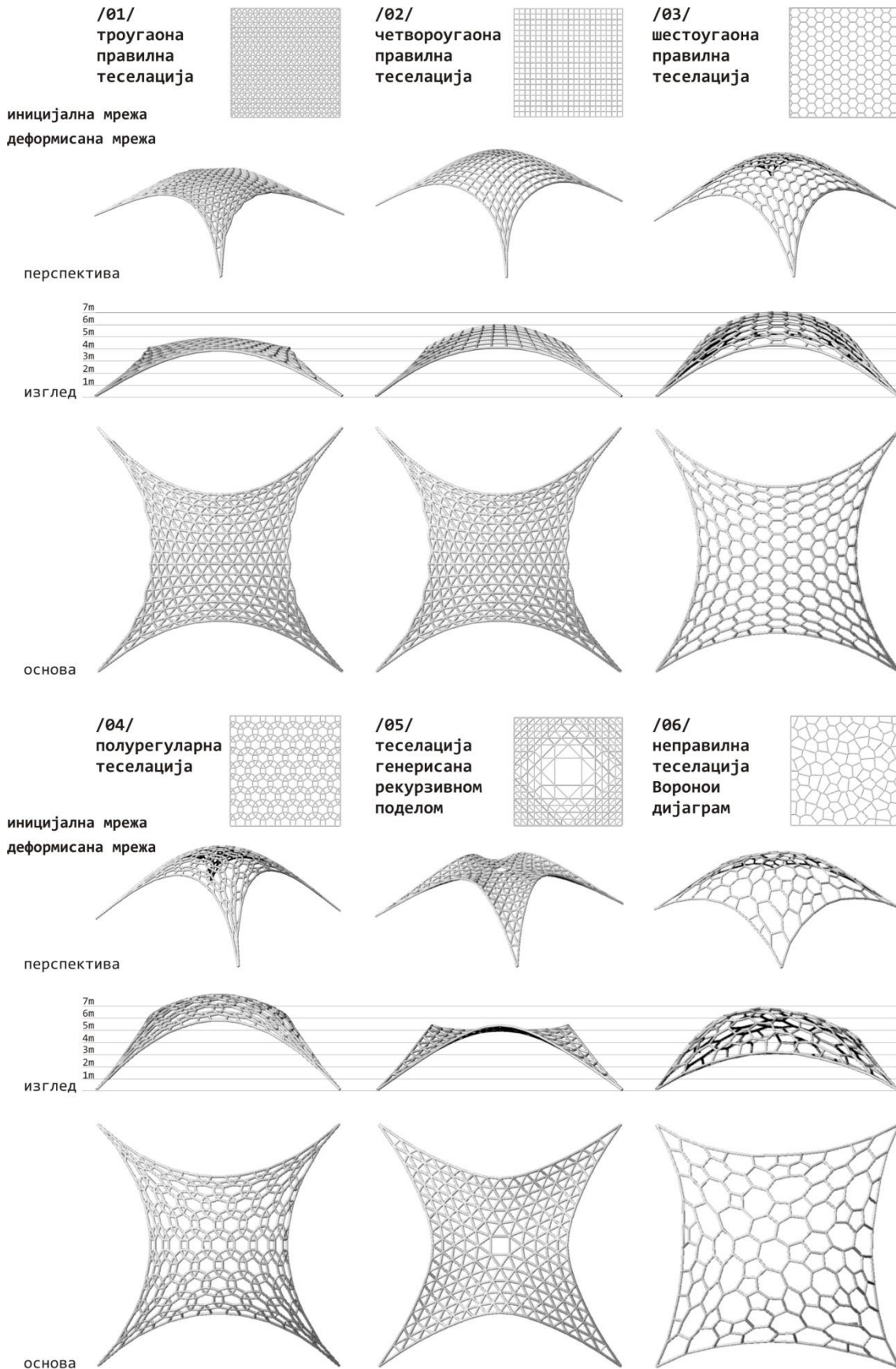
¹⁷ *Processing* је програмски језик опште намене који су на MIT развили Рис (Reas) и Фрај (Fry) с циљем креирања језика који ће прихватити уметници и дизајнери [Rea07].

¹⁸ IDE - *Integrated Development Environment* представља окружење које изгледа као текст едитор. Потребно је поменути да се ово окружење прилично разликује од оних у којима архитекте уобичајено моделују.

Резултати дигиталног експеримента коришћени су за визуелизацију, интерпретацију, компарацију форим и закључивање о понашању структура (Слика 2.1.15). У поређењу са линеарним системима структурално понашање мрежа је комплексније. Путања оптерећења (ток сила) кроз структуру није једнозначно одређена и у великој мери зависи од топологије мреже и геометрије појединачних елемената. Променом топологије могуће је избећи једну доминантну путању. Деформације линијских елемената варирају у зависности од њиховог положаја, тако да на крају процеса тражења форме долази до промене дужине елемената мреже, а штапови ближи ослоњцима имају веће деформације.

Генеративни систем је имплементиран применом 3D графичког програма *Rhinoceros*®, конзоле за визуелно програмирање *Grasshopper* [Rut15] и компоненте за симулацију физичких перформанси *Kangaroo Physics* [Pik12]. Као компонента *Grasshopper*-а, *Kangaroo Physics* користи његове могућности и даје приказ геометрије у реалном времену. У току рада могуће је приказати геометрију унутар статичног тродимензионалног модела што омогућава евалуацију резултата симулације. С обзиром да компонента управља *Grasshopper*-ом и *Rhinoceros*-ом, жртвована је одређена флексибилност. Па тако за разлику од *Processing* код кога све објекте система креира пројектант, што имплицира могућност селекције и релативно једноставних промена, код *Kangaroo Physics* објекти су генерисани помоћу *Kangaroo's mesh objects*, или коришћењем треће компоненте *Weaverbird* [Pia13] која служи као међукорак, а која је у овом примеру коришћена за генерисање теселације рекурзивном поделом. Ово отежава селектовање одређеног елемента и његову модификацију. Ипак *Grasshopper* интерфејс и јака подршка заједнице издвајају овај алат заснован на честица-опруга концепту.

Закључак је да су и у систему честица-опруга као и код реалних конструктивних система, перформансе и димензије структуре повезене са топологијом. Пример показује да топологија мреже утиче на форму структуре и дистрибуцију сила у њој. Тополошке студије могу представљати начин да се пројектовање усмери ка жељеним резултатима коришћењем топологија које ближе рефлектују кретање сила. У том смислу оптимизација се не мора ограничити на геометрију (*form-finding*), већ предмет оптимизације може бити и топологија (*topology-finding*).



Слика 2.1.15 Резултати генерисање форме применом маса-ланац система

Анализа коначним елементима (Finite element analysis - FEA), се први пут помиње у радовима Корента (Courant) 1942. године, а представља универзални алат за симулације физичког понашања који своју примену налази у најразличитијим областима. Зачетке концепта који је у основи ове методе могуће је пратити од методе анализе мрежа (*network analysis method*) коришћене у раним 1930-тим годинама. Своју распрострањену примену у решавању инжењерских проблема ова метода има од 1970-тих. Њену прву употребу у функцији алата за проналажење форме, представљају студије форми преднапрегнутих кабловских мрежа које су у Штудгарту 1960-тих спроводили Аргирис (Argyris) и сарадници [Arg72], [Arg74]. У оквирима овог рада разматрање је ограничено на аспект њене примене у процесима проналажења форме површинских конструктивних система.

FEA је метода нумеричке анализе заснована на математичкој и физичкој дискретизацији. Уместо елемената диференцијално малих димензија, основа разматрања су елементи коначних димензија. Са аспекта физичке дискретизације, то је замена реалног система (континуума) дискретним моделом са одговарајућим бројем коначних елемената, адекватног облика, типа и распореда повезаних у чворовима. У основи то је нумерички прелаз са једног континуалног домена на систем дискретно повезаних поддомена. Једна од предности FEA је могућност алгоритамског описивања, што имплицира универзалност примене. Анализирани систем може имати произвољну топологију, материјалне карактеристике, контурне услове, бити изложен дејствима произвољног интензитета, облика и времена трајања, међутим прорачун се увек спроводи на исти начин. Поједностављен алгоритам FEA процедуре састоји се од три главне фазе: предпроцесора, процесора и построцесора [Man98].

У фази предпроцесирања врши се дискретизација континуума, у контексту овог рада површинског система, којом се добија мрежа дискретних коначних елемената међусобно повезаних у чворовима¹⁹, као и одређивање граничних услова за дати систем. У фази процесирања одвија се анализа, односно прорачун вредности померања чворова, који се спроводи применом матричне методе, а на основу којих је могуће израчунати вредности деформација и напона система. У

¹⁹Чворови имају улогу у одређивању геометрије елемента, повезивању елемената у систем и дефинисању степени слободе елемента. У случају једноставних елемената обично су у крајњим тачкама, угловима или роњевима елемената, односно могу се налазити на ивицама и странама елемента (тзв. међучворови) код елемената вишег реда.

фази постпроцесирања добијани подаци се репрезентују и преводе у информације корисне за пројектно решење. Међутим овај начелно једноставан концепт има бројне проблеме спровођења који могу утицати на поузданости и тачност добијених резултата. Такође, одабир најбољег модела коначних елемента не представља једнозначно решив задатак. С обзиром да постоји више прихватљивих модела, потребно је познавање природе проблема, познавање суштине FEA, као и креативан инжењерски приступ у том поступку.

Гранични услови у анализи коначним елементима су услови ослањања (контурни услови) и спољашње отерећење система. Дефинисањем одређеног броја ослонаца уводе се ограничења генералисаних померања система као крутог тела у равни или простору. Ако је број ослонаца довољан да буду спречена сва померања система као крутог тела он је спољашње статички одређен, док је у случају већег броја ослонаца од довољног, систем спољашње статички неодређен. У случају крутих љуски задају се зглобни или крути ослонци, док се у случају мембрана као ослонци задају каблови или круте ивице. У анализама које се спроводе приликом разраде решења, потребно је моделовати реакције ових ослонаца како би се што реалистичније предвидело понашање површинског система. Као што је већ наведено, у процесу проналажња форме уобичејено се примењује један случај оптерећења - сопствено оптерећење код крутих љуски и преднапрезање код мембрана. У фази детаљне анализе у обзир се узимају сви случајеви оптерећења који могу деловати на конструкцију током њеног животног циклуса.²⁰ Без обзира на реална облик и дејство, утицаји се моделују концентрисаним оптерећењима која делују у чворовима система, што је последица дискретизације.

Поступак анализе начелно може бити линеаран и нелинеаран. У анализи површинских система од кључне важности је релативна величина угиба површи. У том смислу, ланарана анализа даје добре резултате уколико су померања мала што је најчешће у случају крутих љуски. Начелно, линеарна анализа представља примену линеарне теорије конструкција која се заснива на претпоставци о

²⁰ Начелно то могу бити комбинације оптерећења од снега, термички и сеизмички утицаји, ветар, оптерећења од удара, али и оптерећења која могу бити присутна само у току изградње објекта, затим која се могу јавити при одржавању или вешању ствари/објеката за конструктивну површ, итд.

геометријској, статичкој и физичкој линеарности понашања система.²¹ У случају мембрана деформације могу бити прилично велике, што имплицира примену нелинеарне анализе. У овом поступку оптерећење се инкрементално уноси, а померање чворова се проналази за сваки инкремент оптерећења. Односно, на деформисани облик прорачунат у претходној итерацији наноси се следећи инкремент оптерећења и прорачунава се нови деформисани облик. У поређењу са линеарном анализом ова процедура је захтевнија. У оба случаја, главне елементе прорачуна представљају: *коначни елементи, моделовање особина материјала, оптерећење, резултати анализе и њихова интерпретација.*

Избор елемената и конфигурације мреже којом се апроксимира реалан систем у великој мери одређују резултате. Како би се постигао одговарајући квалитет дискретизације у анализи се користе коначни елементи који се разликују по облику (у зависности од броја, распореда, повезаности чворова и геометријских карактеристика) и типу (у зависности од изабраних степени слободе - независних генералисаних померања чворова и физичко-механичких карактеристика). Степени слободе чворова одређују стање коначног елемента. У случају ФЕА заснованој на методи крутости²², реч је о кинематичким величинама, тј. вредностима поља померања. Избор степени слободе коначних елемената зависи од више параметара, али је доминантна потреба да се нумерички моделују величине релевантне за описивање стања реалног система или математичког модела. Геометрија коначних елемената дефинисана је положајем чворова, а елементи могу бити једно-, дво- и тро-димензионални.²³ Геометрија линијских елемената је права или крива линија, површинских полигон (троугао, четвороугао) са правим или кривим ивицама, док просторни коначни елементи могу имати облик просторне површи, тетраедра, призме. Геометријске карактеристике коначних елемената су параметри попречног пресека код линијских, односно дебљина код површинских, а оне се задају или израчунавају.

²¹Хипотеза о геометријској линеарности за последицу има линеарност веза између генералисаних померања и деформацијских величина и позанта је као претпоставка о малим деформацијама. Хипотеза о статичкој линеарности узима у обзир линеарне везе између генералисаних сила и генералисаних померања, што за последицу има линеарност услова равнореже. Та претпоставка позната је као претпоставка о малим померањима. Хипотеза о физичкој линеарности или хипотеза о материјалној линеарности подразумева линеарност везе између напона и деформације, тј. линеарно понашање материјала [Kov06].

²² У основи ФЕА најчешће је метода крутости, међутим користе се и методе засноване на енергији.

²³ Димензионалност коначних елемената могуће је дефинисати на два начина. Са геометријског аспекта то су координате потребне за описивање облика, док са математичког аспекта представљају параметре нумеричког модела. У неким класификацијама уводе се и елементи без димензија (опруге, концентрисана маса, ослонци и сл.) [Kov06].

Суштину анализе поред физичке дискретизације мрежом коначних елемената представља и нумеричка интерполација поља (обично померања) у оквиру појединачног коначног елемента, тј. апроксимација понашања коначног елемента. Интерполација се спроводи у односу на чворове елемената усвајањем различитих функција (обично полинома) које дефинишу расподелу, тј. поље померања унутар једног елемента. Коначни елементи су међусобно повезани само у чворовима, где може постојати компатибилност, тј. континуитет функције поља и одговарајућих функција померања. Последица повезивања коначних елемената у чворовима је апроксимација облика, с обзиром да се на овај начин промена поља дефинише само квалитативно (дефинише се само облик функције), док су координате параметарски одређене координатам чворова.

Питање *најбоље* функције за интерполацију у оквиру коначног елемента имплицира класификацију коначних елемената према подобности за дискретизацију топологије и апроксимирање понашања реалног система. У неким случајевима различити елементи реланог система могу се моделовати применом елемената истог облика, али различитог типа. Сви критеријуми за избор типа коначног елемента засновани су на потреби што тачнијег апроксимирања понашања одговарајућег конструктивног елемента. Од избора интерполационих функција зависи испуњење континуитета у заједничким чворовима суседних елемената. Према критеријуму задовољења услова компатибилности коначни елементи могу бити компатибилни или некомпатибилни. Постоје различити нивои континуитета: континуитет функције C^0 , континуитет функције и првих извода C^1 , континуитет функције и m -тих извода функције C^m .²⁴ Грешке интерполационих функција настају углавном због разлика између тачног и претпостављеног поља померања, избора неодговарајућег типа елемента или дегенерисања облика елемента ван одређених граница.²⁵

²⁴ Није увек исти ниво континуитета потребан за нумеричко моделовање. Применом коначних елемената са вишим нивоом континуитета у принципу се обезбеђују мање грешке апроксимације, међутим јављају се проблеми њиховог дефинисања.

²⁵ У анализи грешке у овире FEA значајни су појмови стабилности и конвергенције. Појам стабилности, у нумеричком смислу, предатља особину осетљивости модела на промену битних параметара. Модел је нестабилан ако због мале промене неког параметра уследи велика промена у решењу. Конвергенција је као појам повезана са стабилношћу - решење је стабилно ако је конвергентно. Повећањем броја коначних елемената грешка се повећава код дивергентних, а смањује код конвергентних модела. Конвергенција ка тачном решењу зависи од избора формулације саме методе. Ако је дискретизација спроведена малим бројем елемената или елементима код којих интерполационе функције одступају од тачних, добијени резултат указиваће на веће крутости од реалних – резултати су мања померања од тачних. Постоје различити начини за одређивање тачности и конвергенције решења нпр. тест својствених вредности, *patch* тест, итд.

Важан параметра моделовања коначним елементима представља сама конфигурација мреже. С обзиром да се описивање закривљених површи реалног система врши дискретном мрежом, начелно резултати ће бити тачнији уколико је мрежа гушћа, јер ближе прати закривљену геометрију. У циљу добијања што бољих резултата често је потребно правити варијације у густини мреже. Транзиције између различитих решења морају бити постепене, а тренутно расположива компјутерска окружења имају могућност аутоматизованог генерисања мреже на основу САД геометријских модела.

Репрезентација материјала представља још један важан параметар моделовања. Механичке особине коначних елемената зависе од понашања материјала које се најчешће описује константама - параметрима материјала: Јангов (Yung) модул еластичности, Поасонов (Poisson) модул бочне контракције, степен изотропије, коефицијент термичке дилатације, запреминска маса итд. Крутост је повезана како са попречним пресеком површи (која је у случају површинских система, а посебно мембрана мала) тако и са материјалом. Крутост материјала изражава се модулом еластичности. Такође разматрање утицаја сопственог оптерећења могуће је само уколико је специфицирана густина материјала. Композитни материјали који се примењују за материјализацију мембрана имају ортотропне механичке особине што значи да њихова крутост и чврстоћа варирају у зависности од оријентације. С обзиром на разлике у понашању у одређеним случајевима спроводи се експериментално одређивање крутости материјала (тест биаксијаног затезања).

Анализа подразумева решавање система линеарних једначина који чине матрица крутости K и вектор непознатих генералисаних померања чворова u система коначних елемената. Векторски производ ове две величине једнак је вектору оптерећења P чворова система, односно изражено у векторком облику $\{P\} = \{K\} \times \{u\}$. Елементи матрице крутости и вектора оптерећења система су унутрашње и спољашње генералисане силе које одговарају степенима слободе померања чворова. За случај статичке анализе веза генералисаних сила и генералисаних померања дата је само матрицом крутости, за случај динамичке анализе дефинишу се још и матрице масе и пригушења коначних елемената. Елементи матрица су у тзв. локалном координатном систему - правоугаоном

координатном систему чије осе су обично у правцу неке од карактеристичних оса коначног елемената. Како би се разматрања свела на заједничку основу, веза између генералисаних померања и генералисаних сила у чворовима коначних елемената у локалном координатном систему и одговарајућих величина у глобалном координатном систему успоставља се преко матрице трансформације.

Дефинисане матрице имају тракасту структуру и спадају у категорију тзв. ретких матрица. Димензија матрице одговара укупном броју степени слободе. Ширина траке матрице зависи од нумерације чворова и одређена је највећом разликом у нумерацији повезаних чворова. Матрица крутости система је симетрична са позитивним вредностима елемената на дијагонали и сингуларна, уколико нису дефинисани контурни услови.²⁶ Сингуларност матрице крутости директна је последица могућности да се систем коначних елемената помера као круто тело у равни или у простору. Та чисто кинематичка померања не изазивају никакве утицаје у систему коначних елемената.

За извођење прорачуна користе се различити модули за решавање система једначина (*solver*), а уобичајени излазни податци су вредности деформација, напона и померања, које је потребно да буду у дозвољеним оквирима за дати систем и материјал. Анализама је могуће добити и резултате о понашању система услед термичких утицаја и динамичких дејстава. Са аспекта примене од непосредне је важности разумевања ограничења различитих солвера и елемената како би се на адекватан начин проценили добијени резултати. Интерпретација резултата представља последњу фазу и посебно осетљив део с обзиром да захтева искуство како би се извршила процена у којој мери су добијени резултати блиски понашању реалног система. Резултати омогућавају сагледавање релевантних величина за дати систем и представљају корисне информације за наредне фазе на основу којих се према потреби врше подашавања и прилагођавања геометрије и понављање прорачуна са тако формираним новим моделом. На овај начин поступак примене анализе коначним елементима добија итеративни карактер поступног приближавања решењу.

²⁶Услови ослањања и карактер веза између елемената и склопова реалног система одговарају појмовима контурни и прелазни услови у математичком моделу реалног система. Контурни услови односе се на система коначних елемената као целину и интервенције у вези са дефинисањем контурних услова спроводе се на матрици крутости система елемената. Прелазни услови односе се на појединачне елементе или групе елемената, па се ови услови обично дефинишу самом матрицом крутости коначних елемената.

Предност примене FEA у поступцима трежења форме површинских система је у могућности брзог генерисања варијантних решења и мањи број грешака. Варирањем и прилагођавањем различитих параметара попут оптерећења или ослонаца, чак и дебљине љуске, омогућавају се узастопне анализе у итеративном процесу пројектовања. Предност је и у томе што се овај процес одвија у истом окружењу као и детаљна анализа, прорачуни и оптимизација које је потребно или пожељно спровести у наредном кораку. У великом броју случајева примена ове технике за проналажење форме даје добре резултате, ипак потребно је увек имати у виду њену апроксимативну природу приликом евалуације резултата.

Рачунарска имплементација FEA спроводи се од 1960-тих, а данас је доступан велик број апликација изузетних перформанси - *ABAQUS, ADINA, ALGOR, ANSYS, ASAS, ASKA, AxisVM, BEASY, BERSAFE, CIFTS-1100, CASTOR, CMMET-PR, COSMOS, DIAL, DIANA, DRAIN, FESOR, FLASH2, ICS-STRUDL, IES, ISDS/STAAD, LS-DYNA, MARC, MSC/NASTRAN, NISA, PAFEC, PC/RCFRAME, PDA/PATRAN, PACET, PREFEM/SERFEM, RAFTS, SAMIS, SAP, SCIA, SESAM-69, SHELL, STAN, STARS, STDYNL, STRESS, SUSAN, TABS, TITUS, TOWER*, итд.. Међутим, и поред опције уноса улазних података директно из CAD софтвера (нпр. у виду .dxf фајл формата) ови програми имају веома ограничену употребу у области архитектуре. Развој модула који оперишу у оквиру CAD система представља донекле вид прилагођавања овог захтевног алата потребама архитектонског пројектовања.

Пример 4

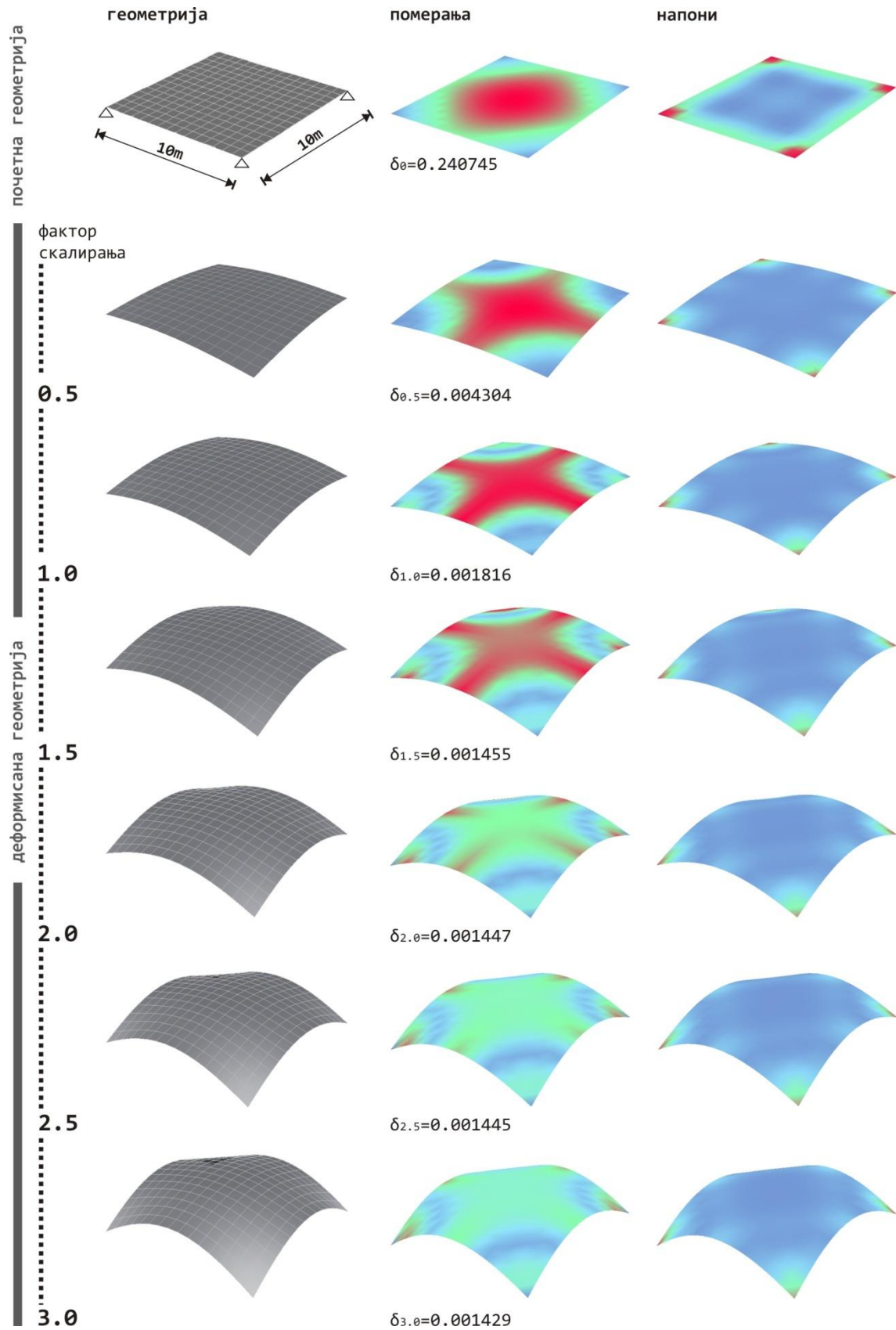
Пример илуструје примену методе коначних елемената у процесу тражења форме површинских конструктивних система. У овом случају примењен је концепт обрнутих померања, итеративни поступак у коме се у првом кораку врши анализа почетне геометрије како би се одредила померања чворова, а затим се смер тих померања инвертује. На овај начин добијена деформисана геометрија усваја се као почетна у следећем кораку анализе. Тражење форме спроводи се скалирањем вредности померања добијене почетне геометрије, чиме се повећава закривљеност геометрије у циљу добијања решења веће крутости.

За почетну геометрију усвојена је плоча димензије 10 × 10m, дебљине 8cm, ослоњена у четири крајње тачке и оптерећена сопственим оптерећењем.

Параметри примењеног материјала су Јангов модул еластичности $E = 48 \text{ MPa}$, Поасонов коефицијент $\nu = 0.2$ и $\rho = 2549.29 \text{ kg/m}^3$. Модификација геометрије врши се скалирањем добијених вредности померања за вредности 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0. Почетна равна геометрија деформисањем постаје двоструко закривљени свод, односно њен облик представља функцију граничних услов (Слика 2.1.16).

Алгоритам је имплементиран коришћењем програма *Rhinoceros*®, графичког едитора *Grasshopper* и модула за анализу применом методе коначних елемената *Milipede* [Pan14]. Применом ових алата тестиране су предности параметарског моделовања геометрије за анализу и примена FEA у CAD окружењу. Коришћењем *GrasshopperMesh* компоненте омогућено је параметрско подешавање густине дискретизације у оба правца аутоматски генерисане мрежа четвороугаоних елемената. Начелно, параметрско окружење омогућава једноставне модификације и прилагођавања геометрије површи, промену дебљине плоче, начина ослањања, параметара материјала, у току рада, што значајно олакшава продукцију варијантних решења неопходну у процесима пројектовања заснованим на информацијама анализе. Имајући у виду да је CAD окружење фамилијарно архитектама, овом приступу даје се предност у односу на поступке у коме се геометрија моделује у CAD, а анализа спроводи у FEA окружењу, јер је на овај начин избегнуто експортовање/импортовање података у итеративним процесима пројектовања.

Закључај је да иако анализа коначним елементима има далеко веће могућности, може се применити као алат у процесима проналажења форме површинских конструктивних система. Поступци проналажења форме и анализе фокусирани су на студије деформације површи, с том разликом што су поступци проналажења форме усмерени у правцу добијања облика, док се анализа користи за дијагностику понашања површи услед дејства оптерећења. Оба поступка представљају делове инкременталног процеса побољшања геометрије површи. У том смислу, облик добијен поступком тражења форме у фази концепције у даљој разради постаје предмет структуралних анализа за различите случајеве оптерећења, а на основу добијених резултата може се вршити варирање параметара који се уносе у поступак проналажења форме у наредној итерацији.



Слика 2.1.16 Приказ варијантних форми добијених применом принципа обрнутих померања

2.1.2 Морфогенеза

Проширени концепт проналажења форме

Концепт морфогенезе, као фундаментални процес генерисања форме, истражује се у различитим областима укључујући биологију, геологију, кристалографију, инжењерство, уметност, урбанизам и архитектуру. Овај диверзитет имплицира различита тумачења која рангирају од формалних до поетичних. Оригинално, појам је везан за област биологије, где је уведен у другој половини XIX века. Морфогенеза представља један од фундаменталних аспеката развоја организама. У њеној основи су биолошки процеси који утичу на развој облика, аналогна је контроли ћелијског раста, диференцијације, организације и просторне дистрибуције ћелија. Када је реч о механизмима који управљају овим процесима, они се у организмима могу одиграти под утицајем хормона, различитих енвајорменталних хемијских материја, других организама, или под утицајем механичких напрезања индукованих просторном организацијом ћелија. Неки аутори праве разлику између биолошке и физичке морфогенезе, у складу са поделом природе на живу и неживу [Gru11], према којој се биолошка морфогенеза односи на организме, а физичка на неорганску материју.

Морфогенеза у архитектури [Hen04], [Kol05], [Hen06], [Mon12], представља вид аналогije или метафору процеса заступљених у природи, у смислу заједничког концепта постепеног развоја, без обавезе стриктне и доследне примене њихових механизма. У архитектури се овај појам начелно односи на математичку природу форме и могућност превођења намера, енвајорменталних утицаја и техничких ограничења у интегрисана морфолошка решења. У морфогенетским процесима пројектовања уместо дефинисања форми, детерминишу се генеративни системи за њихову продукцију, контролу и селекцију. Генерисање формалних решења која најбоље одговарају циљевима остварује се кроз динамичне, нелинеарне процесе тражења, комбиновањем адаптивних компоненти у оквирима постављених ограничења. Према [Kol05] морфогенетски процес подразумева: дефинисање система утицаја, релација, ограничења, правила у процесу *ин-формације*; резултујућа структура дефинисаних међузависности је затим обично дата геометријском формом -

формација; која је потом субјекат процеса *де-формације* или *транс-формације* које се изводе под утицајем истих релација или системских правила.

Неке од најранијих идеја везане за објашњење физичких и математичких законитости и ограничења у основи процеса биолошког развоја поставили су Томсон (Thompson) и Тјуринг (Turing) [Tho17], [Tur52]. У окирима њихових радова постављени су постулати присуства хемијских и физичко-хемијских процеса у расту ћелија и организама, чије је потпуније разумевање омогућено открићем ДНК и развојем молекуларне биологије и биохемије. Па је тако, Томсоновим радом сама природа персонификована као *истраживач* који коришћењем сличних градивних јединица и генеративних принципа креира бескрајне варијације врста и форми.

Многи прикази природних феномена дати Томсоновим моделом у већој мери су повезани са Волфрамовим (Wolfram) радом на ћелијској аутомати (*cellular automata*) [Wol02] наго са Дарвиновим о пореклу врста. То је последица приступа у коме су објашњења пре свега базирана на генеративним законитостима на нивоу хемије и геометрије ћелија, а тек затим се тумаче као резултат еволуције. На пример форма љуске морске шкољке није резултат процеса креације који се одвија *одозго на доле*, већ процеса раста који има своја ограничења и законитости. Слично, Томсонова студија облика љуске јаја илуструје да облик није последица само геометријских законитости већ читавог низа утицаја од притиска, преко отпорности материјала, до окружења [Tho17]. Ипак потребно је нагласити важност поставке истраживања у релацији са могућим резултатом, с обзиром да селекција може да одбаци само оно што иницијално може бити креирано.

Архитектура има задатак да одговори на читав спектар утицаја, просторних, функционалних, технолошких и енвајорменталних ограничења. Начин увођења наведених фактора у процес пројектовања је изазовна тема, а добра абстракција, тј. превођење кључних идеја круцијално уз напомену да аспекте пројектног проблема често није могуће квантитативно исказати или дијаграмски репрезентовати. Ипак мапирање проблема на дијаграм може се сматрати значајним кораком у изражавању идеја. У том смислу, Александер (Alexander), који својом специфичном методологијом тежи увођењу рационалности у процес

пројектовања, као проблем идентификује следеће: *Оно што представља проблем пројектовања, у случају реалног света, је то што покушавамо да направимо дијаграм за силе чије поље не разумемо* [Ale64]. Насупрот процесима пројектовања у којима се до решења долази свесним или несвесним *погађањем*²⁷ или процеса у коме решења настају инкреметалним унапређењима ослањањем на искуство и традицију, а који често немају капацитет да одговоре на непознате задатке, предлаже се приступ у коме се до решења долази кроз процес претраге, селекцијом решења које добро, односно елиминацијом решење које лоше одговара постављеним циљевима. Уместо дијаграма који су у служби репрезентације концепта, Александер предлаже употребу дијаграма којима се описује и анализира проблем истраживања и подсистема који представљају његову декомпозицију, а који превазилазе геометријску репрезентације форме. Имајући у виду флексибилност, запажање у [Kil06] је да се снага дијаграмског описа може интегрисати у студије, које се спроводе у раним фазама процеса пројектовања, као виши ниво истраживања перформанси решења.

Симулације комплексних процеса из природе, попут развоја форме углавном се спроводе применом дигиталних технологија. Према Фрејзеру (Frazer) рачунар обезбеђује *компресовани еволуциони простор и време* за генезу и развој комплексних архитектонских форми [Fra95]. И сам развој рачунарства обележен је конструкцијом компјутерских модела за симулацију природних процеса, а области биоинформатике и биорачунарства инсирисане су фундаменталним процесима и информационим системима из природе. Полазећи од премисе да је информација основ живота, кључне личности за развој рачунарства и информатике попут Тјуринга²⁸ или Фон Нојмана (Von Neumann)²⁹, експлицитно су себи поставили задатка да креирају теорију која ће обухватити природне и артифицијелне системе. На овај начин подржан је њихов равноправан третман. Сам Тјуринг био је заинтересован за морфологију и симулације морфолошких процеса помоћу математички заснованих модела. Коришћење рачунарских технологија у процесу архитектонског пројектовања захтева њихово познавање и

²⁷Простор, структура и форма представљају традиционално спољашње изразе архитектонског концепта који се развија у свести архитекте.

²⁸Тјуринг је дао изузетан допринос концепту развоја рачунара, тзв. *Тјурингова машина*.

²⁹Фон Нојман је између осталог решавао и проблеме конструкције и рада рачунарских машина, чиме је поставио темеље савремене рачунарске архитектуре и симулација.

разумевање (како би се избегао неоснован осећај сигурности у резултате засноване на лошим премисама), с обзиром да су оне алат пројектантске методологије. Али и изналажење адекватних начина како да се потенцијали технологије искористе у служби креативности, имајући у виду да је тема креативности питање имагинације онога ко ствара а не питање технологије.

Дигитална морфогенеза (*digital morphogenesis*) подразумева групу метода у којима се потенцијали дигиталних медија користе као генеративни алати за продукцију и трансформацију форме [Kol05]. Док се термин рачунарска морфогенеза (*computational morphogenesis*) превасходно користи у контексту структуралних форми да означи математичке методе које су нови еволутивни степен претходно разматраних техника за проналажење форми. Генеративна улога дигиталних технологија остварује се манипулацијом различитих компјутерских конструката, од којих ће у оквирима овог рада фокус бити на еволуционим стратегијама. У овој поставци кодирањем правила креира се сет инструкција за генерисање и развој форми које се потом евалуирају на основу њихових перформанси у симулираном окружењу. Актуелне могућности рачунара обезбеђују генерисање великог броја еволуционих корака у кратком времену и њихову одрживу примену у поступку решавања комплекснијих проблема чиме се превазилази иницијално ограничење примене ових техника на решавање инжењерских проблема и отвара могућност њиховог коришћења као *еволуционих акцеларатора* или *генеративних пократача* [Fra95] у процесу пројектовања.

2.1.2.1 Биоапропријација

Последњих година реактуелизоване су пројектантске парадигме засноване на биолошким моделима. Бионика³⁰ представља мултидисциплинарну научну област у експанзији, која проучава модусе транспоновања и имплементације идентификованих принципа и законитости из природе у област науке, инжењерства, уметности и дизајна на различитим нивоима: од буквалног пресликавања форме до извођења принципа на апстрактнијем нивоу и проналажења одређених системских решења [Gru11]. Претходно је у циљу

³⁰Бионика, биомимикрија, биомиметика, биоинспирисани дизајн, биоапропријација итд. поред незнатних разлика у значењима користе се као синоними у литератури.

реализације оптималних решења која имају одређене пожељне атрибуте биолошких система. Архитектура представља део природног окружења и са њим гради специфичне релације који варирају између симбиотичких и деструктивних. Природа је одувек била извор инспирације за област архитектонског стваралаштва. Међутим актуелни тренд *биологизације* архитектуре огледа се не само у апропријацији процеса из природе, већ и у употреби термина позајмљених из биолошких наука и њихових поддисциплина, што има све значајније етимолошке импликације на архитектонски језик. Појмови попут морфогенезе (*morphogenesis*), хомеостазе (*homeostasis*) или концепата настанка (*emergence*), саморганизације (*self-organization*), само-склапања (*self-assembly*), саморепликације (*self-replication*), регенерације (*regeneration*), адаптације (*adaptation*) итд. значајно мењају наше поимање архитектуре.

Биоапропријација представља креативну стратегију која користи технике као што су ревизија, реевалуација, вријација, интерпретација, имитација, апроксимација, парафраза, мимикрија, алузија, интертекстуалност, итд., за деривацију принципа преузетих из природе и њихову имплантацију у процес пројектовања. Извођење решења за проблеме пројектовања из природних процеса, имплицира позицију природе као ментора, модела, система и у извесном смислу намеће стандард архитектонском пројектовању. Пример је перфекција и диверзитет природних форми и организама који су у метаболичком балансу са својим окружењем, што је резултат континуалног процеса еволуције и развоја кроз природну селекцију; сличност је на неки начин могуће препознати у вернакуларној архитектури.

Према [Vin09] могуће је идентификовати три различита нивоа превођења образаца из природе у област инжењерства и архитектуре. Најнижи, најочигледнији, али недовољно генерални приступ, је *једнократно* копирање биолошких објеката, њихове форме, структуре, текстуре, итд. Иако овакав приступ има недостатак у смислу да биолошке структуре и њихови механизми могу бити извучени из контекста без довољног схватања о разлозима њихове ефикасности, бројни су примери копирања формалних образаца природних структура листова, шкољки, дрваћа, костију, итд. На пример, облик шкољке или ефикасна укрућења радијалним луковима која се јављају код неких бивалвулара

могу бити полазне позиције у конципирању архитектонског решења. Међутим тема испољавања одређене карактеристике организама (у овом примеру крутости) далеко је комплекснија, а њена реализација зависи од интерпретације скупа инструкција и специфичног контекста.

Други ниво превођења је генерални приступ који подразумева препознавање образаца и идентификовање принципа у начину на који се решавају проблеми у областима биологије и технологије. Суштина овог приступа је у препознавању, решавању и елиминацији проблема, које је начелно могуће класификовати према димензијама. Па се у том смислу, на нивоу величине од нанометра до милиметра, опсервације изједначавају са синтезом материјала; опсервације на нивоу величине милиметра до метра примењују се углавном на структуре и механизме; док се на нивоу од метра до километра и више разматрају популације и екосистеми [Vin09]. Значајан број успешних инжењерских решења користе прилично једноставне и очигледне принципе из природе као што је то на пример случај са затегнутим структурама, код којих се захваљујући облику елиминишу концентрације напона, или коришћење предности структуралне хијерерхије.

Трећи ниво превођења заснован је на ТРИЗ (*Теория решения изобретательских задач*) систему наменски развијеном за инвентивно решавање инжењерских проблема. На овом нивоу, образци су апстрактнији, а проблеми се дефинишу и решавају унутар уско постављеног оквира. Овај приступ могуће је пратити још од Хераклита у античкој Грчкој, а препознаје се и у дијалектици између тезе и антитезе, заснованој на Хегеловској филозофији, која води синтези - решењу проблема. Иновативност коју доноси овај приступ последица је игнорисања зидова који се подижу између различитих области експертности, омогућавајући на тај начин најразличитијим знањима (чак и оним које делују ирелевантна за проблем) да учествују у разматрању и његовом решавању. Поступак има три корака: прво је потребно замислити идеалан резултат независно од технолошких захтева потребних како би се реализовао; затим исказати тај резултат кроз функционалне захтеве који су потребни да би се произвео и на крају направити листу свих расположивих ресурса [Vin09]. ТРИЗ показује да се техника развија на начин сличан еволуцији у природи. На пример, објекти су све

комплекснији, имају све више делова, што може бити искоришћено за предвиђање технолошке еволуције.³¹

Док су органски облици у архитектури често заступљени, обрасце изведене на другом и трећем нивоу могуће је користити за конципирање и развој пројектантских стратегија и алата, или као инспирацију за формулисање интерне логике морфолошких процеса. Креативне потенцијале процеса заступљених у природи, попут еволуције, самоорганизације, метаболизма, термодинамике, затим генералних принципа морфологије итд., могуће је опонашати креирањем виртуалних архитектонских модела што је почевши од Фрејзера [Fra95] разматрано у одређеном броју архитектонских истраживања. Овде је потребно направити јасну дистинкцију између природе као извора експланације и извора инспирације. Док је у првом случају, у контексту природних наука, валидност аналогije од есенцијалне важности, у другом случају када се природни феномени користе као почетна позиција за истраживања у процесу пројектовања толерише се слаба форма аналогije, а према Фрејзеру [Fra95], чак и погрешна тумачења и јеретички концепти могу бити стимулативни за пројекат.³² У том смислу, у контексту истраживања обухваћених овим радом, концепт морфогенезе не користи се за експлаторну теорију, већ је у функцији приступа генерисању архитектонских структура.

Потребно је поменути и могућност употребе реверзних аналогija, недовољно дискутованих у теорији архитектуре. Ове аналогije се односе на примену концепата иницијално развијених у области архитектуре за истраживања у различитим областима. На пример коришћење тенсегрити концепта који је развио Фулер за моделовање цитоскелета (унутрашње ћелијске структуре) [Ing85], [Ing93]. Или коришћење аналогije, код које се повратни подаци реверзних аналогija користе у креативним процесима. Употреба архитектонских модела у ботаници као алата за проучавање форми, структура и развоја биљака је пример. Односно, генеративна логика L-система [Pru04], који представља врсту граматике

³¹ Овај став повезан је са ширим контекстом присутним у научном дискурсу, холистичким погледом на универзум и тенденцијом за ставрањем обједињујуће теорије (*Great Unification Theory* - GUT) у науци. У науци ове јукстапозиционе тенденције теже да се сви феномени објасне теоријом еволуције (у форми неодарвинизма) - еволуција хемијских елемената, еволуција физичких константи, еволуција информација, културна еволуције, итд.

³² Важно је разликовати природу различитих врста теорија. У том смислу, Марч (March) је написао: *Логика се интересује за абстрактне форме. Наука истражује постојеће форме. Дизајн иницира нове форме. Научна хипотеза није исто што и пројектантска хипотеза. Логички предлог не треба мешати са пројектним предлогом* [Mar76].

облика, а који је оригинално софтверски имплементиран како би симулирао раст биљака, нашла је примену у креирању формално комплексних архитектонских објеката.³³ Основна предност реверзних аналогичности је у коришћењу слободне и отворене природе архитектонске струке која омогућава развој концепата из чисто пројектантских разлога (заснованих чак и на неортодоксним и нетачним становиштима), што у случају моделовања феномена чија објашњења наука још увек није обезбедила може бити подстицајно и каталитичко.

Еволуционе стратегије, један од концепата у основи овог рада, представљају аналогичност генетског кодирања заступљеног у природи. Начелно, оне примењују концепт биолошког развоја у генеративним процесима, у којима се конструкти изражавају низом генеративних законитости чију је еволуцију могуће дигитално кодирати [Kol05]. Гени кодирани ДНК детерминишу генезу организама и њихову форму. Селекција се спроводи између форми организама које представљају екстернализовани израз кодираних информација. Иако кодови производе инструкције, њихов финални израз је енвајорментално зависан. Варијације у оквиру исте врсте постижу се укрштањем (*crossover*) и мутацијом (*mutation*) гена, тј. кроз размену и промену информација. На овим основама развијене су еволуционо-адаптивне процедуре, који ће бити посебно разматране. Примена ових стратегија у архитектури подстакла је развој дискурса архитектонске генетике, чији су предмет генеративни процеси дефинисања архитектонских модела који садрже кодирани инструкције. Артикулацијом генеративне логике, управља се процесом еволуције, производи низ варијантних решења, врши селекција на основу евалуације перформанси и инкременталним променама кроз неколико генерација реализују жељени резултати.

За разлику од процеса архитектонског пројектовања, који подразумева план или радну хипотезу са намером оперисања, еволуцију у природи не карактерише такав вид интенционалности без обзира на наизглед предодређену конструкцију организама. Генеративно пројектовање је за разлику од традиционалног процеса пројектовања апсолутне контроле, хибридни приступ између контроле (с обзиром

³³L-систем је заснован на рекурзији и правилима система гранања, која се реализују једноставном техником поновног писања (*rewriting*), помоћу које се комплексни објекти креирају сукцесивном заменом делова иницијално конструисаних објеката. Генеративна правила L-система могу бити веома језгровито изражена, а једноставан низ дефинисаних правила може произвести веома комплексне објекте у рекурзивном процесу који се састоји од свега неколико корака [Pru04].

да постоји јасна намера) и недетерминисаности (с обзиром да резултати нису унапред познати). Његов утицај огледа се у предлозима различитих концепата попут *софт архитектуре*, еволуционог процеса пројектовања симулираног машином, који је предложио Негропонте (Negroponte) [Neg70]. Или генеричког модела који је предложио Холанд (Holland) [Hol75], а који је инициран потрагом за заједничким између проблема оптимизације различитих природних и артифицијелних система које карактерише комплексност, неизвесност и тема адаптације. Али и у Фрејзеровом концепту еволуционе архитектуре у коме се архитектура сматра *формом артифицијелног живота ... у коме су архитектонски концепти изражени генеративним законитостима тако да њихова еволуција може бити убрзана и тестирана* [Fra95]. Поређење објекта са живим организмом и транспонување еволуционих принципа у контекст архитектуре подразумева тражење начина за креирање архитектонских стања у којима се објекти адаптирају, реагују и мутирају у складу са екстарним и интерним параметрима пројектованог система. У овој поставци форме нису стабилне већ поседују потенцијал за варијације. Циљ оваквог приступа је реализовање архитектуре коју карактерише симбиотичко понашање и метаболички баланс својствени природном окружењу.

Одређени број компјутерских програма развијен је у циљу симулирања раста, развоја структура и проналажења оптималних решења попут: GENER8 - интерактивни, пројектантски алат која служи за генерисање површи, а који интегрише раст и еволуциону претрагу коришћењем EA и L-система [Hem09]; MoSS (*Morphogenetic Surface Structure*) - пројектантски алат за моделовање заснована на L-систему [ORe12]; *AgencyGP* - алат за пројектовање нехијерархијских организација који је развила *Emergent Design Group* [ORe01], [ORe08], [Fle12], [ALF15]; Бротен (*Broughton*) и сарадници развили су програм који користи L-системе [Coa99]; Розенман (*Rosenman*) и Геро (*Gero*) су развили програм који генерише архитектонске основе [Ros96], [Rod14]; Нишино (*Nishino*) је са сарадницима развио програм који користи традиционалну евалуацију критеријума, као и одрађени број програмских модула за неки од распрострањених комерцијалних CAD система попут *AutoCAD*, *Maya*, *Rhinoceros®* и др.

Пример 5³⁴

Примером се истражује концепт биоапропријације као методе за решавање проблема продукције пројектних решења заснованих на принципима изведеним из природе. Ефикасност овог приступа тестирана је кроз процес пројектовања биоинспирисаних просторних структура, чије су референце физичке особине биоинтерфејса и релације које граде са окружењем. Интерфејс површи формирају се на граници између два различита агрегатна стања материје, а у случају организама представљају баријеру између биоматеријала и другог материјала.

Физичке и симболичке идеје у бити биоинтерфејса додељене су праметрима који представљају основу рачунарског истраживања кроз пројекат. Генерисању је предходила фаза идентификације и абстракције образаца из природе и формулација генеративног система за продукцију оптимизованих решења и њихових варијација. Заједничке особине и перформансе природних интерфејса су анализирани, а резултати су обрађени и инструментализовани како би се детерминисале формална, структурална, материјална и функционална ограничења. Евалуиране и рафиниране особине биоинтерфејса транспоноване су у контекст пројектовања коришћењем физичких и еволуционог процеса.

У фокусу ове студије су интерфејси формирану између течности и гаса. Као што је приказано, филмови сапунице представљају адекватан модел за истраживање површинских конструктивних система. Они представљају хомогено напрегнуте системе минималне енергије који природно минимизирају површ у оквирима задатих граничних услова³⁵. У случају када се филм понаша као мембрана напрегнута притиском добија синкластичну форму која може бити искоришћена за љуске или пнеуматске конструктивне система.

Начелно, површински притисак представља функцију која управља процесима интерфејс површи. У случају филмова од сапуница, молекули сапуна који представљају соли јонизоване у води својом орјентацијом доприносе силама које се јављају у танкој површи филма. За ма који филм сапуница притисак се може

³⁴Највећи део ове студије аутор је објавио као део рад под називом *Bio-interfaces: Studies in Bionics and Space Structures Design* у зборнику интернационалне конференције *moNGeometry 2014* [Mil14a].

³⁵С обзиром да је енергија уграђена у филм сапунице производ површинског напрезања и површине филма, стање минималне енергије постиже се уколико је површ између датих граница минимална [Vec08].

изразити као производ напрезања површи f и главних кривина $K_1 = 1/r_1$ и $K_2 = 1/r_2$. Из претходног следи да константан хомоген површински притисак у филму саунице имплицира да је збир главних кривина једнак нули - што представља геометријску особину минималних површи. Реолошка истраживања пене [Bes07], показују да је у одсуству спољашњих сила такав систем у метастабилној конфигурацији.

Особине динамизма и флуидности које утичу на стварање различитих конфигурација бионтерфејса транспоноване су у контекст пројектовања, што је резултовало *блoб* формом просторне структуре (Слика 2.1.17). Иако су међузависни динамизам и флуидност у овом случају представљају различите концепте. Динамизам је производ поља сила које утичу на кохезију и адхезију интерфејса, могуће га је прецизно дефинисати параметрима и контролисати променом вредности варијабли. С друге стране, флуидност је могуће везати за појмове који описују кретање, трансфер, константну промену омогућену формом, композицијом, саставом и структуром. У контексту пројектовања концепт флуидности обезбеђује могућност да се означи, транспонују и на симболички начин објасне аспекти које није могуће егзактно дефинисати.

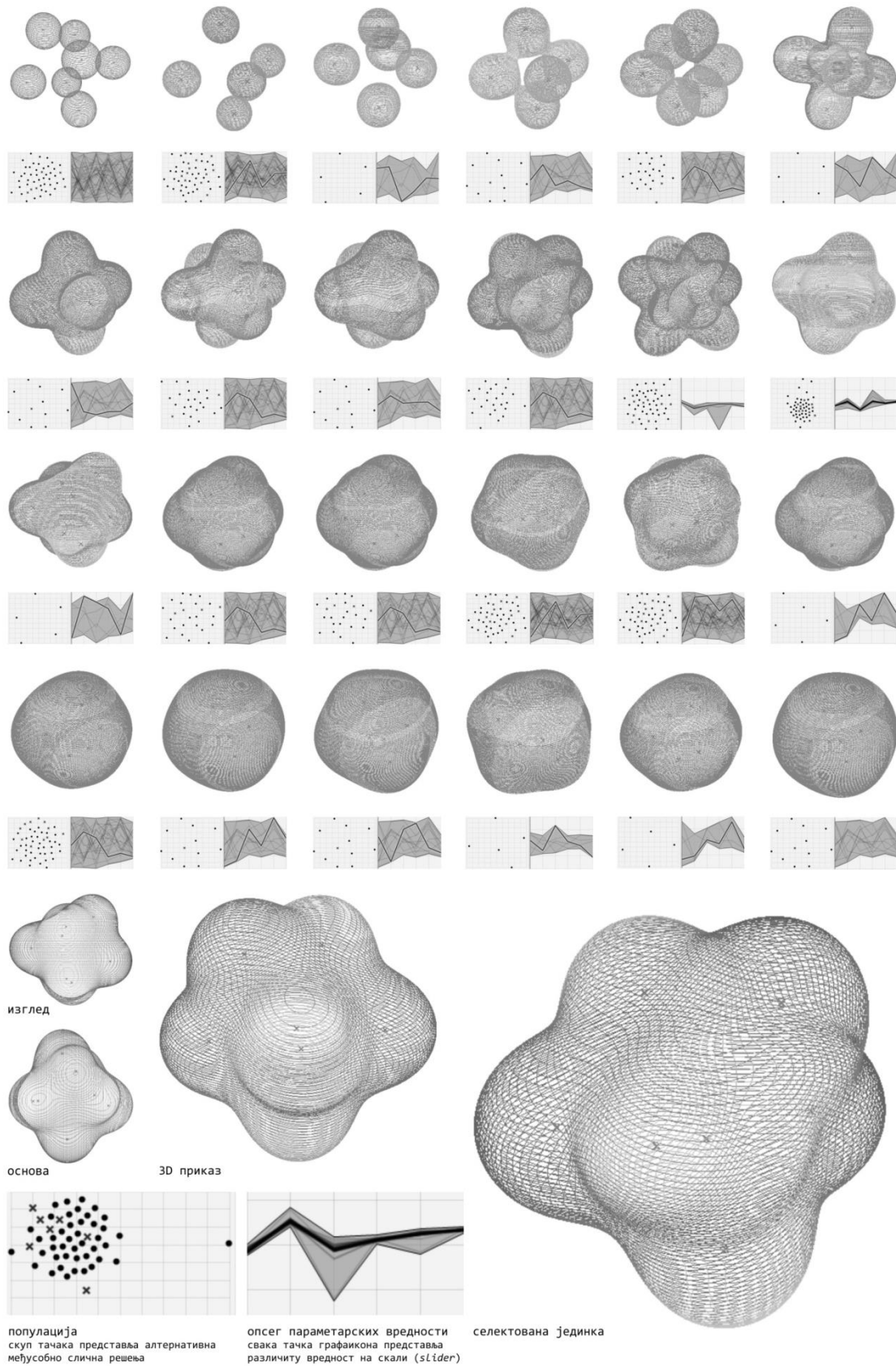
Фокус морфогенетског процеса пројектовања био је дефинисање генеративног система посредством ког се врши продукција, контрола и селекција. Абстраховањем проблема, формулацијом правила услова и ограничења релевантних за процес претраге и њиховом трансформација у експлорациони систем инициран је процес пројектовања, затим је креиран инструмента за продукцију варијација пројектних решења и селекцију пожељних резултата. Генеративна улога дигиталних технологија остварена је манипулацијом компјутерских конструката - изоморфних поља и еволуционе стратегије. Генеративни систем имплементиран је применом 3D графичког програма *Rhinoceros*®, његове програмске конзоле за параметраски дизајн *Grasshopper*, *SPM Vector Components* програмског модула за симулације векторских поља [Ham13] и еволуционог солвера *Galapagos* [Rut13]. Манипулацијом варијабли у потреси за решењем(има) која најбоље одговарају задатим условима између кохезије и сепарације векторских поља спроведена је применом еволуционог солвера који управља дигиталном морфогенезом.

Моделовање форме реализовано је применом објеката органског изгледа - металопти чији су центри тачке дистрибуиране у простору. Геометријски металопте представљају имплицитно дефинисане изоповрши кроз одређено скаларно енергетско поље, где се центар сваке металопте може сматрати енергетским извором чији ниво опада удаљавањем од те тачке. У овој поставци површ металопте може се сматрати репрезентацијом свих тачака у квиру тог енергетског поља које имају исту енергетску вредност. Имплементација металопти у оквиру *Grasshopper*-а је компонента којом је могуће генерисати криве које заправо репрезентују равне 2D пресеке кроз скуп металопти, због чега су у овом случају 3D форме апроксимиране генерисањем одређеног броја кривих на различитим еквидистантним равнима паралелним са равнима xu и uz .

Пре него изведен из скалираних аналогича између биолошких услова и конструката велике размере (архитектуре), овај приступ пројектовању подразумева креирање органског ентитета. Приказано решење, пре него организам или асемблж (уобичајено дигитално добијен геометријски систем), представља биоинспирану архитектоничну структуру, *naturifical*³⁶ ентитет, конструисану и нестабилану, која тежи да се декомпонује и рекомпонује на различите начине, осцилујући између једнозначног/уникатног и неограничених варијација форме, не (за)узимајући дефинитиван идентитет (Слика 2.1.17).

Попут природе и архитектура је заснована на организацији и материјализацији, бави се морфологијом и структуром, представља композит индивидуалних функционалних елемената који делују као целина. Биомиметички приступ архитектури захтева примену конзистентне пројектантске методологије, у којој се о форми не размишља одвојено од функције, структуре и материјала, нити као о фиксном ентитету већ као о врсти реактивног система. Рачунарски алат дефинисан и примењен за истраживање, изражавање и продукцију форме условио је естетику сложености и варијације на једној страни и перформансе на другој. Рационалност форми резултат је комбинације вредности параметара који омогућавају прецизно информисање неегзактног али строго дефинисаног процеса. Резултујућа решења остварују различите интеракције са окружењем, приближавајући се фигурацији која је адаптивна, флексибилна и слободна.

³⁶ *naturifical*=*natural*+*artificial*, сложеница употребљена од стране аутора у [Nes13].



Слика 2.1.17 Био-интерфејс концепт: приказ варијација структуре

2.1.2.2 Рачунарска морфогенеза

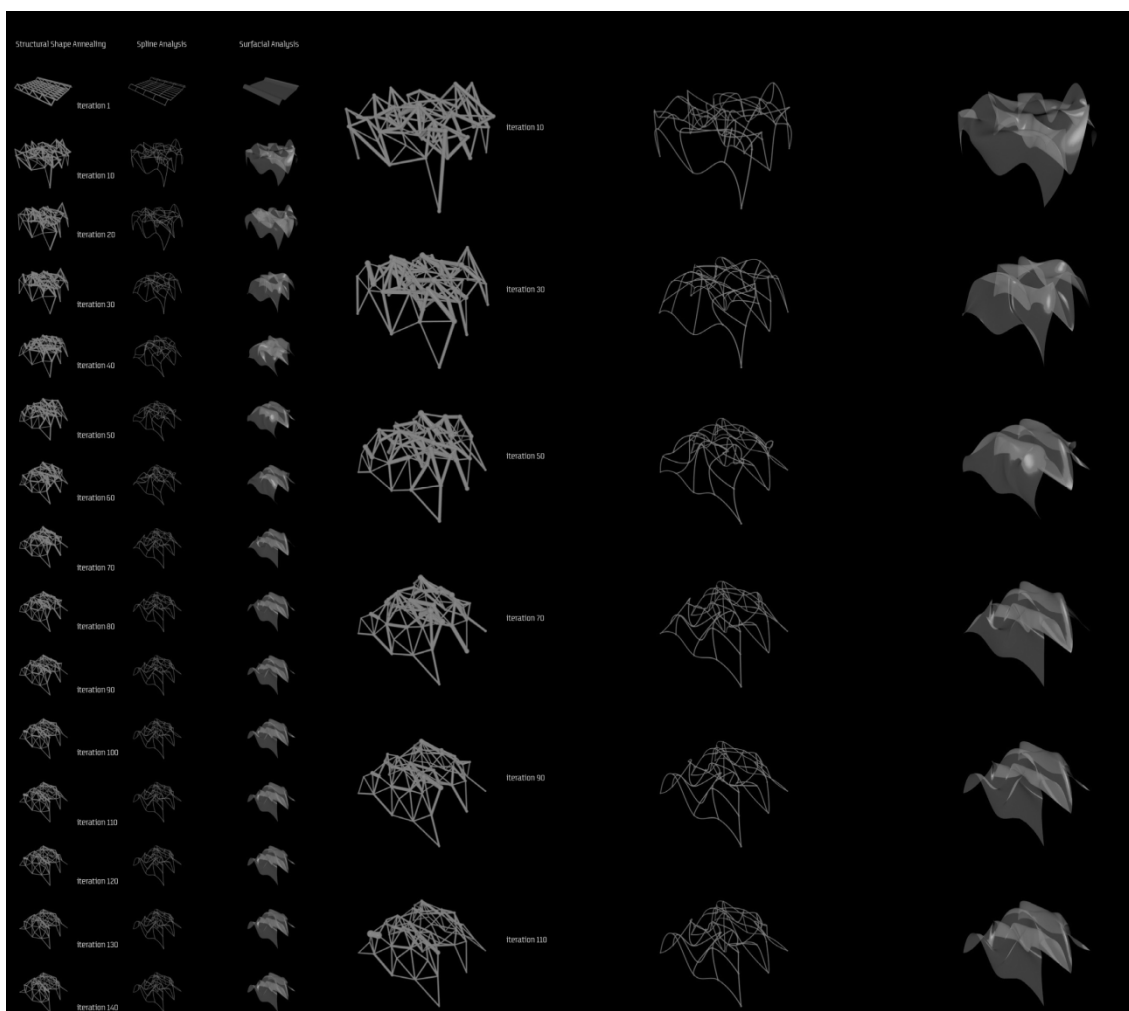
Рачунарска морфогенеза (*computational morphogenesis*) представља новији приступ у области архитектонског конструктерства. Ова истраживачка област настала је повезивањем различитих алата математички заснованих метода проналажења форми оптималних у конструктивном погледу [Ble11]. Међутим потенцијали ових метода превазилазе ограничења примене на проналажења равнотежних форми и решавање конструктивних проблема, својом употребом за евалуације преформанси и оптимизације различитих аспеката архитектуре.

Метод еволуционе оптимизације представљају рачунарске аутоматизоване итеративне процедуре за тражење оптималних решења засноване на FEA. Начелно, критеријуми за оптимизацију укључују минимизирање масе конструктивног система (минимална запремина материјала), максимизирање оптерећења које систем може да прихвати, максимизирање крутости, или минимизирање деформација изражено кроз параметар енергије деформације. Параметре оптимизације потребно је одабрати у складу са конструктивним системом. Код површинских система, наведени критеријуми директно су зависни од утицаја параметра дебљине, а енергија деформације представља индикатор ефикасности облика, односно мера искоришћености материјала у доприношењу крутости система. Такође, у случаји површинских система фокус је претежно на дефинисању облика, док се за линеране системе спроводе тополошка истраживања у којима се најчешће дефинисана геометрија система задржава, а варирају се конфигурација (организација елемената) и материјал (поречни пресеци елемената).

Технике оптимизације које примењују нелинеарну анализу коначним елементима проучавају се у области конструктерства од краја 1980-тих. Истраживања у области метода рачунарске оптимизације спроводили су Блестингер (Bletzinger) и Рам (Ramm) у сарадњи са колегама са универзитета у Штудгарту. Позната студија оптимизације Сариненовог (Saarinen) пројекта љуске за *Kresge Auditorium* на MIT у Кембриџу, Масачусетс приказана у [Ram04], илуструје могућности спровођења сличних студија за широк спектар проблема. Међутим, истраживања у овој области још увек су претежно у домену академских

кругова, иако тенденција константног унапређења ових техника имплицира различите начине њихове примене у пројектовању. Треба имати у виду да решења која су оптимална искључиво у конструктивном смислу могу бити недовољно успешна по питању других аспеката архитектуре, што намеће компромисе у усклађивању дивергентних захтева. Такође у случају површинских система форме добијене кроз процес оптимизације често су комплексне што отвара проблем рационалности њихове реализације, који може бити превазиђен напредком технологија дигиталне производње.

Један од примера могућности примене еволуционих принципа у креирању генеративних алата за пројектовање оптимизованих структура је *EifForm* (слика 2.1.18) чији су аутори Шеј (Shea), Гартоваја (Gourtovaia) и Зао (Zhao) [She00].



Слика 2.1.18 Пројекат *Hylomorphic*, аутора *Open Source Architecture* реализован коришћењем програма *EifForm* - приказ итерација генеративног процеса [Оре06]

EifForm је заснован на употреби генетског алгоритма и FEA. Форме генерисане овим алатом резултат су улазних параметара које уноси пројектант, а које је могуће прилагодити специфичностима појединачних пројектних сценарија. Овај алат омогућава оптимизацију топологије и геометрије структуре минимизирањем циљева у оквирима дефинисаних ограничења. Излазни податци су конструктивно ефикасне и често визуелно ефектне просторне штапасте структуре. Овим алатом могуће је генерисати алтернативна решења сличних перформанси за одређене сценарије.

Метод еволуционе тополошке оптимизације (Evolutionary Topology Optimization) представљају поступке добијања решења у којима се, за дефинисани материјал, топологија формира на основу присуства напрезања у ограниченој области (површини или запремини). Начелно тополошка оптимизација фокусирана је на оптималну искоришћеност материјала у оквирима одређеног простора/домена пројектовања под утицајем спољашњих сила [Sig94]. У овим итеративним поступцима, у којима структура еволуира у оквиру дефинисане енvelope материјала, за процену напрезања у сваком итеративном кораку користи се FEA. Овим поступцима често се комбинују оптимизација топологије и геометрије структуре. Потребна непомена је да на овај начин добијена решења представљају екстреме, чиме се не оставља могућност за накнадна подешавања или промене. На основу овог концепта развијени су бројни поступци попут Сензитивне анализе (*Sensitivity Analysis*), Запремински изотропни материјал са пенализацијом (*Solid Isotropic Material with Penalization - SIMP*), Еволуциона структурална оптимизација (*Evolutionary Structural Optimization - ESO*), Бидирекциона еволуциона структурална оптимизација (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization - BESO*) итд.

SIMP [Ben89] је најпознатија метода тополошке оптимизације у којој се успостављају херуистичке релација између особина материјала у које спадају Јангов модул и густине материјала. У овом приступку густина сваког елемента специфицирана је као независна варијабла која захтева примену тзв. методе регуларизације. Примена SIMP за решавање проблема максималне крутости даје резултате који у формалном погледу теже тзв. структурама Мичел типа (*Mitchell type structures*) [Mic04]. ESO методу формулисали су Ксие (Xie) и Стивен (Steven)

раних 1990-тих [Que98], [Xie93], [Xie97]. Метода је заснована на једноставном концепту постепеног уклањања неефикасног материјала (елемената) из структуре (FEA модела), на основу резултата FEA која се спроводи у свакој итерацији. У овом процесу резултујућа структура еволуира у правцу свог оптималног облика и топологија. Унапређењем ESO методе формулисана је BESO метода [Que98], [Yan99], код које је примењена бидирекциона стратегија, којом је омогућено симултано уклањање и додавање материјала. Ефикасност елемената прорачунава се коришћењем сензитивне анализе разматране критеријумске функције или може бити додељена интуитивно [Hua10].

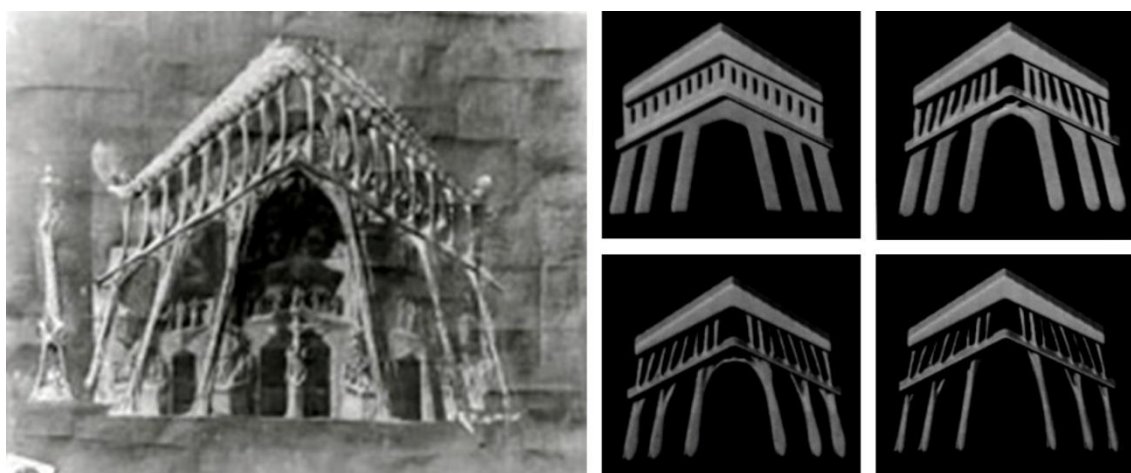
Доступан је један број програма који имплементирају ове алгоритме, попут *TopOpt* [Top09]. Алгоритми BESO процедуре за случајеве решавања 2D и 3D проблема имплементирани су као *BESO2D*, *BESO3D* програмске екстензије за *ABAQUS* и *BESO Engine Version 1.3. Beta* програмска екстензија за *Rhinoceros*® [Zuo12]. Еволуциони алгоритам је имплементиран и у *Milipede* компоненти за *Grasshopper*.

Постоји одређени број пројеката у којима су алати еволуционе тополошке оптимизације искоришћени за унапређење механичких карактеристика идејних архитектонских решења и тзв. пост-дизајн оптимизацију попут пројеката Китагата центар (*Kitagata community center*) у Јапану чији је аутор Исозаки (Isozaki). У случају овог пројекта сензитивна анализа искоришћена је за аутоматизацију процес, у оквиру ког су решења евалуирана применом FEA. Као и пројекта Грин Грин парк (*Grin Grin Park*) или крематоријм Какамигахара (*Crematorium Kakamigahara*), Фукуока, Јапан који је реализован у сарадњи архитекте Ито (Ito) и пројектанта конструкције Сасакија [Sas13].

Практична примена ESO/BESO метода у концептуалној фази архитектонског пројектовања ограничена је на неколико пројеката Сасакија и истраживања оптимизације високих објаката која врши *Black Box* у оквиру SOM из Чикага [SOM12]. Најпознатији пример могућности коришћења аналитичких пројектантских принципа на генеративни начин и за истраживања кроз пројекат представља конкурсно решење за нову станицу брзог воза у Фиренци, Италија из 2003. године, чији аутор је архитект Исозаки, а пројектант конструкције Сасаки, у

коме је BESO метода заснована на нивоу напона [Chu03] коришћена како би се генерисао оптималан облик структуре која носи кровни покривач [Hua10]. Овај објекат није реализован међутим, сличну идеју исти пројектантски тим применио је за објекат Конгресног центра у Катару. Пројекти за пешачке мостове за аутопут у Аустралији, које су пројектовали *BKK Architects* у сарадњи са *Innovative Structures Group* представљају још један пример примене ових метода. Применом BESO методе креиране су конструктивно ефикасне елагантне форме употребом различитих приступа и граничних услова како би се добиле варијације решења [Chu03], [Hua10].

У оквиру истраживачког пројекта који је 2004. године спровела *Innovative Structural Group* и *Spatial Information Architecture Laboratory* на RMIT у Аустралији [Hua10], једна од студија случајева била је моделовање фасаде Гудијеве Саграда фамилије [Bur05]. Студијом је указано на то да Гаудијеве референце на природни раст и морфогенезу, као и коришћење претходно поменутих техника израде физичких жичаних модела имају заједничке основе са концептом еволуционе оптимизације. Како би се пронашло оптимално решење за студију зиданих конструкција коришћен је ESO алгоритам заснован на главним напонима у коме се делови материјала у којим се јављају највећи напони затезања уклањају. Резултат итеративног поступка је конструкција доминантно напрегнута на притисак, обликовно у великој мери слична оригиналном пројекту (слика 2.1.19).



Слика 2.1.19 Студија случаја примена ESO методе за реконструкцију фасаде Саграда Фамилије у Барселони, пројектанат Гаудија: део сачуване фотографије Гаудијевих оригиналних цртежа фасаде /лево/; еволуција фасаде [Hua10]

Пример 6³⁷

Примером су разматрани потенцијали примене еволуционих рачунарских метода у пројектовању и истраживању конструктивно ефикасних форми. Циљ је да се укаже на предности примене ових метода као пројектантских алата у концептулаој фази. На слици 2.1.20 илустрован је пример примене BESO методе у поступку тражња форме двострано укљештене греде. За прорачун је коришћен *BESO Engine Version 1.3. Beta* програмска екстензија за *Rhinoceros® 4.0* (развијена на *MIT University*, Аустралија) [Hua10].

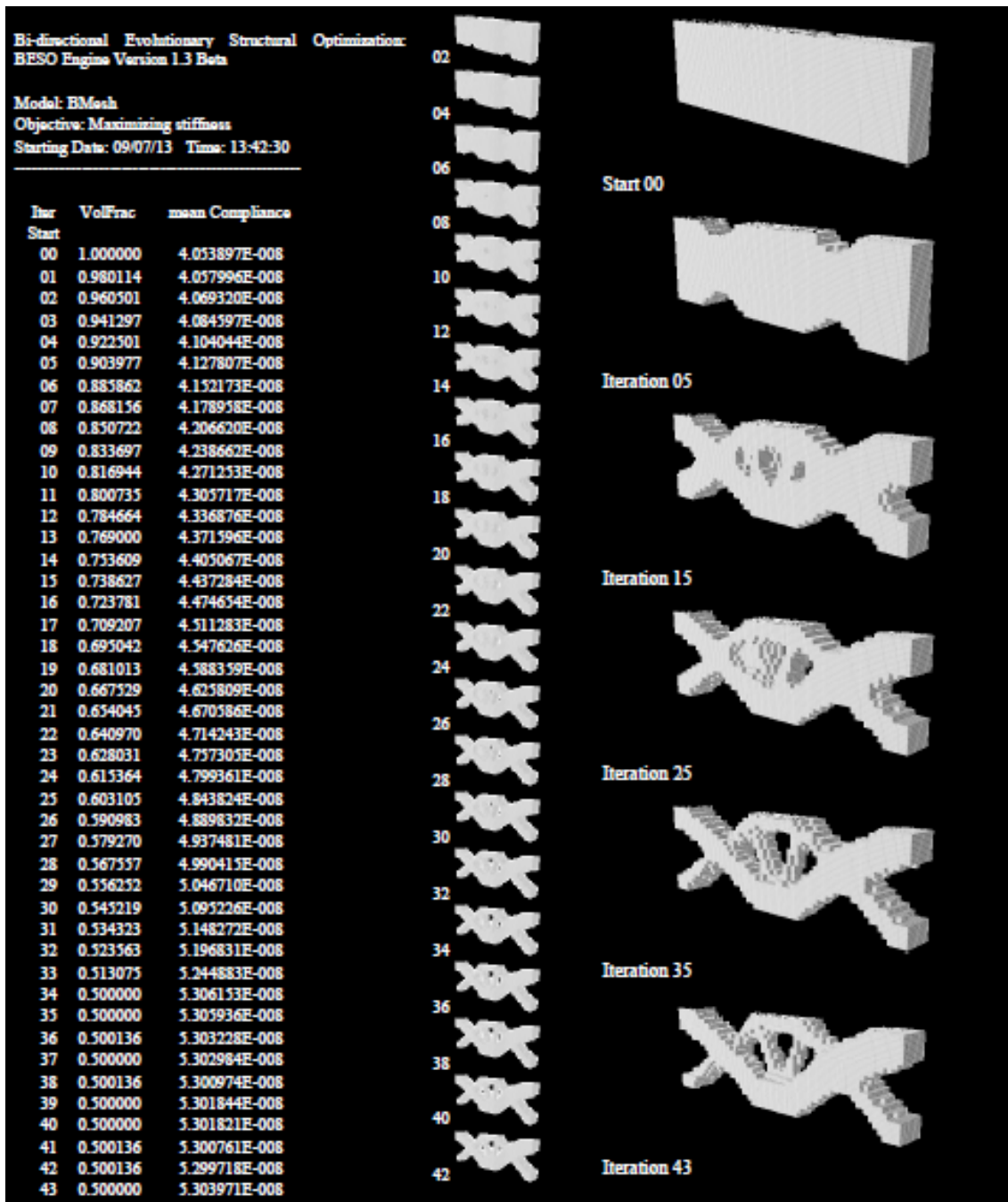
Домен пројектовања је двострано укљештена 3D греда (1600x100x300cm) оптерећена на средини распона концентрисаном силом $F=1000N$. Структура је моделована коришћењем 7400 осмочворних тродимензионалних (*brick*) елемената. У поступку моделовања коришћене су следеће вредности материјалних константи - Јанговог модула еластичности $E=200GPa$ и Поасонов коефицијент $\nu=0.3$. Коришћени су следећи *BESO* параметри: еволуциони однос запремине $ER=2\%$, $AR_{max}=50\%$, пречник филтера којим се неутрализује зависност решења од мреже коначних елемената $r_{min}=4.65mm$, дозвољена толеранција конвергенције $\tau=0.1\%$, а проценат циљне запремине је био 50%. До конвергенције је дошло након 44 итерације.

Овај једноставан пример демонстрира ефикасност *BESO* методе чије је резултате могуће користити за рационално обликовање структура. С обзиром да се у *BESO* за моделовање користе коначни елементи, добијено решење има на зубљене неравне ивице, које у циљу практичне примене могу бити конвертоване у глатке коришћењем различитих техника за обраду слике, и алгоритама за глачање (*smoothing algorithms*).

BESO техника представља корисан алат за истраживања структурално ефикасних форми у току концептулане фазе пројектовања, међутим потребна су даља истраживања како би се унапредила применљивост ове технике у практичним пројектним проблемима и како би технологија постала доступнија и пријемчивија архитектама. Такође, иако примена метода еволуционе тополшке

³⁷Пример је објављен као део рада под називом *Evolutionary Computation in Design of Architectural Structures* у зборнику научно-стручног симпозијума *Инсталације & Архитектура 2013*[Mil13b].

оптимизације може бити инспиративна, примедба је да су добијена решења ликовно слична, што у извесном смислу такође намеће оправдано ограничење потребе за њиховом распрострањенијом употребом у процесу конципирања архитектонских форми. Упркос, ове методе омогућавају архитектама да прошире спектар могућих структуралних форми и да остваре пројектна решења која нису само структурално ефикасна већ и естетски привлачна.



Слика 2.1.20 Еволуциона оптимизација структуре двоструко укљештене греде оптерећене концентрисаном силом на средини распона

2.2 Генеративна оптимизација

Између пројектне намере и оптимизације

Пројектно решења настаје у интеракцији намера и ограничења. Оптимално решење јавља се као рационалан одговор на ограничења, а захтев за ефикасношћу укорењен у најстарије амбиције архитектонске дисциплине, добија нове аспирације у контексту примене дигиталних технологија. Нови алати омогућили су пројектовање често ирационалних решења, фокусираних претежно на ефекте визуелних карактеристика. У циљу побољшања перформанси оваква решења често се подвргавају пост-дизајн оптимизацији перформанси, која обично води ка усвајању компромисних резултата, понекад удаљених од иницијалних намера. Интерпретација и давање на тежини одређеним ограничењима представља део артикулације пројектне намере. Такође примена реалних информација за продукцију пројектних решења у процесу проналажења форме потенцијално отвара могућност пројектовању да буде објективно утемељено. У оквирима овог рада оптимизација је искоришћена као генеративна метода у процесу пројектовања површинских конструктивних система.

Оцена ефикасности као мера перформанси, уобичајено доминира у домену инжењерства, где је деривација форме кроз анализе засноване на перформансама стандардан приступ. Оптималан резултат представља решење добијено коришћењем одрађених рачунарских метода. Оптимално се у том смислу односи на решење нумерички одређено у оквирима поставке анализе и оптимизације, где дефиниција граничних услова такође представља предмет пројектних разматрања. Формулација комплексних механичких процеса у абстрактан, целовит и рационалан модел круцијални је корак процеса оптимизације структура. Уобичајено се проблем оптимизације описује критеријумском функцијом (*objective function*) и ограничењима (*constraints*). У многим случајевима формулација критеријумске функције захтева добро разумевање стратегије оптимизације коју је потребно применити. Важна тачка поставке оптимизације је спецификација пројектних варијабли. Избор параметара оптимизације имплицира

примену различитих стратегија, док су диманзије простора претраге детерминисане бројем независних променљивих.

Док ограничења дефинишу домен, критеријумске функције користе се за процену квалитета, или евалуацију тренутног решења. Тренутно рачунари омогућавају пројектантима симултано разматрање различитих пројектних захтева. Увођење више критеријума процене води сложенијој мултикритеријумској поставци проблема оптимизације. Манипулација у оквирима одређених граничних услова динамичних интерактивних симулација представља један правац тражења оптималних решења, међутим могућ је и приступ у коме се подешавањем и прилагођавањем граничних услова и сагледавањем утицаја тих радњи на резултате добијају повратне информације за формулисање услова наредне итерације. У оба случаја израз пројектне намере помере се са предлагања формалног решења према спецификацијама параметара, полазних услова и самог система оптимизације. Оптимизација тако постаје процес пројектног истраживања, где се и решења и почетни услови константно мењају како би одговорили подешавањима која врши пројектант и повратним подацима система (*system feedback*). Вероватније је да ће се различите форме равнотеже јавити у таквим процесима него у случају линеарне оптимизације орјентисане само на почетни циљ.

Померањем изрази пројектне намере са крајњег решења на систем који то решење креира, процес пројектовања добија једну врсту објективности. Овај процес карактерише експлицитна дефиниција улазних података, примењеног система трансформације и евалуације крајњих производа. Такође насупрот конвенционалног приступа који карактеришу експлицитне одлуке пројектанта, у овом приступу користе се рачунарске симулације које имају капацитет да управљају параметраски дефинисаним дигиталним моделима, и врше унапређења геометрије на основу повратних података резултата симулација. У овој поставци уместо као проблем-солвери, технике оптимизације користе се као стимулативни, интерактивни генератори пројектних решења, као алати корисни за истраживање структурално ефикасних облика у концептуалној фази пројектовања, који омогућавају пројектантима да прошире спектар могућих формалних предлога.

2.2.1 Оптимизација структуралних перформанси

Унапређење структуралних перформанси постиже се оптимизацијом која начелно у области конструкторства представља процес избора конструктивног система, материјала, облика, диманзија, својстава површина и других особина са циљем да се испуне функционални задаци конструкције, остваре најбоље перформансе и задовољи низ услова и ограничења. Повећање меморије и брзине рачунара заједно са развојем и унапређењем алгоритама утицали су да ове методе, чије је разматрање до скоро било везано за уске оквире академског интересовања, постану све чешће предмет експеримената и практичне примене једног броја инжењера и архитеката. У том смислу значајне истраживачке активности усмерене су ка креирању све доступнијих, једноставнијих, поузданијих и ефикаснијих алгоритама и софтверских програма, а значајан прогрес направљен је у развоју теорија, метода и њиховој примени у решавању различитих проблема.

Пројектовање и анализа структура захтевају моделовање система како би се дијагностификовале перформансе. За ма коју круту љуску, анализа је неодвојиво повезана са геометријом површи, њеним ослонцима, материјалним карактеристикама и оптерећењем. Ране студије се обично спроводе током концептулане фазе пројектовања применом приказаних техника тражења форме. Како облик површи постаје све више артикулисан, спроводе се детаљне анализе, које укључују све релевантне случајеве оптерећења који се могу десити у датом географском контексту, специфичне особине терена, фундирања и специјалне случајеве оптерећења.

У поређењу са разматраним техникама проналажења форме, оптимизација се може сматрати изазовнијим поступком. Њено коришћење омогућава већу слободу као и креирање нових, ефикасних решења површинских структура. Већина метода заснована је на примени FEA. У сажетом приказу различитих поступака оптимизације, о којима је детаљније информације могуће пронаћи у следећим изворима [Zlo75], [Aro04], [Aro07], [Spi09], [Adr14], посебана ће задршка бити на приказу генетских алгоритама, чије је опширније и потпуније објашњење могуће је пронаћи у [Sch95], [Mit98], [Aro04]. Наведени извори основа су за писање наредних поглавља.

2.2.1.1 Принципи оптимизације

Формулација проблема оптимизације механичких особина генерално може бити изражена на следећи начин:

$$\begin{aligned} \text{Минимизирати} \quad & f(s, u), \quad s \in \mathbb{R}^d & (2.2.1) \\ \text{тако да} \quad & g_i(s, u) \leq 0, \quad i = \{1, \dots, n^g\} \\ & h_j(s, u) = 0, \quad j = \{1, \dots, n^h\} \\ & s_l \leq s \leq s_u \end{aligned}$$

где је вектор s пројектна варијабла; u варијабла стања (нпр. померање); f функција евалуације; g_i су услови неједнакости, h_j услови једнакости; а s_l и s_u најнижа и највиша граница вредности пројектне варијабле.

Тип пројектне варијабле утиче на карактер проблема оптимизације. Уобичајене врсте варијабли су параметри материјала, попречног пресека, геометрије, дистрибуција густине у оквиру домена. Избор параметара води различитим стратегијама, док димензије d простора пројектовања \mathbb{R}^d одређују број независних променљивих. Они одређују алгоритме и нумерику који су применљиви за дати случај оптимизације.

Критеријумском функцијом или функцијом евалуације (*objective function*) процењује се квалитет тренутног пројектног решења. Критеријуме је могуће формулисати и помоћу неколико подфункција што представља случај мулти-критеријумске оптимизације, код које постоји захтев за дефинисањем додатних правила у циљу селекције најбољег решења. Проблеми оптимизације са више функција евалуације решавају се применом вишекритеријумских алгоритама [Esc90], што је тема која излази из оквира предметног истраживања.

Услови неједнакости g_i и једнакости h_j детерминишу домен у оквиру ког су број примењених услова неједнакости и једнакости означени са n^g и n^h . У процесу оптимизације статус ограничења неједнакости може бити активан, неактиван или сувишан, док ограничења једнакости могу бити активна или сувишна. Фундаментална особина проблема оптимизације је да број активних ограничења мора бити мањи или једнак броју пројектних варијабли.

Критеријумска функција и ограничења уобичајено се називају функцијама реакције (*response functions*) због тога што је њихов основни задатак да опишу реакцију структуре. У оптимизацији конструкција уобичајено коришћене функције реакције описују проблеме попустљивости³⁸, масе, напона, сопствене фреквенције, извијања, оптерећења итд.

Класификација проблема у зависности од типа варијабли може се извршити на оптимизацију: материјала (*material*), димензија (*size*), облика (*shape*) и топологије (*topology*).

Оптимизација материјала подразумева решавање проблема у којима су варијабле параметри материјала, док су топологија и геометрија модела конструкције константни. Примери варијабли материјала су дистрибуција арматуре бетона, правац влакана или број слојева код композитних материјала и сл. Док је поступак дефинисања функције релативно једноставан, проблеми се испољавају у фази постпроцесирања у којој је потребно извршити превођење добијених резултата (оптималног материјала) у неки од постојећих материјала.

Оптимизација димензија најједноставнији је и најстарији приступ побољшања структуралних перформанси, а представља проналажење оптималног решења варирањем вредности димензија попречних пресека линијских или дебљине површинских система. Код ове врсте оптимизације геометрија и топологија модела су константни, а аргумент функције реакције су параметри димензија. Могући резултати оваквих процеса су структуре минималне тежине које испуњавају ограничења у погледу максималних померања и напона.

Оптимизација облика представља сложенији вид оптимизације, а подразумева решавање проблема варирањем геометријских параметара који одређују форму конструкције, нпр. координата чворова коначних елемената, координата контролних тачака САД модела, тзв. кутија за обликовање (*morphing boxes*) или величине базних вектора облика (*shape basis vectors*). У случају ове врсте оптимизације топологија структуре остаје непромењена.

Оптимизација топологије користи се код дискретних конструктивних система (решетки или рамова) за проналажење оптималне просторне конфигурације

³⁸ Попустљивост (*compliance*) представља величину инверзну крутости (*stiffness*).

елемената система (штапова), док се код континуалних конструктивних система користи за одређивање најбољих позиција и геометрије отвора у оквирима домена пројектовања.³⁹ У овим проблемима ни геометрија ни топологија нису претходно дефинисане. Основни параметри проблема тополошке оптимизације су простор пројектовања (*design space*) и гранични услови модела, а методом се израчунава неједнакости дистрибуција материјала у дефинисаном простору.

Велики број проблема оптимизације конструкција заправо захтева комбиновање различитих варијабли. У том смислу оптимизацију материјала и димензија погодно је комбиновати са параметрима облика, док је начелно комбиновање са тополошким параметрима теже изводљиво.

Функције реакције (*response functions*) уобичајено означавају критеријуме (*objective*) и ограничења (*constraints*) дате једначином (2.2.1). Начелно ове скаларене функције зависе од варијабли оптимизације s и варијабли стања u . Примена метода оптимизације које су засноване на градијентима захтева диференцијабилност функција како би се израчунали градијенти првог и другог реда. Постоји и могућност да се изврши преформулација сумирањем критеријума помножених тежинама (*weighted objectives*):

$$f(s, u) = \sum_i^{num_f} w_i \cdot f_i(s, u) \quad (2.2.2)$$

где је f_i један критеријум, а w_i одговарајући тежински фактор.

У складу са карактеристикама механичких модела конструктивних система који представљају основу разматрања и функције реакције могу бити линеарне и нелинеарне. Где се подсећања ради, геометријски линеарни механички модели конструкције користе за решавање проблема малих деформација чиме је омогућено занемаривање утицаја померања на механичке особине попут крутости система, док нелинеарни модели садрже утицаје нелинеарности поља померања на механичке особине чиме се омогућава реалније израчунавање функција реакције. Неке од функција, чији је детаљан приказ могуће пронаћи у [Fir10] су маса, напон, линеарно извијање, сопствена фреквенција, линеарна и нелинеарна попустљивост, итд.

³⁹Најчешће је тополошка оптимизација повезана са моделима дискретизованим површинским или солид елементима. Примена код љуски је у суштини могућа [Kem04] али интерпретација добијених резултата није једноставна.

2.2.1.2 Методе оптимизације

Разијени су бројни алгоритми којима је могуће решити проблем формулисан једначином (2.2.1), а који се начелно могу поделити према реду информација које узимају у разматрање на: методе засноване на градијентима (*gradient based methods*) и методе нултог реда (*zero order methods*) (слика 2.2.1). Начелно, ред информација представља меру ефикасности примењене стратегије.

Методе засноване на градијентима за израчунавање оптималног решења користе изводе функција реакције. Градијенти (*gradient*) или сензитивност (*sensitivity*) функције реакције израчунавају се коришћењем неколико метода, које је могуће поделити на директне методе (*direct methods*) и методе локалне апроксимације (*local approximation methods*). Док се директним методама пробелми оптимизације постављени једначином (2.2.1) решавају директно, што може узроковати лошију конвергенцију услед лоше формулације проблема, методама локалне апроксимације на сваком кораку израчунавају се апроксимације оптимизованог проблема како би се обезбедило тачно разматрање ограничења или ефикасан правац претраге. У том смислу рационална локална апроксимација, која се на пример спроводи помоћу казнених фактора (*penalty factors*), повећава робусност проблема и ефикасност стратегија за решавање.

Методе засноване на градијентима могуће је поделити на: методе првог реда (*first order methods*) и методе другог реда (*second order methods*). Методе првог реда у прорачунима примењују искључиво градијенте првог реда. Предност ових метода за решавање проблема оптимизације конструкција је у томе што захтевају мали број итерација и мали број функција евалуације у поређењу са методама нултог реда. Свака итерација уобичајено се састоји од сензитивне анализе⁴⁰ првог реда и неколико бројева евалуације система за линијску претрагу. Придружене формулације сензитивне анализе омогућавају ефикасно израчунавање градијената за велики број критеријумских функција. Методе другог реда користе изводе првог и другог реда у прорачунима. Начелно, евалуација информација другог реда побољшава квалитет правца претраге међутим прорачуни су прилично захтевни и изискују више меморије.

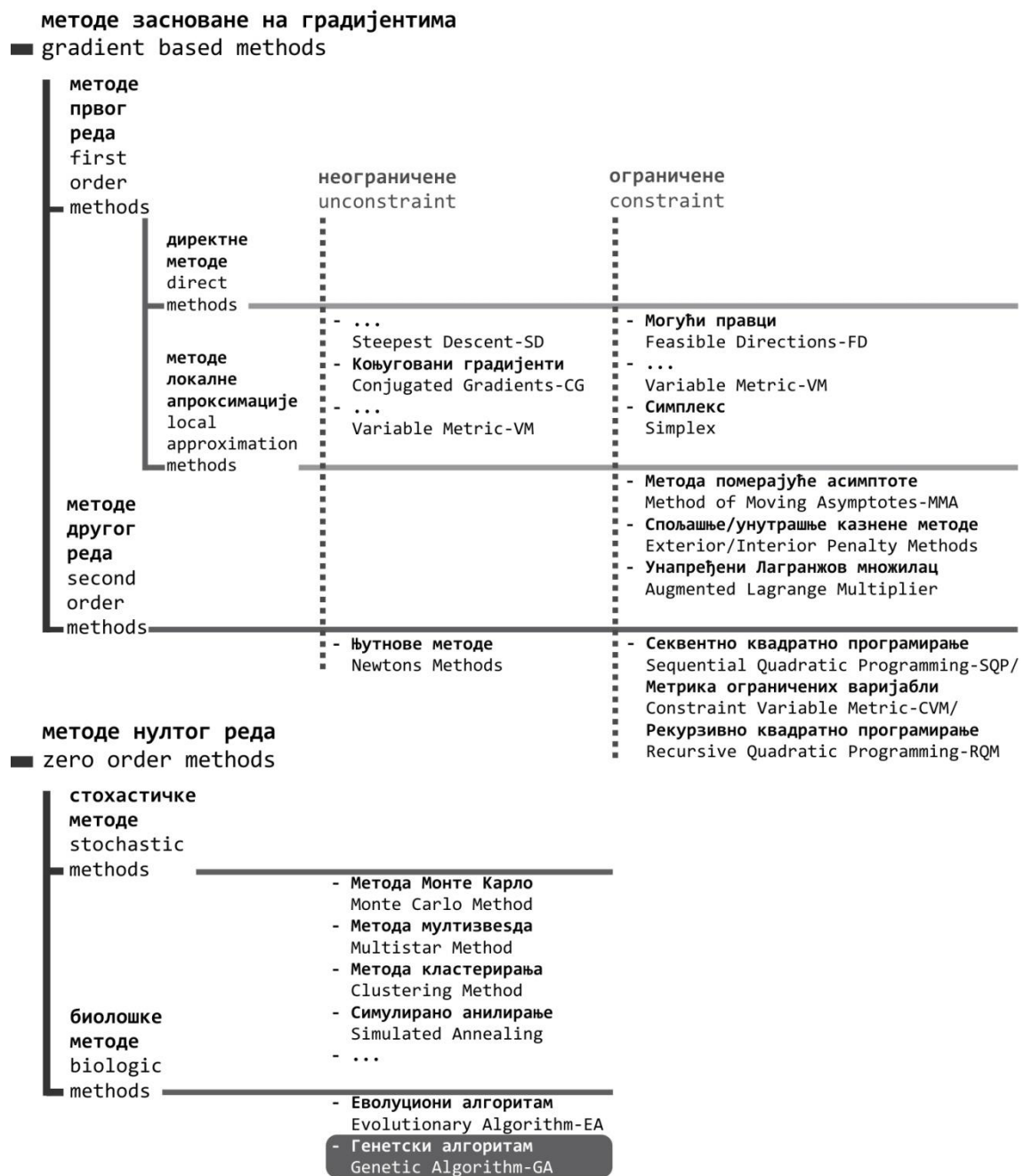
⁴⁰Сензитивна анализа представља методу анализе ризика, којом се анализира како несигурност у резултате математичког модела или система може да се расподели на различите изворе непоузданости његових улазних података.

Методе нултог реда примењују се код веома комплексних проблема чије критеријуме није могуће описати у затвореној форми или у случају проблема са дисконтинуалним изводима. У оба случаја израчунавање континуалних градијената није могуће, чиме је практично онемогућена примена метода заснованих на градијентима. Методе нултог реда деле се на: стохастичке и биолошке методе.

Стохастичке методе имају за циљ проналажење глобалног минимума критеријумске функције. Начелно све стохастичке методе врше глобалну и локалну претрагу. Глобалном претрагом се локализују могући региони минимума што омогућава понашање глобалне конвергенције, док се локалном претрагом проналази минимум одређеног региона, чиме се побољшава ефикасност методе услед редукције броја функција евалуација. Да би конвергирали стохастичким алгоритмима је потребан велики број функција, што у случају проблема оптимизације структура у којима постоји велики број пројектних варијабли и варијабли стања захтева значајно време потребно за извођење прорачуна из разлога јер се готово све функције реакције морају оценити како би се решила једначина система. Ова врста неефикасности у погледу времена потребног за прорачун особина је стохастичких али и биолошких алгоритама, а може се елиминисати применом методе којом се редукује потребан број функција евалуације конструкцијом површи реакције (*response surface*) заснованом на функцији евалуације. Детљаније информације о стохастичним алгоритмима могуће је пронаћи у [Aro04].

Биолошке метод су засноване на принципима природних система. У ове методе убрајају се еволуциони алгоритми (*Evolutionary Algorithm* - EA) и генетски алгоритми (*Genetic Algorithm* - GA). У основи ових алгоритама су стратегије које представљају моделе природних еволуционих процеса које је Спенсер (Spencer) назвао *опстанак најспособнијих* (*survival of the fittest*), а које су формулисане у [Spe64]. Специфичност ових алгоритама је репрезентација проблема групом могућих решења - *популацијом*, над којом се примењују оператори селекције, укрштања и мутације. Односно, одабрана решења из популације се међусобно комбинују како би формирала нову генерацију решења која би потенцијално садржала боље потомке. Генетски алгоритми имају комплексније механизме

мутације и селекције. Основни недостатак биолошких стратегија огледа се у нумеричкој захтевности. У случају оптимизације структура проблем оцене прилагођености јединке повезан је са конструктивним особинама које се уобичајено формулишу системом једначина који је потребно решити за сваку јединку на сваком итеративном кораку што је у нумеричком смислу захтевно. Општа формулација генетског алгоритма, елементи и оператори биће приказани у наставку рада.



Слика 2.2.1 Таксономија метода оптимизације

2.2.2 Генетски алгоритам

Под појмом генетски алгоритми подразумева се фамилија алгоритама који, у општем случају, служе за решавање најразличитијих проблема у областима биологије, вештачке интелигенције, инжењерства, економије и менаџмента, социолошких наука, итд. У области архитектонског конструкторства генетски алгоритми примењују се у процесима проналажења форме, конфигурације и оптимизацији конструктивних система. Као и одређени број других математичких приступа, попут неуронских мрежа (*neural networks*), фази логике (*fuzzy logic*), техника симулираног анилирања (*simulated annealing*), роја честица (*particle swarm*), оптимизације мрављих колонија (*ant colony optimization*) или алгоритама жабљег скока (*shuffled frog leaping algorithm*), и генетски алгоритми формулисани су као покушај објашњења или имитације феномена везаних за природне системе. Процес проналажења оптималних параметара одређеног система посредством ових робустних, ефикасних и флексибилних алата заснован је на неким од генетских принципа присутних у природи, као што су наслеђивање (*inheritance*), селекција (*selection*), укрштање (*crossover*), мутација (*mutation*), закон способнијег (*survival of the fittest*), миграција (*migration*) итд. За разлику од класичних адаптивних алгоритама, код којих се испољава проблем проналажења оптимума система са више локалних екстрема, генетски алгоритми различите делове n -димензионалног простора \mathbb{R}^n претражују стохастички, чиме се повећава вероватноћа проналажења глобалног екстрема.⁴¹

У ширем смислу, генетски алгоритам је сваки еволуциони алгоритам који оперише на некој популацији користећи операторе селекције, укрштања и мутације за добијање нових тачака у простору претраге. У ужем смислу, појам генетског алгоритма односи се на тзв. *канонични модел* чију је теоријску и математичку основу 1960-тих поставио Холанд (Holland) се својим тимом на Универзитету у Мичигену [Hol75].⁴² Према Голдбергу (Goldberg) [Gol89] четири

⁴¹Класични адаптивни алгоритми добро функционишу у случају система са једним оптимумом (једним максимумом или минимумом). У случају комплексних простора претраге, тј. система са више локалних екстрема, постоји могућност да алгоритам заврши око неког локалног екстрема који може бити прилично далеко од глобалног екстрема.

⁴²Иако се још од 1950-тих спроводе истраживања и ради на развоју различитих еволуционо инспирисаних алгоритама, генетски алгоритам је тек 1975. године формализован као резултат општих студија феномена природне адаптације и начина симулације биолошке еволуције у компјутеском систему. Холанд их је иницијално назвао генетским плановима

основна аспекта, која разликују генетске алгоритме од осталих метода и процедура оптимизације и претраге су:

- оперишу кодираним верзијама скупа параметара, а не са самим параметрима;
- претражују користећи популацију могућих решења, а не једно решење;
- неоптерећени су секундарним информацијама - искључиво им је потребна критеријумска функција (*fitness function*);
- засновани су на пробабилистичким транзиционим правилина (*probabilistic transition rules*), а не на детерминистичким правилима - користе случајне (*randomized*) операторе.

Осмишљени тако да опонашају процесе из природе, генетски алгоритми покушавају да пронађу најбољи хромозом манипулишући са хромозомским материјалом, где се под хромозомом подразумева кодирани запис неке од анализираних величина. Оваквим приступом могуће је решити проблеме без увида у њихову комплексност и природу, с обзиром да су алгоритми искључиво фокусирани на ниво квалитета који показује произведени хромозом. Један од проблема генетских алгоритама представља недостатак јединствене теоријске основе, тј. математичких доказа, што је последица бројних варијација и типова генетских алгоритама. У том смислу, пракса је да се квалитет одређеног типа генетског алгоритама оцењује емпиријски, експерименталним тестирањем на одређеном проблему.

2.2.2.1 Елементи генетског алгоритама

Полазиште је да се ма који јасно дефинисан адаптивни проблем може формулисати и решити помоћу генетског алгоритама кроз процес који подразумева детерминисање:

- схеме репрезентације,
- начина евалуације,
- параметара и варијабли којима се контролише алгоритам и
- начина одређивања резултата и критеријума терминације.

(*genetic plans*), да би убрзо били преименовани од стране његовог докторанта Де Јонга (De Jong). Значајније признање генетски алгоритми добијају тек од 1980-тих.

Терминологија која се примењује преузета је углавном из биологије, међутим, за већину појмова, постоје и еквиваленти технички термини. Преглад и опис одабраних основних појмова дати су табелом 2.2.1.⁴³

Табела 2.2.1 Номенклатура генетског алгорита

природни системи	термин	опис
ген <i>gene</i>	компјутерски системи својство/облик, карактер, детектор <i>feature, character, detector</i>	основна јединица генетског кода кодирана варијабла конкретног проблема
јединка, фенотип <i>individual, phenotype</i>	скуп параметара, алтернатива решења, тачка <i>parameter set, solution alternative, point</i>	тренутна апроксимација решења
генотип <i>genotype</i>	структура <i>structure</i>	генетска конституција јединке сваком генотипу одговара један фенотип
хромозом <i>chromosome</i>	низ/стринг <i>string</i>	кодирана представа јединке која одређује особине сваке јединке а састоји се из више гена
алела <i>allele</i>	могућа вредност <i>feature value</i>	могуће уређење/поставка гена
локус/место <i>locus</i>	позиција стринга <i>string position</i>	позиција гена у генетском коду
родитељи <i>parents</i>		хромозоми који учествују у репродукцији
потомство <i>offspring</i>		хромозоми који настају као резултат репродукције родитеља
популација, генерација <i>population, generation</i>		скуп хромозома над којима се спровode операције GA ⁴⁴
епоха <i>epoch</i>	итерација <i>iteration</i>	једна итерација генетског алгорита
евалуација/процена прилагођености <i>fitness evaluation</i>	функција евалуације, функција циља, критеријумска функција <i>evaluation function, objective function, criteria function</i>	функција која се користи за процену прилагођености/квалитета
прилагођеност/подобност <i>fitness</i>		вредност која се добија трансформацијом резултата евалуације - оцена перформанси
селекција <i>selection</i>	дупликација <i>duplication</i>	оператор којим се врши одабир хромозома које ће учествовати у репродукцији
репродукција, укрштање <i>reproduction, crossover</i>	рекомбинација <i>recombination</i>	оператор којим се врши стварање нових хромозома
мутација <i>mutation</i>		оператор којим се врши модификација елемента хромозома
епистаза <i>epistasis</i>		интеракција између параметара

⁴³Напомена је да генерално треба избегавати комбиновану употребу термина, због чега ће се у оквирима овог рада користити термини који се уобичајено користе у биологији.

⁴⁴Термин се не користи за скуп јединки, већ за скуп њихових кодираних представа - хромозома, из разлога што се све операције спровode над хромозомима изузев евалуације која се обавља над декодираним генотипом.

Карактеристике генетског алгорита могуће је сумирати на следећи начин:

- представљају процедуре паралелног претраживања погодне за примену у системима паралелне обраде података;
- подједнако су погодни за примену у решавању континуалних и дискретних проблема;
- представљају стохастичке методе мање подложне западању у локални екстрем;
- поседују велики степен прилагодљивости чиме се олакшава њихова примена у оквиру проблема структуралне и параметраске идентификације сложених модела;
- сваку тачку параметарског простора или простора решења представљају помоћу кодираног низа/стринга који се назива хромозом;
- сваком хромозому придружена је одређена вредност прилагођености (оцена перформанси), тако да се одређивање те вредности своди на процену вредности функције евалуације у једној тачци;
- уместо једне изоловане тачке генетски алгорита често користе скуп тачака који се назива популација, и који еволуира у правцу што бољег задовољења функције евалуације;
- у свакој генерацији, применом генетских оператора, алгорита производи нову популацију;
- основни генетски оператори су селекција, укрштање и мутација;
- чланови популације који у већој мери задовољавају функцију евалуације имају веће шансе да *преживе* и да учествују у будућим укрштањима;
- након већег броја генерација, популација садржи и чланове који у већој мери задовољавају функцију евалуације односно које карактерише већи степен прилагођености, што је аналогно Дарвиновом моделу еволуције која се одвија кроз случајне мутације и природну селекцију;
- често представљају пример оптимизације засноване на популацији, код кога се поправљају перформансе целе популације а не само одређених јединки.

Процедура се састоји из фаза које је могуће описати на следећи начин:

- **Фаза 1.** Случајно генерисање иницијалне популације јединки, или могућих решења проблема $X(0) = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$, где је N почетни број хромозома.

Следеће операције које се спроводе на популацији могућих решења итеративно се понављају до постизања задовољавајућег резултата:

- **Фаза 2.** Евалуација перформанси - израчунавање успешности (*fitness*) $F(x_i)$ за сваку јединку у текућој популацији $X(t)$, односно новој популацији $X_r(t)$;
- **Фаза 3.** Генерисање нове популације могућих решења коришћењем следећа три генетска оператора (или најмање први):
 1. бирање најбољих јединки за репродукцију нове популације;
 2. рекомбиновање генетских кодова бираних јединки у циљу креирања нових хромозома $X_r(t)$;
 3. примена случајних мутација на генетски код нових јединки;
- **Фаза 4.** Брисање одређеног броја хромозома из популације да би се направило место за нове (*умирање хромозома*).
- **Фаза 5.** Јединка која најбоље задовољава услов у свакој генерацији (итерацији) представља решење, или субоптимално решење проблема. Обустављање петље након постизања задовољавајућег квалитета или одређеног броја итерације.

У једној *epochi*, тј. итерацији, обично се врши само једна *репродукција*.

Могући псеудокод који одговара претходном опису дат је табелом 2.2.2.

Табела 2.2.2 Псеудокод генетског алгоритма

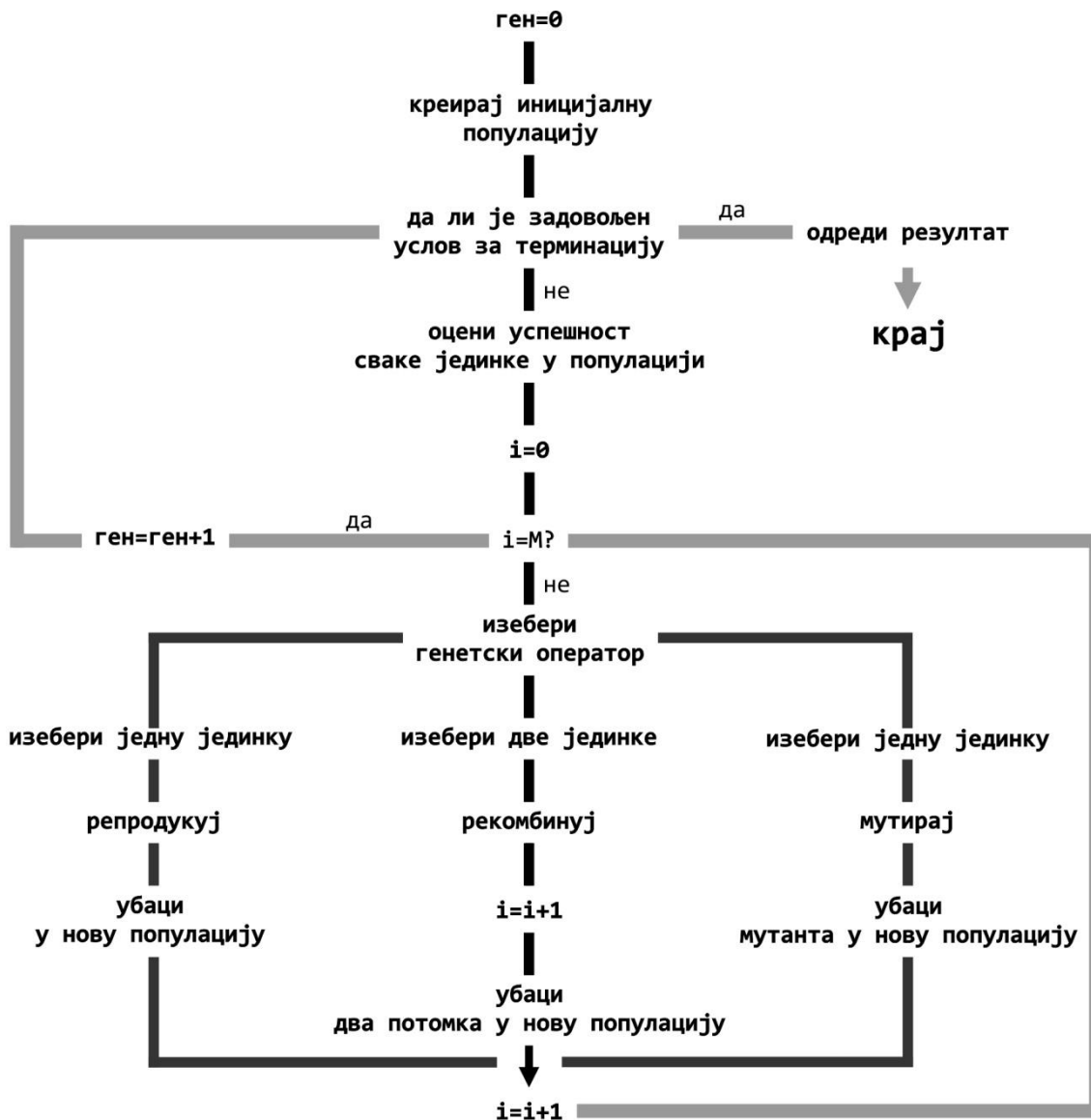
```

01 Sub GA_Procedura()
02   Read ulazne parametre
03   Define domen rešenja
04   For Each <iteration> GA procedure
05     For Each <individual> u populaciji
06       Call GenerateIndividuals*
07       Call Performance (<individual>)*
08     Next
09     //Sortiraj populaciju jedinki na osnovu ocene performansi
10     Call SortPopulation()
11     //Selektuj jedinke koje ce učestvovati u ukrštanju
12     Call Selection()
13     //Kodiraj projektne varijable**
14     Call DecimalToBinary**
15     //Generiši novu populaciju korišćenjem operatora ukrštanja
16     Call GenerateNewPopulation()
17     //Nasumično mutiraj određene gene novih jedinki
18     Call Mutations()
19     //Dekodiraj projektne varijable**
20     Call BunaryToDecimal**
21   Next
22 End Sub

```

Субрутинe означене * дефинишу се у зависности од специфичног проблема, док се оне означене ** користе само у случају бинарног кодирање варијабли.

Дијаграмски приказ типичног генетског алгоритма дат је на слици 2.2.2.



Слика 2.2.2 Дијаграм конвенционалног генетског алгоритма (GA)

С обзиром да генетски алгоритам представља стохастичку методу претраживања, тешко је формално прецизирати критеријуме конвергенције. Терминација алгоритма на класичан начин, тј. задовољењем услова је проблематична, с обзиром да вредности оцене перформанси (*fitness*) у целокупној популацији могу остати непромењене кроз низ генерација, све док се не нађе супериорна јединка. Стога се у пракси генетски алгоритам најчешће прекида након одређеног броја генерација, а затим се проверава квалитет најбољих јединки. Уколико резултат није прихватљив могуће је поновно покретање поступка.

Кодирање је трансформација којом се тачке параметарског простора представљају стринговима ознака. Стрингови представљају низ карактера одређеног записа. Уобичајено је тај запис бинарни $\{0,1\}$, али понекад су, у зависности од структуре проблема који се решава, адекватнији записи који користе природне бројеве, позитивне реалне бројеве, негативне бројеве, дискретне вредности итд.

Класични начин представљања хромозома генетског алгорита је помоћу бинарног вектора фиксне дужине. У случају n -димензионалног простора претраживања (тј. параметарског простора) сваки хромозом се састоји од n -променљивих вредности (координата) од којих је свака кодирана бинарним стрингом. Ако свака од координата има бинарне вредности, тада је хромозом представљен низом од n бинарних вредности. У случају да свака од координата има више различитих вредности са одређеног интервала, тада се свака координата представља d -димензионалним вектором, где 2^d представља укупан број дискретних вредности које координата може да има.

Уобичајени поступци кодирања су бинарно (*binary*) и сиво (*gray*) кодирање. Код бинарног кодирања свака координата параметарског простора представља се бинарним стрингом дужине d (d -димензионални бинарни вектор). За конвертовање променљиве z са континуалног интервала $[z_{min}, z_{max}]$ у d -битни стринг могуће је користити следећи образац:

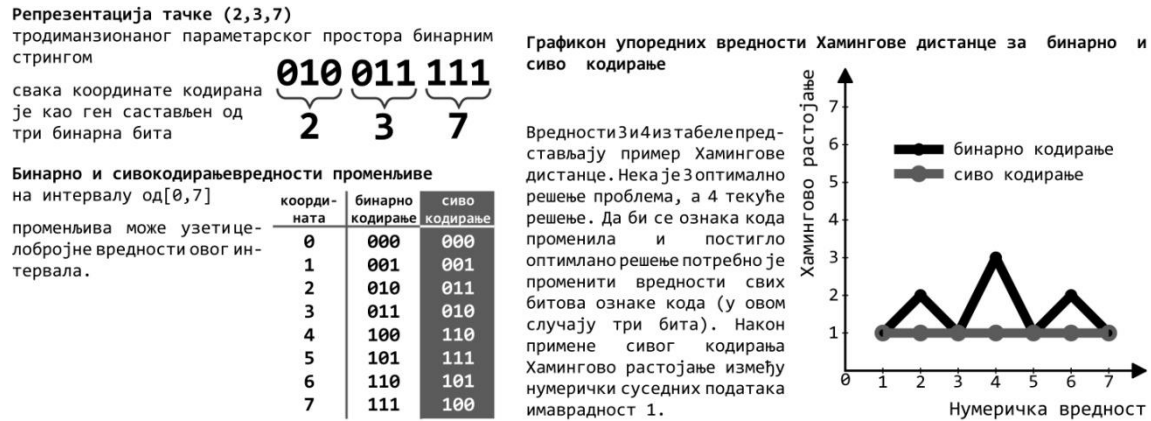
$$(2^d - 1) \frac{z - z_{min}}{z_{max} - z_{min}} \quad (2.2.3)$$

Проблем бинарног кодирања представља тзв. Хамингова (*Hamming*) дистанца, која се формира у случају када две нумерички блиске вредности имају удаљене кодне ознаке. Овај проблем се може решити увођењем сивог кодирања, којим се смањује Хамингова дистанца између суседних вредности, односно чијом применом растојање постаје константно. Превелика Хамингова дистанца може резултирати слабом, пристрасном конвергенцијом. Бинарно кодиране ознаке могуће је трансформисати у сиво кодиране применом следеће трансформације:

$$g_1 = b_1 \quad (2.2.4)$$

$$g_k = b_{k-1}b_k^* + b_{k-1}^*b_k$$

где је b_k k -ти бит бинарног броја $b_1b_2 \dots b_k$; b_1 најстарији бит; b_k^* означава не b_k , + значи логичко или, множење логичко и. Сликаом 2.3.2 приказан је пример кодирања тачке.



Слика 2.2.3 Пример кодирања тачке

Функција евалуације је најчешће формулисана самим проблемом, а потребно је да буде релативно брза јер се спроводи над сваким чланом популације у свакој генерацији.⁴⁵ Први корак након формирања популације представља израчунавање степена подобности, тј. оцене перформанси сваког од њених чланова. Код каноничног алгорита, оцену перформанси могуће је дефинисати као однос вредности перформансе појединца и перформансе целокупне генерације:

$$f(x_i) = \frac{u(x_i)}{u} \tag{2.2.5}$$

где је $u(x_i)$ функција евалуације i -тог хромозома.

Уобичајено је оцена перформанси позитивна вредност, тако да се у случају када критеријумска функција нема само позитивне вредности мора применити поступак скалирања и/или транслације. У случају линеарног скалирања и померања:

$$f(x_i) = au(x_i) + b \tag{2.2.6}$$

где је a фактор скалирања, који је позитиван ако треба максимизирати резултат, а негативан ако га треба минимизирати, док b представља померање (*offset*), које се остварује тако да вредности оцене перформанси буду позитивне.

⁴⁵ Као пример функције евалуације, често се наводи сума квадрата, односно минимизирање те суме. Она служи као (једна од) тест функција за проверу неког генетског алгорита:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad -100 \leq x_i \leq 100 \quad \min(f) = f(0,0, \dots, 0) = 0$$

N је произвољан број, али ради једноставности и брзине рачунања не треба узимати превелике вредности.

Други поступак који је могуће применити представља тзв. *линарно рангирање*, где се ранг чланова користи као оцена перформанси. Овим поступком хромозоми се сортирају од најгорег ка најбољем, тако да најгори има вредност 1 (или 0), следећи 2, наредни 3, итд. У овом случају није потребно прецизно израчунавање вредности функције евалуације, све док постоји тачна информација о рангу чланова популације.

Наведени поступци линеаризације су подложни брзој, или тачније прераној конвергенцији. Односно, број потомака у наредним генерацијама је отприлике пропорционалан подобности појединца. Пошто не постоји ограничење оцено перформанси појединца у текућој генерацији, постоји велика вероватноћа да јединке са високом оценом у првим генерацијама преузму доминацију над репродукцијом и тиме изазову прерану конвергенцију према, највероватније неоптималним решењима.

2.2.2.2 Оператори генетског алгорита

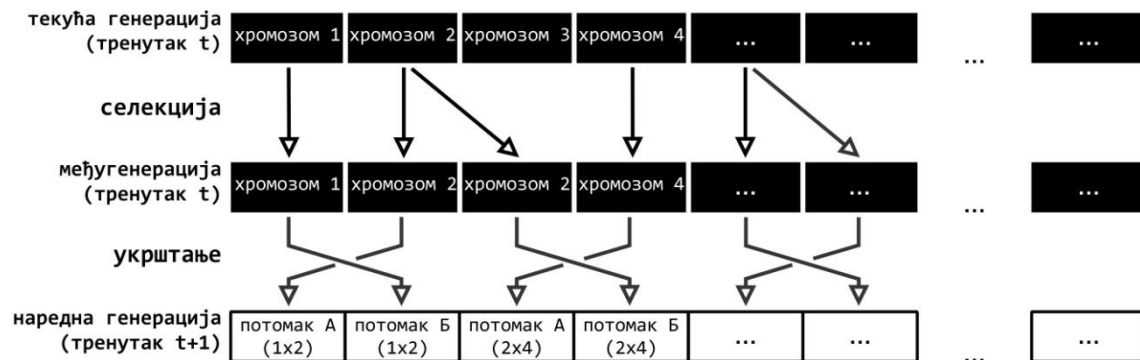
Селекција, укрштање и мутација, су три основна оператора конвенционалних генетских алгоритама. У циљу унапређења ефикасности алгоритама могуће је додати и друге, секундарне оператора, попут нпр. елитизма.

Селекција представља оператор којим се одређују родитељи који ће учествовати у продукцији наредне генерације. Поступак је аналоган поменутом опстанку најспособнијих који је заступљен у природи, где механизам селекције омогућава да се успешни хромозоми репродукују много више од оних који то нису. Под успешношћу - оценом перформанси могу се подразумевати различите особине зависно од контекста, а њена вредност добија се трансформацијом функције евалуације.⁴⁶ У том смислу, хромозоми који имају бољу оцену перформанси имају и веће изгледе да учествују у укрштању.

Селекција се врши након што се за све јединке израчуна оцена перформанси. У фази селекције, непосредно пре рекомбинације, настаје својеврсна међугенерација (*intermediate generation*), која представља помоћну генерацију у једној итерацији генетског алгорита, што је илустровено сликом 2.2.4. Дакле,

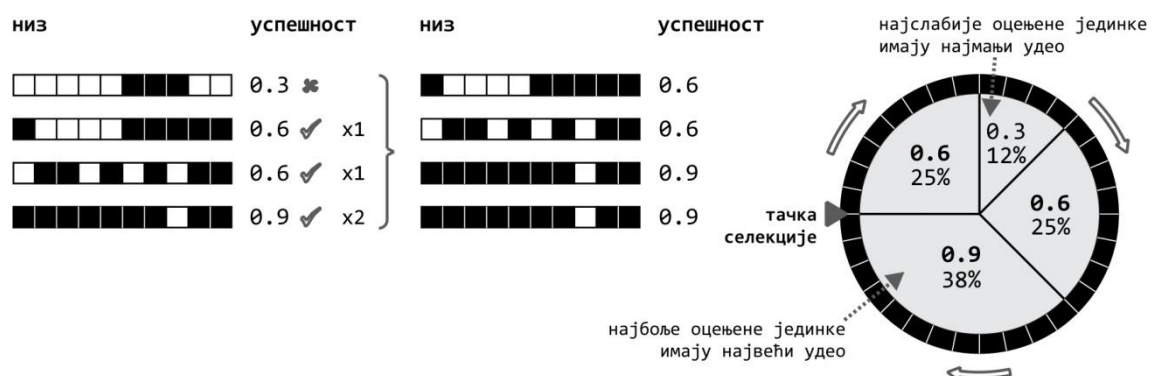
⁴⁶Иако се понекад појмови оцена перформанси и евалуација користе као синоними потребно је направити дистинкцију из разлога што најчешће сирове вредности функције евалуације не могу бити директно коришћене у генетском алгоритму.

међугенерација се добија из текуће генерације (*current generation*), тако што се након израчунавања оцене перформанси за сваку јединку, врши селекција. Вероватноћа да неки хромозом из текуће генерације буде умножен у више примерака и смештен у међугенерацију пропорционална је његовој оцени.



Слика 2.2.4 Графички приказ генерација и етапа једне итерације

Постоје разне технике селекције, а једна од традиционалних је тзв. *селекција рулет-точак пропорционалан успешности* (*fitness-proportionate roulette wheel selection*).⁴⁷ У овој техници популација је мапирана на рулет-точак, тако да број подела на точку одговара броју јединки, што је приказано сликом 2.2.5. На основу оцене перформанси додељене свакој јединци, врши се рангирање, а потом и дефинисање вероватноће њене селекције за генетску репродукцију, што на графичком прилогу кореспондира величини дела (поделе) на рулет-точку (вероватноћа избора хромозома је пропорционална оцени његових перформанси). На овај начин формиран рулет-точак се насумично обрће одређени број пута (онолико колико има јединки у међугенерацији).⁴⁸



Слика 2.2.5 Графички приказ принципа рулет-точак селекције

⁴⁷ Назив је добила због визуелне аналогije са казино рулет-точком.

⁴⁸ Минималан број обртаја је два, што је једнако минималном броју родитеља који ће извршити укрштање.

Постоји више метода селекције. Метода где се при сваком обртању одабира један хромозом назива се *стохастичко одабирање заменом (stochastic sampling with replacement)*. Главни проблем ове технике је што, хипотетички, један хромозом (ма који са оценом перформанси већом од нуле) може да попуни читаву међугенерацију. Метода *стохастичко одабирање са делимичном заменом (stochastic sampling with partial replacement)* превазилази предходни недостатак тако што сваки пут када нека јединка буде одабрана њен удео се смањује за 1,0.

Такође постоје и методе селекције које имплементирају *стохастичко одабирање остатка (remainder stochastic sampling)*. Код ових метода за сваку јединку чија је оцена перформанси већа од 1,0 целобројни део оцене указује на то колико ће се њених копија директно убацити у међугенерацију. Након тога, сви стрингови (укључујући и оне чија је оцена мања од 10) убацују додатне копије у међугенерацију, са вероватноћом која је пропорционална вредности остатка оцене перформанси (тј. нецелобројном делу).⁴⁹ Код *стохастичког одабирања остатка са заменом (remainder stochastic sampling with replacement)*, рулет-точак се прави за остатке. И у овом случају, да би се превазишла теоријска могућност да један хромозом допуни остатак међугенерације, користи се *стохастичко одабирање остатка без замене (remainder stochastic sampling without replacement)*, где се у другој фази (са остацима), хромозом избацује са рулет-точка, након што му буде додељена једна копија на основу његовог остатка.

Стохастичко универзално одабирање (stochastic universal sampling) је алгоритам који има само једну фазу. Уместо одабирања само једног хромозома приликом сваког окретања рулет-точка, формира се N показивача који су равномерно распоређени по ободу точка. N је број потребних одабирања (број јединки у међугенерацији). Код овог поступка, довољно је само једном окренути точак да би се добиле све потребне јединке. С обзиром да се на овај начин постиже најбоље, тј. најпоштеније одабирање, ова метода се често користи. Такође, овакво одабирање захтева број операција реда N , док сви остали методи захтевају $N \log N$.

⁴⁹ На пример стринг са фитнесом 2,26 убацује 2 копије директно у међугенерацију, а након тога има вероватноћу која је пропорционална 0,26 да убаци нову копију у међугенерацију.

Укрштање тј. рекомбинација основни је оператор за стварање нових хромозома и нове генерације коришћењем генетског потенцијала постојеће популације. Овај оператор сматра се централним местом генетског алгоритма, због тога што је основни узрочник варијација и унапређења могућих решења. Укрштањем потомак добија особине и једног и другог родитеља. Нова генерација требала би да очува добре особине претходне. Свака група родитеља неће обавезно произвести потомство. Укрштање се примењује на одабране парове родитеља чија је вероватноћа једнака степену укрштња $p_c \in [0,1]$.

Алгоритам укрштања између хромозома \vec{C}_{n1} и \vec{C}_{n2} могуће је описати на следећи начин:

- **Фаза 1.** На случајан начин одредити број $\xi \in [0,1]$;
- **Фаза 2.** Ако је $\xi > p_c$, тада нема укрштања; у супротном се прелази на фазу 3;
- **Фаза 3.** $\vec{\alpha} = \vec{C}_{n1}$; $\vec{\beta} = \vec{C}_{n2}$;
- **Фаза 4.** Израчунати маску \vec{m} ;
- **Фаза 5.** За $i = 1, \dots, N$ ако је $m_i = 1$ извршити замену генетског материјала:
 1. $\alpha_i = C_{n2,i}$
 2. $\beta_i = C_{n1,i}$
- **Фаза 6.** Вратити потомке α_i и β_i .

У претходно описаној процедури *маска* \vec{m} одређује који битови родитеља ће заменити места и генерисати потомке. Постоји више оператора укрштања, који на различите начине генеришу маску. Начелно укрштање је могуће извршити у N тачака, међутим укрштање у једној и две тачке представљају најчешће случајеве.

Укрштање у једној тачки (single-point crossover) је најједноставнија метода. Полазећи од два хромозома дужине l , на случајан начин бира се цео број i из интервала $[1, l - 1]$, а затим се врши размена генетских информација између два хромозома од i -те тачке до краја хромозома (подстрингова). Алгоритам генерисања маске могуће је описати на следећи начин:

- **Фаза 1.** Одредити случајну величину $\xi \in (1, N - 1)$;
- **Фаза 2.** $m_i = 0$ за свако $i = 1, \dots, N$;
- **Фаза 3.** За свако $i = \xi + 1, \dots, N$ је $m_i = 1$;
- **Фаза 4.** Резултат је вектор маске \vec{m} .

Укрштање у више тачака (multi-point crossover) представља генерализацију претходне процедуре. У овом поступку на случајан начин бира се m тачака у којима се врши укрштање. Ове тачке узимају вредности из скупа $\{1, 2, \dots, l - 1\}$, где је l дужина хромозома, а свака тачака мора узети јединствену вредност. Случај укрштања у више тачака који се најчешће примењује је *укрштање у две тачке (two-point crossover)*, у коме се размењује подстринг између две случајно одабране тачке (бита) хромозома. Алгоритам генерисања маске могуће је описати на следећи начин:

- **Фаза 1.** Одредити две случајне величина $\xi_1, \xi_2 \in (1, N)$;
- **Фаза 2.** $m_i = 0$ за свако $i = 1, \dots, N$;
- **Фаза 3.** За свако $i = \xi_1, \dots, \xi_2$ је $m_i = 1$;
- **Фаза 4.** Резултат је вектор маске \vec{m} .

Равномерно укрштање (uniform crossover) генерализује претходне две технике, у којима се прецизно дефинише одређени број места на којима ће се укрштање извршити, на начин да свако раздвојено место постаје потенцијална тачка укрштања. За сваки пар јединки изабраних за репродукцију на случајан начин креира се маска дужине N . Маска је исте дужине као и родитељски хромозоми а састоји се из случајно генерисаних јединица и нула. Први потомак се добија узимањем бита од једног родитеља на позицијама где је бит маске 1 и узимањем бита од другог родитеља ако је одговарајући бит маске 0. Други потомак добија се на супротан начин. Алгоритам генерисања маске могуће је описати на следећи начин:

- **Фаза 1.** $m_i = 0$ за свако $i = 1, \dots, N$;
- **Фаза 2.** За свако $i = 1, \dots, N$:
 - а/ одредити случајну вредност $\xi \in [0, 1]$;
 - б/ ако је $\xi \leq p_x$, тада је $m_i = 1$;
- **Фаза 3.** Резултат је вектор маске \vec{m} ;

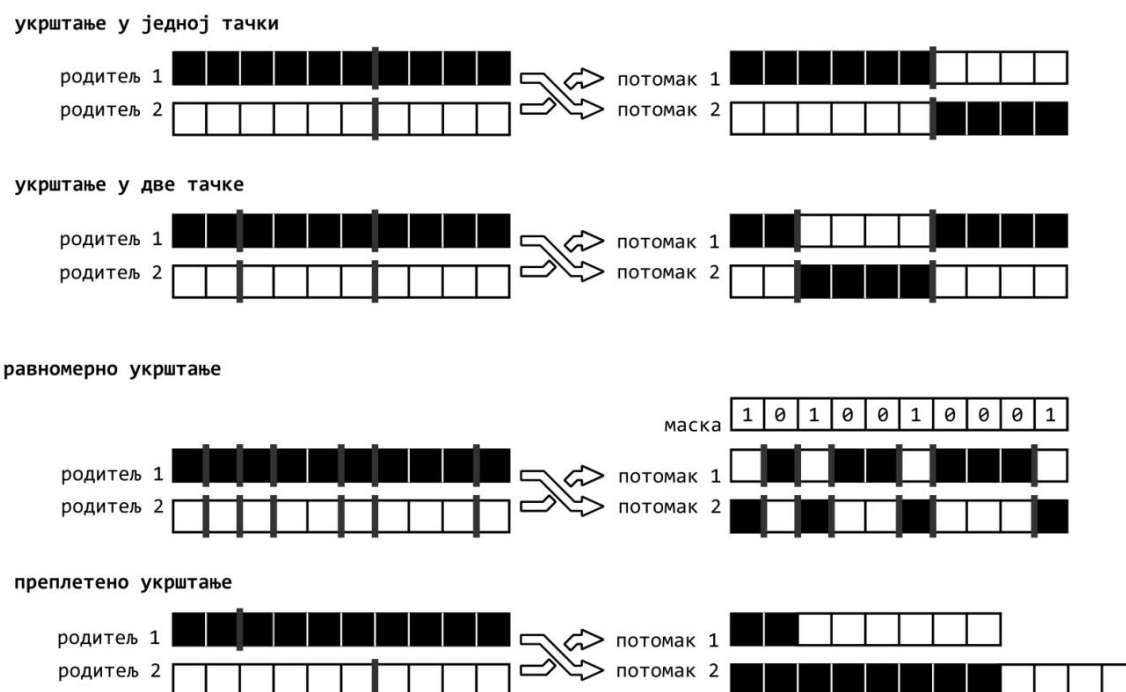
где је p_x вероватноћа укрштања на свакој позицији у хромозому; нпр. ако је $p_x = 0.5$, сваки бит хромозома има подједнаку шансу да узме учешћа у укрштању.

Повод за увођење вишеструког укрштања, али и осталих варијанти овог оператора, је услед тога што делови хромозома који највише утичу на

перформансе генетског алгоритма не морају бити смештени у суседним подстринговима. Укрштањем у више тачака уместо ране конвергенције, на известан начин, подстиче се дубље претраживање простора, повећава робустност алгоритма и смањује пристрасност која је у релацији са дужином бинарне репрезентације и специфичним кодирањем за дати скуп параметара.

Преплетено укрштање (cut and splice) представља поступак у коме се тачке укрштања налазе на различитим позицијама у хромозомима родитеља, што резултира различитим дужинама хромозома потомака.

Различити начини укрштања приказани су сликом 2.2.6.



Слика 2.2.6 Графички приказ принципа укрштања у једној и две тачке, униформног и преплетеног укрштања

У операторе укрштања спада и оператор *мешања (shuffle)* код кога се бира једна тачка укрштања, али у циљу елиминације позиционе пристрасности, пре размене битова, родитељи *мешају* (размештају) своје битове, да би се након рекомбинације, битови потомака вратили на првобитна места. Као и оператор *редукованог сурогата (reduced surrogate)* код кога се условљава да укрштање, када год је то могуће, производи нове потомке, што се обично имплементира ограничавањем локација укрштања на оне код којих се вредности гена разликују. Техника укрштања *матрицом* симулира размножавања инсеката (пчела) код којих

једна јединка (*матица*) са најбољом оценом перформанси учествује у свим укрштањима са осталим јединкама (*трutowима*).

Интермедијарна рекомбинација (*intermediate recombination*) користи се код хромозома са реалним вредностим алела и омогућава добијање нових фенотипа око и између вредности родитељских. Потомство се добија сагласно правилу:

$$O_1 = P_1 \times \alpha(P_1 - P_2) \quad (2.2.7)$$

где је α фактор скалирања који се бира униформно и случајно из неког интервала, обично $[-0.25, 1.25]$, а P_1 и P_2 су родитељски хромозоми. Свака променљива потомства резултат је комбиновања променљивих родитеља на начин који је дат у формули и то тако што се нови фактор скалирања α бира за сваки пар родитељских гена.

Линеарна рекомбинација (*linear recombination*) има сличности с интермедијарном, а разлика је у томе што се у процесу рекомбинације користи само једна вредност за α . Линеарном рекомбинацијом могуће је генерисати ма коју тачку на линији коју дефинишу родитељи унутар граница дефинисаних α .

Сликом 2.2.7 приказани су случајеви интермедијарне и линеарне рекомбинација за две варијабле.



Слика 2.2.7 Графички приказ принципа интермедијарне и линеарне рекомбинације

Мутација представља процес замене једне алеле гена другом, што резултује новом генетском структуром. Иако репродукција и укрштање генерално воде ка бољим резултатима, они не доносе никакав нов квалитет или информације на нивоу алеле. Мутација се врши у циљу уношења новог генетског материјала у постојеће хромозоме, и примењује се када популација не садржи све кодиране информације неопходне за решавање конкретне проблема. На тај начин оператор

може да спречи конвергенцију ка локалном минимуму. Мутација има позадинску улогу и врши се са одређеном вероватноћом p_m која се назива *степен мутације*. Примењује се са малом вероватноћом, обично у рангу од 0.001 до 0.01, како би се избегли губитци добрих хромозома добијаних укрштањем. Имајући у виду да је то оператор случајне претраге потребно га је пажљиво изабрати, јер као и у природи може довести до дегенерације јединки или до потпуно новог квалитета.

Код бинерне мутација мења се (*flip*) вредност бита на позицији која одговара тачки мутирања. Пошто се мутација генерално примењује униформно на целокупну популацију хромозома, могуће је да један бинарни хромозом мутира на више места. Код небинарних репрезентација, мутација се постиже или пертурбацијом вредности гена или случајним одабиром нових вредности унутар дозвољеног интервала. Реално кодирани генетски алгоритми могу искористити веће фреквенције мутације, за разлику од бинарно-кодираних, чиме се повећава ниво могуће претраге простора решења, а да се не утиче негативно на карактеристике конвергенције.

Постоје многе варијације оператора мутације. На пример, наклоњеност мутације индивидуама са мањом оценом перформанси да би се проширило поље претраге, а истовремено очувале информација од оних са већом оценом. Или, параметризација мутације тако да фреквенција мутације опада са конвергенцијом популације. Треба поменути и *мутацију размене (trade mutation)*, где се вредности појединих гена у хромозому користе за усмеравање мутације ка слабијим вредностима, и *мутацију прегруписавања (reorder mutation)*, која мења позиције бита или гена како би се повећала разноврсност у простру променљивих.

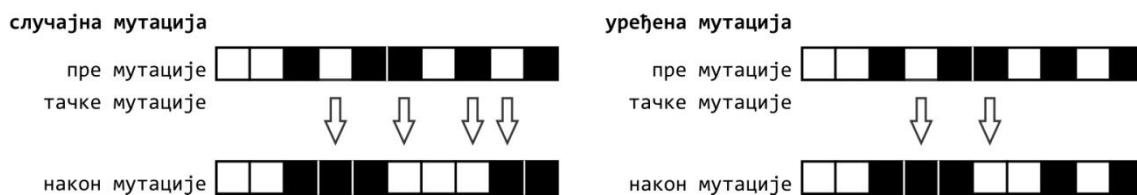
Често примењивани алгоритми мутације су случајна и уређена мутација. *Случајна мутација* представља методу код које се позиција бита који мутира бира на случајан начин, након чега се врши операције негације над вредношћу тог бита. Алгоритам је могуће приказати на следећи начин:

- **Фаза 1.** За свако $i = 1, \dots, N$;
 - а/ одредити случајну величину $\xi \in (0,1)$;
 - б/ ако је $\xi \leq p_m$ тада је $C_{n,i} = \overline{C_{n,i}}$, где је $\overline{C_{n,i}}$ комплемент од $C_{n,i}$.

Уређена мутација представља поступак у коме се на случајан начин бира позиција два бита, а након тога врши мутација само оних битова који се налазе између претходно одређених граница. Исказано алгоритмом:

- **Фаза 1.** Одредити две случајне величине $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$;
- **Фаза 2.** За свако $i = \xi_1, \dots, \xi_2$:
 - а/ одредити случајну величину $\xi \in (0,1)$;
 - б/ ако је $\xi \leq p_m$ тада је $C_{n,i} = \overline{C_{n,i}}$.

Сликом 2.2.8 приказани су поступци случајне и уређене мутације.



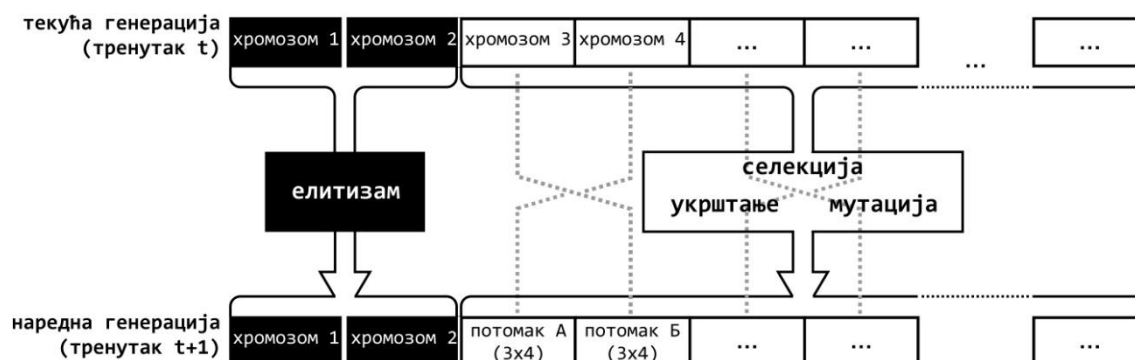
Слика 2.2.8 Графички приказ принципа мутације

Секундарни генетски оператори примењују се у циљу унапређења перформанси конвенционалних генетских алгоритама. Постоји више типова секундарних оператора, а најчешће коришћен је оператор елитизма.

Замена јединки у генерацији представља поступак који се спроводи уз вођење рачуна о очувању величине оригиналне популације. Разлика у броју јединки између оригиналне и нове генерације настаје када се укрштањем произведе већи или мањи број јединки тзв. *јаз генерација* (*generation gap*). У случају да није пожељно да се у нову популацију убаце само новопроизведене јединке или уколико је њихов број већи од укупног дозвољеног броја јединки у популацији, како би се прецизно одредило које ће јединке бити убачене у популацију а које не, потребно је дефинисати стратегију *замене* (*reinsertion*). Иако је наизглед логично да представници старе генерације са најмањом оценом перформанси буду замењени, то не мора представљати оптимално решење. На овај начин заправо се имплементира елитизам, јер се повећава вероватноћа да чланови са највећом оценом перформанси доминирају кроз више генерација. Најбољом техником замене сматра се избацивање најстаријих примерака, чак и оних који су у неким ранијим генерацијама имали одличну оцену перформанси.

Постоји више стратегија замене предходне генерације новом, од којих ће бити поменуте три. *Замена комплетне генерације* представља поступак у коме се након укрштања сви родитељи замене новим примерцима, чији укупан број (након укрштања) мора бити већи или једнак броју старих примерака. *Замена у стабилном стању* је поступак у коме се све генерисане јединке - најчешће једна или две, умећу у стару генерацију. *Убијање хромозома* представља стратегију код које се у свакој генерацији елиминише по неколико хромозома са најлошијим перформансама као и оних који су у популацији провели задати број епоха.

Елитизам или *елитистичка стратегија (elitist strategy)*⁵⁰ представља оператор којим се једној или већем броју јединки са највећом оценом перформанси дозвољава да опстану кроз више узастопних генерација, тј. њихови хромозоми чувају се од уништења услед примене оператора укрштања или мутације. Пошто генетски алгоритам ипак представља вештачки систем еволуције једне популације могуће је извршити избор одређеног броја најбољих јединки и директно их пренети у наредну генерацију. Циљ овог поступка је унапређење ефикасности алгоритма. Принцип је илустрован сликом 2.2.9.



Слика 2.2.9 Графички приказ примене стратегије елитизма у етапи једне итерације

Пример 7

Пример приказује примену генетског алгоритма у процесу тражења љуске оптимланих структуралних перформанси, у оквиру задатог домена. Предмет дигиталног експеримена је љуска превоугаоне основе димензија $10 \times 10m$. Иницијалне геометрија генерисана је коришћењем NURBS површи одређене помоћу четири крајње интерполационе контролне тачке P_1, P_2, P_3 и P_4 , које уједно

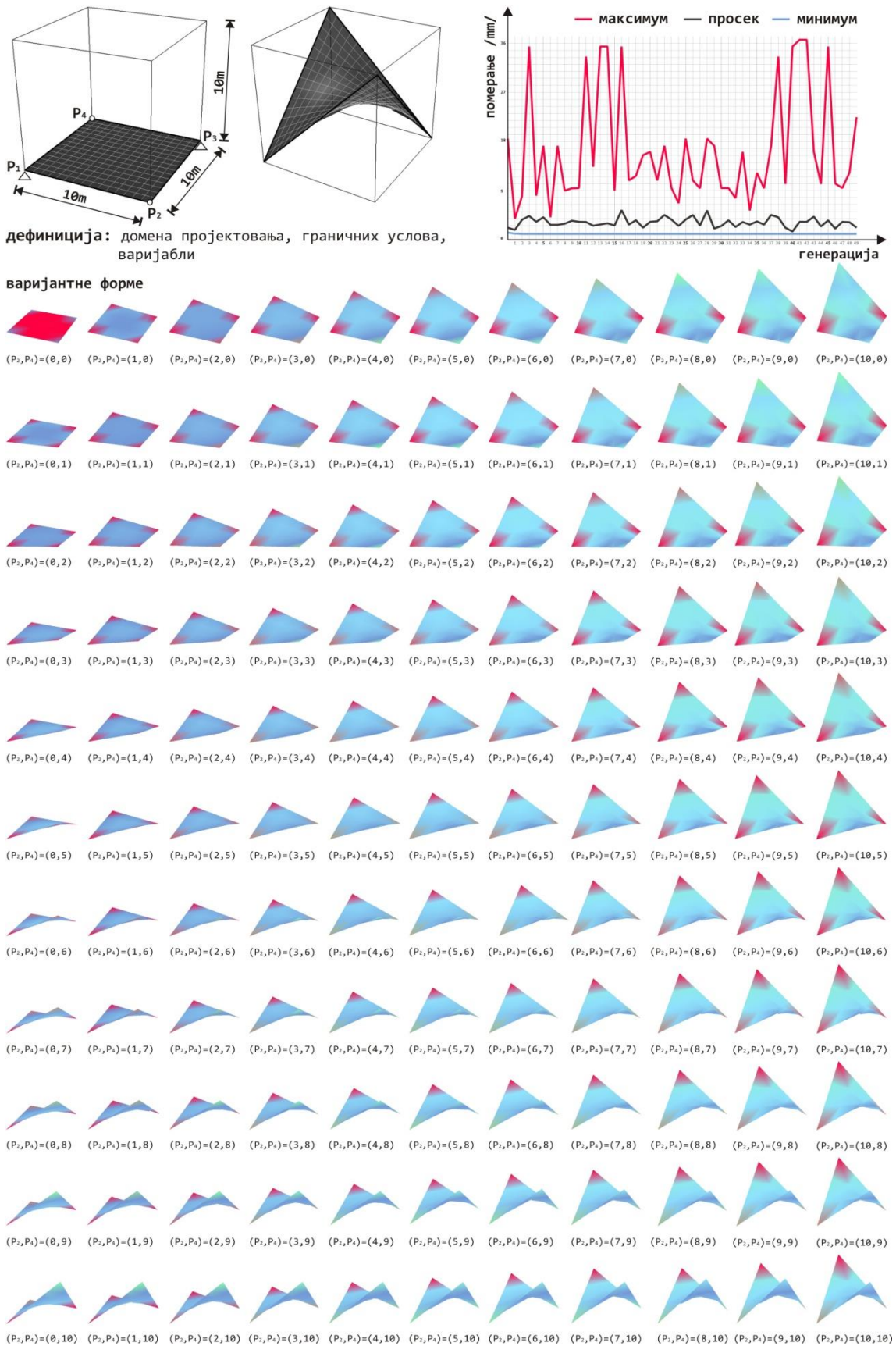
⁵⁰ Оператор је увео Де Јонг 1975. године.

представљају и ослонце површи. Ослонцима P_2 и P_4 је омогућена слобода кретања у правцу z -осе у опсегу од 0 до 10m, док је слобода кретања ових тачака у правцима x и y оса спречена. Дефинисани домен пројектовања, гранични услови и пројектне варијабле приказани су на слици 2.2.10.

За критеријум евалуације структуралних перформанси у овом примеру усвојено је минимизирање максималне вредности померања структуре. Евалуација перформанси спроведена је применом методе коначних елемената. У том смислу, извршена је дискретаизација NURBS површи на мрежу квадратних елемената димензија 5×5 . Претспотављена дебљина љуске је 10cm. Усвојени параметри материјала су Јангов модул еластичности $E = 3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, Поасонов коефицијент $\nu = 0.2$, запреминска маса $\rho = 2549.29 \text{ kg/m}^3$. Љуска је оптерећена сопственом тежином.

Алгоритам је имплементиран коришћењем програма *Rhinoceros*®, графичког визуелног едитора *Grasshopper*, модула *Milipede* који је коришћен за анализу засновану на методи коначних елемената и еволуционог солвера *Galapagos*. Алгоритам је примењен на 50 генерација, са величином популације од 20 јединки, од којих се прва увек чува као елитна. Селекција јединки које ће учествовати у продукцији потомака је пропорционална успешности, продукција потомака је реализована коришћењем оператора укрштања, а примењен је и мали проценат генетских мутација у циљу обезбеђивања диверзитета.

Добијени резултати приказани су на слици 2.2.10, на којој су графиконом илустроване вредности минималне (плава линија), просечне (сива линија) и максималне (црвена линија) вредности померања структура у свакој генерацији. На слици 2.2.10 је такође приказан скуп свих варијантних формалних решења која су генерисана променом вредности z координате крајњих контролних тачака површи P_2 и P_4 у оквиру дефинисаног опсега. Обликовно, варијантна решења су у опсегу између равни и двоструко закривљене површи. У овакво дефинисаној поставци оптимална кофигурација заправо одговара облику хиперболичног параболоида, а услед једноставности проблема пронађена је већ у другој генерацији.



Слика 2.2.10 Проналажење оптималне форме применом генетског алгоритма

2.3 Моделовање површинских конструктивних система

Моделовање површинских конструктивних система представља поступак креирања идеализоване или симплифициране репрезентације његовог понашања за одређено дејство. Симплификација или идеализација реализује се увођењем допунских хипотеза којима се разматрања реалних тродимензионалних конструкција специфичних геометријских карактеристика, у овом случају, свде на домен дводимензионалних структура поједноствљивањем геометрије, начина ослањања, понашање материјала и начина преношења оптерећења. Симулације, површи и системи као и њихове релације у контексту дигиталних технологија представљају фундаменталне концепте овакве поставке.

Симулације мотивишу развој рачунарства, док је њихов развој мотивисан развојем научних приципа неопходних за конструисање теорија и модела, хардвера који омогућава реалне симулације, и проблемима чијем решавању може да допринесе предвиђање или тестирање комплексних сценарија. Иако технологије симулације примарно нису развијане за област архитектуре, она данас има непосредну корист од развоја софтвера и хардвера намењених пре свега инжењерству, уз напомену да не треба потценити допринос који су архитекти дали развоју CAD-а. У области архитектуре симулација је у првом реду синоним за тродиманзионалне моделе. У неку руку предности дигиталне репрезентације биле су главни мотив распрострањеније употребе дигиталних медија у архитектури, која је подстицала унапређења у правцу фотореализма.

За разлику од симулација у функцији визуализације, симулације перформанси креиране су за потребе инжењерских дисциплина. Ове симулације оријентисане су на нумеричке податке и њихову визуализацију. У том смислу, симулација перформанси реалног конструктивног система реализује се адекватном селекцијом геометријске, физичке, математичке и нумеричке апроксимације појаве. То је заправо процес креирања параметарског модела, оптималног у погледу броја селекованих параметара који би требао да обезбеди добру апроксимацију, сложену не само у смислу броја већ и у смислу карактера повезаности параметара који детерминишу модел и поуздану у предвиђању

понашања реалног система. Овај процес се одвија на више нивоа од концептуалног, преко математичког и нумеричког до рачунарске имплементације, где сваки ниво има специфичне задатке и резултате.

Примена оваквих метода води пројектовању као рачунарском процесу (*computational design*). Такође, симулације које нису ограничене на визуелизацију и реплицирање окружења, осим геометријске нуде и алтернативне могућности репрезентације коришћењем дигиталних медија. Овакав приступ који је претежно под утицајем других области, као и системи развијени у оквиру других дисциплина, попут нпр. вештачке интелигенције, све више проналазе примену у генеративним процесима пројектовања.

Површи заправо представљају абстрактни континуални геометријски конструкт. Значајне су за развој репрезентације и визуелизације у области рачунарске геометрије, пројектовања, а новије и дигиталне производње којом се процес продукције затвара у дигиталном окружењу. Иако абстрактан конструкт у апликацијама за дигитално моделовање, захваљујући квази-реализму виртуалног окружења, перципирају се као објекти којима је могуће манипулисати иако практично имају нулту дебљину. Ова квази предметност површи у виртуалним симулацијама наводи пројектанте да их користе као објекте у буквалном смислу, што отвара низ могућности али представља и изазов за процес њиховог превођења у физичке структуре и процес производње.

Независно од тога да ли су креиране коришћењем класичних техника или генерисане коришћењем програмских процедура површи су у првом реду засноване на геометријској дескрипцији. Захтев геометријске комплексности фаворизује генеративни приступ, у односу на процесе у којима се програмски интерфејс користи за симулирање мануелних процеса, посебно имајући у виду да одређене површи и није могуће ефикасно креирати на тај начин. Генералнији приступ су адаптивни процеси у којима се користе креативни алгоритми засновани на детерминисаним принципима, а чији су резултат заправо бесконачне варијације површи настале у поступку постепених подешавања.

Имплементација абстрактних компјутерских креација захтева адекватне моделе њиховог превођење у реалан физички контекст. Потребне производње

подстичу интересовање за моделе превођења и алтернативне репрезентације пројектних решења, већих могућности од статичних модела дескриптивне геометрије и визуализације. Развој САМ технологија поред тога што омогућава реализацију комплексних површи подстиче константно преиспитивање граница између визуелног и физичког мотивишући иновативне начине коришћење површи као медијума архитектонског израза.

Системи у основи представљају физичке или информационе организационе целине. Градитељски и конструктивни системи имају традицију, која је оставила значајан траг на архитектонску форму. Богато наслеђе површинских конструктивних система, као специфичне типологије, прилог је претходној тврдњи. Примена дигиталних технологија отвара могућност да се релативно ограничен формални вокабулар ових система, често пренаглашено детерминисан структуралном оптимизацијом, развија у правцу слободнијег израза.

Иако захваљујући закривљености површи хипотетички могу имати структурални капацитет, он се у потпуности реализује кроз комплексне интеракције облика, отпорности материјала, оптерећења, локалних и глобалних ограничења. Полазиште у процесу пројектовања ових система представља детерминисање начина на који се оптерећење прихвата и преноси. Ефикасно преношење оптерећења имплицира економично искоришћење материјала и елеганцију облика. Уколико форма површи која искључиво може да прими аксијална напрезања одражава ток сила, тј. представља равнотежни облик, она неће бити напрегнута на савијање. Код геометрија које не представљају функцију дејства оптерећења јавиће се савијање које се мора елиминисати повећањем дебљине пресека или ојачавањем структуре, чиме је смањена ефикасност искоришћеног материјала.

Никада раније технологија није била у оволикој мери оријентисана на проблем архитектонске форме. Данас је на располагању низ рачунарских алата за пројектовање, анализу, дигиталну производњу. Њихови потенцијали су изузетни, а време ће показати и њихов реални утцај на архитектонску продукцију. У сваком случају, нове могућности у пројектовању и реализацији атрактивних форми површинских конструктивних система реактуелизују их као архитектонску тему.

2.3.1 Геометријско моделовање система

За дескрипцију геометрије површинских система у оквирима овог рада користиће се параметраске криве и површи, у првом реду неравномерни рационални базни сплајн (*Non-Uniform Rational B-Spline* - NURBS) универзални, стандардни алат за моделовање кривих линија, површи и тела у CAD/CAM/CAE и компјутерској графици, који омогућава ефикасно и прецизно приказивање различитих геометријских форми коришћењем минималне количине података, једноставну контролу форме и интуитивно обликовање.

Преглед литературе указује на то да су истраживања у овој области иницирана потребом решавања практичних проблема прецизне индустријске производње. Једно од првих истраживања је метода за конструисање глатких кривих коришћењем скупа референтних тачака коју је предложио Де Кастелжо (de Casteljau) 1974. године⁵¹. С друге стране, на МИТ-у проф. Кунс (Coons) формулисао је методу презентације двоструко закривљених површи помоћу билинеарног печа⁵² [Сооб7]. Кунсови доприноси истраживањима у овој области су и предлози технике за граничне криве, употреба базних функција, као и употреба рационалних полинома за моделовање коничних пресека.

Решавање проблема контроле облика билинеарног печа у унутрашњости површи, био је предмет истраживања Безијеа (Bézier), који је почетком 1960-тих развио *UNISURF*⁵³. Ослањајући се на континуитет француске математичке традиције, у првом реду радове о кривама Ермита (Hermite)⁵⁴, Безије је дефинисао криве чији се облик контролише посредно помоћу контролних тачака⁵⁵ [Béz72]. Форест (Forrest) касније успоставља релацију између Bézier кривих и Бернштајнових (Bernstein) полинома, чиме је омогућено проучавање особина Bézier кривих ослањањем на особине Бернштајнових полинома [For72].

⁵¹ Истраживања које је Де Кастелжо спроводио за потребе Ситроена (*Citroën*) иако су завршена 1959. објављена су тек 1974. године.

⁵² Билинеарни печ (*bilinear patch*) у литератури познат и као Кунс печ (*Coons patch*) је врста правоизводне површи, конструисана између четири тачке у 3D простору.

⁵³ *UNISURF* систем је коришћен за дизајн Реноових (*Renault*) аутомобила.

⁵⁴ Ермитове криве представљају геометријску репрезентацију кубних кривих коришћењем крајњих тачака и вектора тангенти. Њихов облик могуће је контролисати променом правца и интензитета вектора.

⁵⁵ Своје радове о кривама Безијеа објављује 1962. године. Након дванаест година, када је Ситроен открио своје студије, утврђено је да је Де Кастелжу овакав метод конструкције кривих био позната бар три године раније од Безијеа.

Недостаци Bézier кривих у погледу немогућности егзактног описивања конусних пресека и особине да њихов алгебарски степен расте заједно са бројем контролних тачака, што отежава прорачуне, били су предмети наредних истраживања у овој области. Други недостатак превазиђен је конструисањем комплексних тзв. *Spline* кривих састављених из континуално спојених сегмената од којих сваки има ограничен алгебарски степен, а које се први пут помињу у Шенберговим (Schoenberg) теоријским радовима [Sch46]. Практичним разматрањима ових радова у контексту CAD-а бавили су се Де Бор (de Boor) и Кокс (Cox). У њиховим радовима [Cox72], [DeB72] успостављена је веза између геометријског облика комплексних кривих и алгебарских метода њихове дефиниције. *B-Spline* представљају генерализацију Bézier кривих и површи, код којих је дефинисање облика такође омогућено помоћу контролних тачака, с том разликом што је њихов алгебарски степен независан од броја контролних тачака, а уместо Бернштајнових полинома, користе се рекурзивно дефинисане базне функције.

Немогућност да се *B-Spline* кривама опишу сви конусни пресеци мотивисала је дефинисање *Non Uniform Rational B-Spline* (NURBS), којим је обезбеђена јединствена презентација читавог спектра кривих и површи. NURBS се први пут помињу у дисертацији Версприлеа (Versprille) [Ver75], који је крајем 1970-тих у оквирима фирме *Computervision, Inc. (CV)* радио на развоју 3D функција за моделовање у систему *CADDS 3*. Развоју NURBS-а значајно је допринела и америчка авиокомпанија Боинг (*Boeing*), чији су истраживачи предвођени Лиом (Lee) радили су на дефинисању одговарајуће јединствене презентације за различите типове кривих.⁵⁶ Репрезентација коничних пресека коришћењем рационалних Bézier кривих представљала је један од доприноса [Lee81], док је други допринос био увођење *non-uniform B-Splines* у индустријску праксу. Интеграцијом два наведена концепта формулисан је NURBS. Боинг је 1981. године уградио NURBS у IGES индустријски стандард, што је CAD индустрија одмах подржала, а водећи произвођачи инжењерских софтвера SDRC⁵⁷ и *Computervision* имплементирали су NURBS у програме за моделовање. Алгоритам

⁵⁶Версприлеова дисертација истраживачима из Боинга највероватније није била позната.

⁵⁷*Structural Dynamics Research Corporation* - SDRC један је од водећих CAD произвођача, NURBS је имплементирала у програм за моделовање *GEOMOD*.

је највећим делом развио Тилер (Tiller) [Til83]. Значајан теоријски рад о NURBS-у представља публикација Пигла (Piegl) [Pie91]. Важан допринос имплантацији NURBS-а дали су и *GeomWare*, *IntegrityWare* и *Solid Modeling Solutions* развијањем *solid modeling kernel SMLib*, врсте тзв. *nested-doll*, у ком је сваки ниво посебна библиотека функција, од којих су већина *NLib*⁵⁸, које је развила компанија *GeomWare*. *GSNlib*⁵⁹ чине низ метода за креирање, едитовање и добијање информација и пресека NURBS кривих и површи. Компанија *IntegrityWare* дистрибуирала је ову библиотеку, под именом *GSLib*, компанијама попут *Robert McNeel & Associates*⁶⁰ или *Ford Motor Company*.

Ради потпуности прегледа, потребно је поменути и друге технологије попут подеоних површи (*subdivision surfaces*) које настају итеративним поступком у коме се под одређеним правилима нова мрежа добија поделом почетне. Две основне компоненте ових површи су почетна - базна мрежа (*base mesh*) и алгоритам глачања (*smoothing algorithm*). На основу итеративне Чакинове (Chaikin) методе за конструкцију кривих одсецањем углова [Cha74] развијени су различити алгоритми [Doo78], [Cat78]. Још једна технологија за репрезентацију површи су и *T-Splines*, које представљају прелазну фому између NURBS-а и подеоних површи. За разлику од NURBS површи чије контролне таче формирају топологију сличну четвороугаоном раму, *T-Splines* могу имати тзв. унутрашње Т-тачке, тј. контролне тачке са три уместо четири суседа. У поређењу са NURBS-ом коришћењем ове технологије за моделовање, двоструко се редукује број контролних тачака. *T-Splines* је патентирао Седерберг (Sederberg) [Sed03], а 2004. године основана је компанија *T-Splines, Inc.* за развија софтвера заснованог на овој технологији, коју је између осталих купио и *Autodesk* [Aut111].

У наставку биће дат сажет приказ основних концепата, дефиниције и општих карактеристика Bézier, *B-Spline*, NURBS кривих и површи, опширнија разматрања, извођења формула, докази и алгоритми дати су поред у досада наведеним публикацијама још и у: [Pie97], [Rog01], [Sch07], [Coh01], [Far99], [Far99a].

⁵⁸*NURBS Library - NLib* је библиотека функција за дизајнирање и манипулацију NURBS кривих и површи чији су алгоритми засновани на монографији [Pie97]. *NLib* користи више од 85 компанија које се баве развојем инжењерских софтвера.

⁵⁹*General Surface NURBS Library - GSNlib* је објектно оријентисана библиотека засновала на *NLib*.

⁶⁰Компанија *Robert McNeel & Associates* користила је *GSLib* за развој софтверског система *Rhinoceros®*.

2.3.1.1 Spline Параметрске криве и површи

Репрезентација параметрских кривих и површи - основни концепти.

Параметарска репрезентације криве подразумева да се свака од координата тачке на криви прикаже одвојено као експлицитна функција независних параметара:

$$C(u) = (x(u), y(u)) \quad a \leq u \leq b \quad (2.3.1)$$

где је $C(u)$ векторска функција независне променљиве u , а интервал $[a, b]$ начелно може бити произвољан, међутим обично је између $[0, 1]$. Криве представљају векторске функције једног параметра, у овом случају u . За формулисање различитих кривих могуће је користити произвољне функције, међутим најчешће се користе полиномске. Уколико се предпостави да $C(u)$ представља путању кретања тачке у функцији времена; где променљива u представља време, а $[a, b]$ временски интервал, тада први и други извод $C(u)$ представљају брзину, односно убрзање.

Параметарска једначина површи дата је изразом:

$$S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (2.3.2)$$

Површи представљају бипараметарске функције с обзиром да су за њихово дефинисање неопходна два параметра, у овом случају u и v . Усвајањем константне вредности једног параметра и варирањем другог могуће је генерисати изопараметарску криву на површи, а усвајањем константних вредности оба параметра тачку. Ивице површи формирају се усвајањем минималних или максималних константних вредности једног параметра и варирањем другог. Криву на површи могуће је генерисати и изражавањем једног параметра као функцију другог. Парцијални изводи површи $S(u, v)$: $S_u(u, v) = (x_u(u, v), y_u(u, v), z_u(u, v))$ и $S_v(u, v) = (x_v(u, v), y_v(u, v), z_v(u, v))$ представљају убрзања дуж уздужних и попречних линија.

Тензорски производ је техника репрезентације површи коришћењем бидирекционе шеме кривих, базних функција и геометријских коефицијената. Бипараметрске базне функције дефинисане су као производ унипараметрских, а геометријски коефицијенти организовани су у бидирекционој $n \times m$ мрежи. Тензорски производ површи могуће је изразити на следећи начин:

$$S(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f_i(u) g_j(v) b_{i,j} \quad (2.3.3)$$

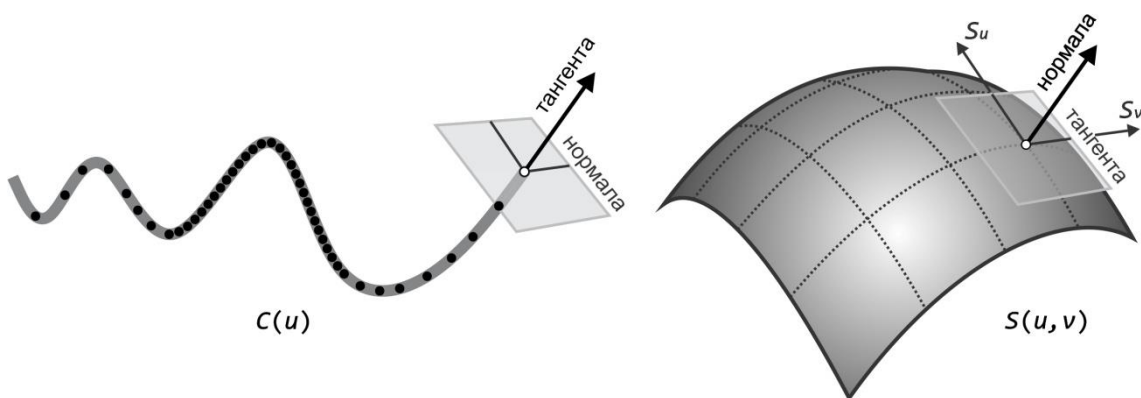
где је
$$\begin{cases} b_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}) \\ 0 \leq u, v \leq 1 \end{cases}$$

Јединични вектор нормале у тачки u, v на површи $S(u, v)$, чији су парцијални изводи $S_u(u, v), S_v(u, v)$, дат је изразом

$$N = \frac{S_u \times S_v}{|S_u \times S_v|} \quad |S_u \times S_v| \neq 0 \quad (2.3.4)$$

где је $S_u = \partial S / \partial u$, а $S_v = \partial S / \partial v$. Вектор нормале и кореспондирајућа тангентна раван површи независни су од параметризације.

Параметрска крива и површ приказане су сликом 2.3.1.



Слика 2.3.1 Параметрска крива $C(u)$ /лево/; параметрска површ $S(u, v)$ /десно/

Чворни вектор је скуп неоппадајућих реалних бројева који представљају скуп координата у параметарском простору. Могуће га је записати на следећи начин:

$$U = \{u_1, \dots, u_{n+p+1}\} \quad (2.3.5)$$

где су u_i - чворови; i - индекс чвора $i = 1, 2, \dots, n + p + 1$; p - степен базне функције, а n - број базних функција. Чворни вектор је равномеран (униформан) уколико су растојања између чворова једнака, тј. уколико постоји реалан број d за који важи $d = u_{i+1} - u_i; \forall p \leq i \leq m - p - 1$ у супротном чворни вектор је неравномеран. Чворни вектор је отворен (непериодичан) уколико се први и последњи чвор понављају $p + 1$ пута:

$$U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\} \quad (2.3.6)$$

Репараметризација представља промену параметризације у циљу постављања у жељени интервал. За репараметризацију $u = [a \dots b]$ на $w = [0 \dots 1]$ може се користити израз: $w = (u - a) / (b - a)$, из кога је $u = w(b - a) + a$. На тај начин добија се: $P(u), u = [a \dots b] = P(w(b - a) + a), w = [0 \dots 1]$.

De Casteljau алгоритам представља рекурзивну методу за одређивање тачке на Bézier криви n -тог степена⁶¹. Овом методом могуће је извршити и поделу једне криве на две с произвољним вредностима параметра. *De Casteljau* алгоритам следи из рекурзивне особине безних функција и дат је једначином:

$$P_{k,i}(u_0) = (1 - u_0)P_{k-1,i}(u_0) + u_0P_{k-1,i+1}(u_0) \quad \text{за} \quad \begin{cases} k = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n - k \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Овај алгоритам⁶² заправо представља процес одсецања угла (слика 2.3.2).

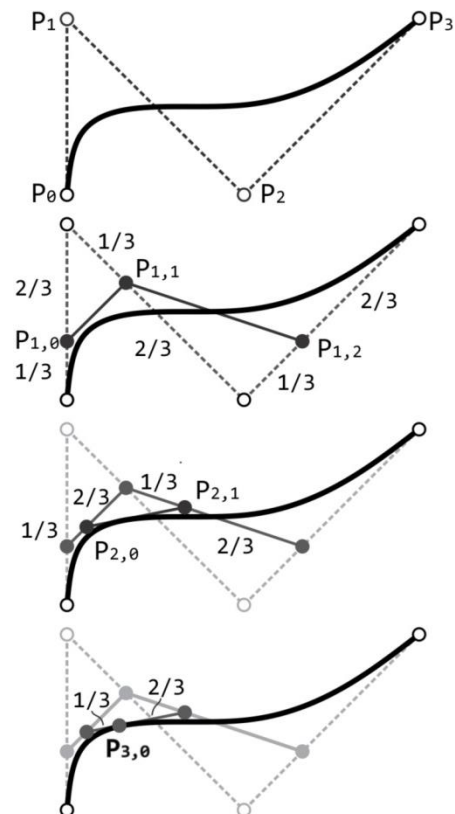
De Casteljau алгоритам

P_0	$P_{1,0}$				
P_1	$P_{1,1}$	$P_{2,0}$			
P_2	\vdots	\vdots	$P_{n-1,0}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	$P_{n,0} = C(u_0)$	
\vdots	\vdots	\vdots	$P_{n-1,1}$		
P_{n-2}	\vdots	\vdots	\vdots		
P_{n-1}	$P_{1,n-2}$	$P_{2,n-2}$			
P_n	$P_{1,n-1}$				

Пример коришћења *De Casteljau* алгоритма за проналажење тачке $P_{3,0}$ на Bézier криви, која се налази на $1/3$ параметарског домена $[0,1]$ између P_0 и P_3

P_0	$P_{1,0}$		
P_1	$P_{1,1}$	$P_{2,0}$	
P_2	$P_{1,2}$	$P_{2,1}$	$P_{3,0}$
P_3			

геометријска интерпретација



Слика 2.3.2 Проналажење тачке на криви коришћењем *De Casteljau* алгоритма

Концепт рационалних кривих уведен је како би се репрезентовали конусни пресеци⁶³. У том смислу, све конусне пресеке могуће је представити помоћу рационалних функција које се дефинишу на следећи начин:

$$x(u) = \frac{X(u)}{W(u)} \quad y(u) = \frac{Y(u)}{W(u)} \quad (2.3.8)$$

где $X(u)$, $Y(u)$ и $W(u)$ представљају полиноме. Геометријска интерпретација овог концепта подразумева употребу система хомогених координата⁶⁴ у поступку

⁶¹За израчунавање тачке на површи могуће је користити проширени *De Casteljau* алгоритам приказан у [Pie97].

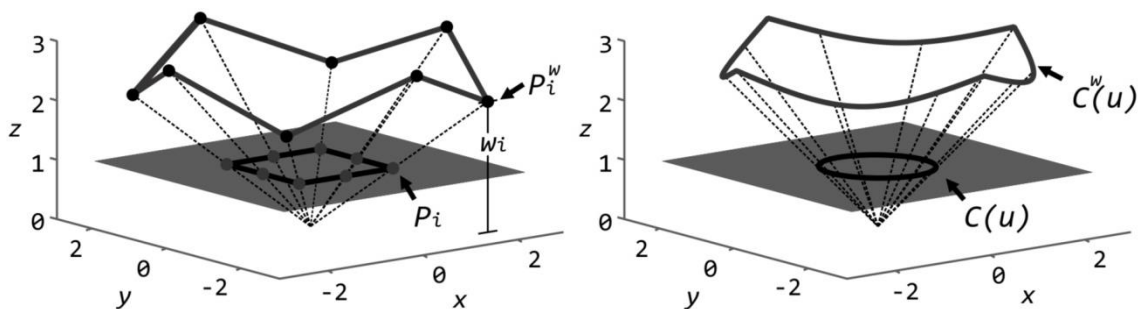
⁶²У пракси се овај алгоритам ретко користи с обзиром да постоје ефикаснији алтернативни приступи, али је илустративан.

⁶³Полиномима није могуће егзактно представити бесконачно диференцијабилне функције које представљају математичку формулацију конусних пресека.

добиања рационалне криве у \mathbb{R}^d простору као пројекције полиномске криве из \mathbb{R}^{d+1} простора (слика 2.3.3). С обзиром да се множењем хомогених координата тачке скаларом различитим од нуле добијају координате које репрезентују ту исту тачку, на пример тачку \mathbb{R}^3 простора $P = (x, y, z)$ у \mathbb{R}^4 простору могуће је записати као $P^w = (wx, wy, wz) = (X, Y, Z, W)$ за $w \neq 0$, односно, тачку P могуће је добити из P^w дељењем свих координата четвртом координатом W , тј. пресликавање P^w на хиперраван $W = 1$ ⁶⁵. Ова пројекција, означена са H , представља перспективно пресликавање са центром у координатном почетку:

$$P = H\{P^w\} = H\{(X, Y, Z, W)\} = \begin{cases} \left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W}\right) & \text{ако } W \neq 0 \\ \text{правац } (X, Y, Z) & \text{ако } W = 0 \end{cases} \quad (2.3.9)$$

Како би се обезбедило да само један скуп координата одговара датој тачки, потребно је да број координата буде за један већи у односу на димензије разматраног простора пројекције. Концепт је могуће проширити на површи и на тај начин добити *рационалне површи*.



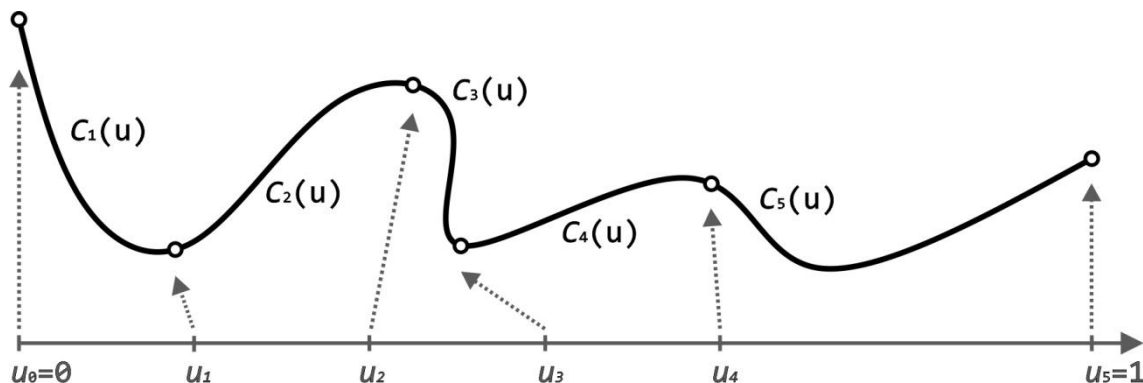
Слика 2.3.3 Круг у \mathbb{R}^2 конструисан пројективном трансформацијом квадратне *B-Spline* криве из \mathbb{R}^3 према [Cot09]: пројективна трансформација полигона контролних тачака B_i^w у контролне тачке B_i /лево/; пројективна трансформација *B-Spline* криве $C^w(u)$ у *NURBS* криву $C(u)$ /десно/

Концепт сегментности (piece-wise) користи се за презентацију комплексних кривих и површи. Сегментне криве (слика 2.3.4) настају спајањем више полиномских сегмената у тзв. преломним тачкама (*breakpoints*). Под термином чвор (*knot*) подразумева се $u_i \leq u_{i+1}; \forall i$, а распон чвора чија је дужина различита од нуле дефинише сегмент. Сегментне површи настају спајањем сегмената који се

⁶⁴Концепт хомогених координата 1827. године увео је Мебијус (*Möbius*). Хомогене координате су систем координата који се користи у нацртној геометрији, за репрезентацију координата тачака укључујући и тачке у бесконачности коришћењем коначних координата. Хомогене координате користе се у компјутерској графици и 3D компјутерској визуализацији, јер омогућавају спровођење афиних и пројективних трансформација помоћу матричних операција.

⁶⁵Пројективна раван може се схватити као Еуклидовска раван којој су додате тзв. тачке у бесконачности. За $W \neq 0$ тачка се налази на Еуклидовској равни, за $W = 0$ тачка је у бесконачности.

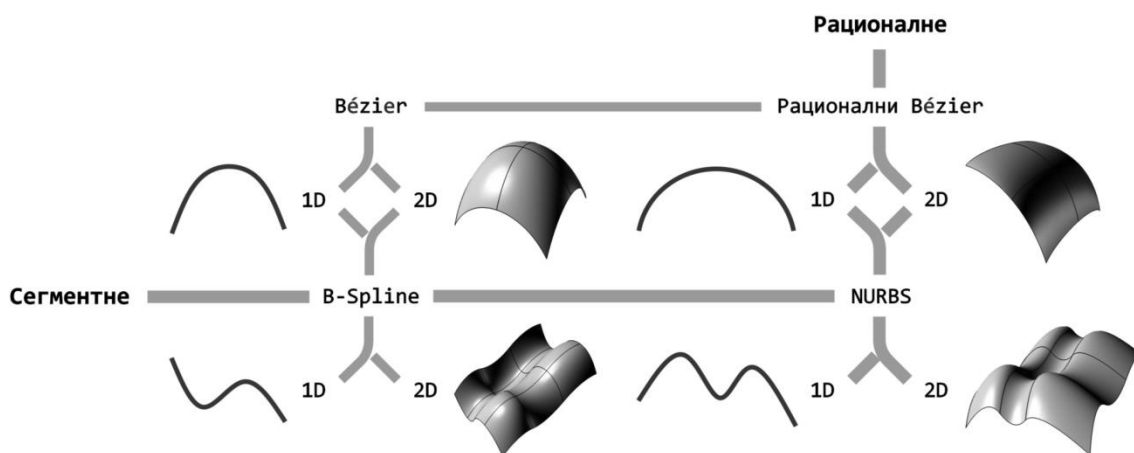
називају печеви (*patches*) дуж ивица, а овакав приказ личи на тзв. печворк тканине (*patchwork quilt*).



Слика 2.3.4 Крива формирана спајањем пет сегмената

Континуитет код сегментних кривих може бити геометријски G^n и параметарски C^n . У случају $n = 0$, $G^n = C^n$, док се за $n \geq 1$ G^n и C^n разликују. Уколико су n -ти изводи суседних сегмената криве/површи у тачки споја једнаки у погледу правца и интензитета крива/површ има параметарски континуитет C^n у тачки споја. У случају да постоји само геометријски континуитет G^n приликом преласка тачке преко места споја не долази до промене правца кретања али се мења вредност брзине, што доводи до убрзања. Унутар сегмената могућ је већи континуитет него у тачки споја. Параметарски континуитет више је ограничавајући у односу на геометријски, начелно C^n имплицира G^n , што обрнуто нија случај.

Типови параметарских кривих и површи који ће бити приказани у оквирима овог рада су: Bézier, рационалне Bézier, B-Spline и NURBS (слика 2.3.5).



Слика 2.3.5 Класификација параметарских кривих и површи

Bézier криве за базне функције имају Bernstein полиноме n -тог степена:

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad (2.3.10)$$

Bézier крива (слика 2.2.6) n -тог степена дефинише се изразом:

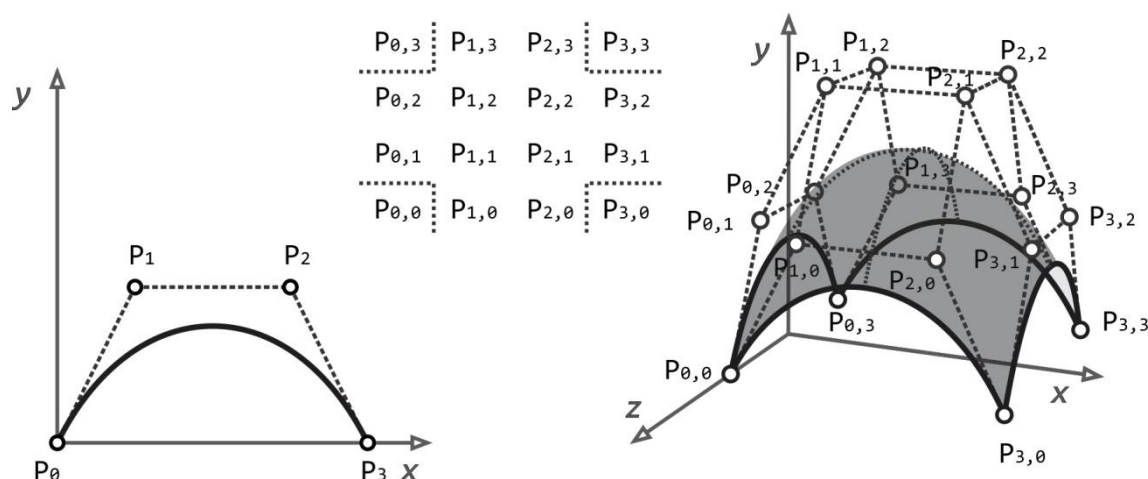
$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) P_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.3.11)$$

где P_i представљају контролне тачке на интервалу $u \in [0,1]$.

Bézier површ (слика 2.3.6) добија се множењем бидирекционе мреже контролних тачака *Bernstein* полиномима:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) P_{i,j} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (2.3.12)$$

Усвајањем константне вредности $u = u_0$ добија се *Bézier крива* $C_{u_0}(v) = \sum_{j=0}^m B_{j,m}(v) Q_j(u_0)$, која лежи на површи, док константна вредност $v = v_0$ даје криву $C_{v_0}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) Q_i(v_0)$.



Слика 2.3.6 *Bézier* кубна крива $n = 3$ /лево/; *Bézier* 3×3 површ /десно/

Рационалне Bézier криве представљају перспективне пројекције у \mathbb{R}^d простору полиномских *Bézier* кривих из \mathbb{R}^{d+1} простора. Базне функције су им рационалне:

$$R_{i,n}(u) = \frac{B_{i,n}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n B_{j,n}(u)w_j} \quad (2.3.13)$$

Уколико није другачије дефинисано претпоставља се да је тежински фактор $w_j > 0, \forall j$. На тај начин обезбеђено је да вредност имениоца у интервалу $u \in [0,1]$ буде већа од нуле.

Рационална *Bézier крива* (слика 2.3.7) n -тог степена дефинисана је изразом:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) P_i \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2.3.14)$$

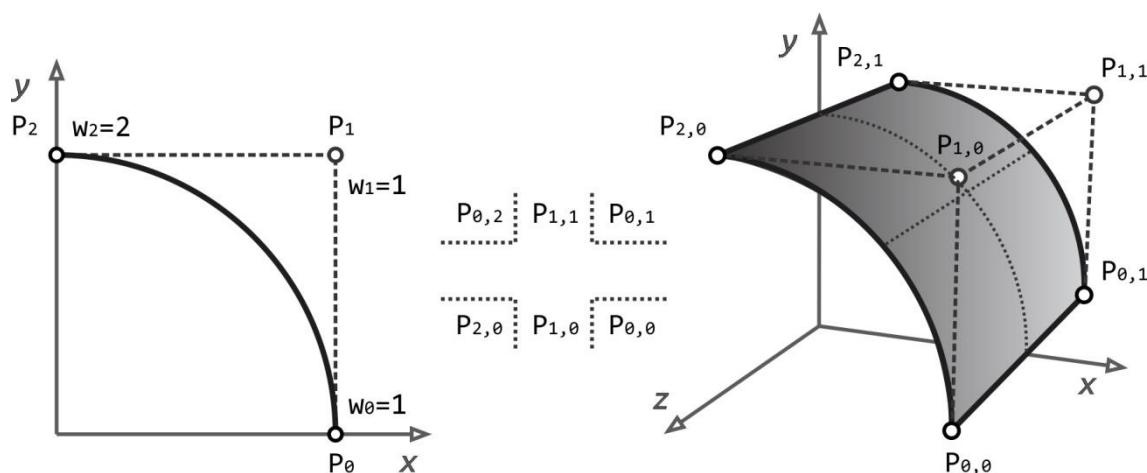
где су P_i њене контролне тачке на интервалу $u \in [0,1]$.

Рационалне *Bézier* површи (слика 2.3.7) су перспективне пројекције у \mathbb{R}^d простору полиномских *Bézier* површи $S^w(u, v)$ из \mathbb{R}^{d+1} простора, односно:

$$S^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) P_{i,j}^w \quad (2.3.15)$$

$$S(u, v) = H\{S^w(u, v)\} = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) w_{i,j}} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) P_{i,j}$$

где је $R_{i,j}(u, v) = \frac{B_{i,n}(u) B_{j,m}(v) w_{i,j}}{\sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^m B_{r,n}(u) B_{s,m}(v) w_{r,s}}$. За разлику од површи $S^w(u, v)$ површ $S(u, v)$ не представља тензорски производ с обзиром да функције $R_{i,j}$ не представљају производ других базних функција. Као и у случају линија све операције обављају се на $S^w(u, v)$, а затим се врши пројекција резултата.



Слика 2.3.7 Рационална *Bézier* квадратна крива - кружни лук /лево/; рационална *Bézier* површ - цилиндрична површ /десно/

И поред изузетних особина *Bézier* кривих и површи у процесима креирања комплексних облика, интерактивног обликовања и сл. оне не представљају најадекватније решење. У тим случајевима погодније је користити сегментне полиномске или сегментне рационалне криве и површи - *B-Spline* или *NURBS*.

B-Spline криве су дефинисане полиномским *B-Spline* базним функцијама. За чворни вектор U , *B-Spline* базне функције дефинишу се рекурзивно почевши са $p = 0$ као:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{ако је } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{другачије} \end{cases} \quad (2.3.16)$$

а за $p \geq 1$:

$$N_{i,p}(u) = \frac{u-u_i}{u_{i+p}-u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2.3.16a)$$

Уколико се унутрашњи чворови не понављају, базне функције на границама сегмената увек имају континуитет C^{p-1} . Мултиплицирањем унутрашњих чворова k -пута, континуитет функција постаје C^{p-k} . Интерполационе контролне тачке мултиплициране су p -пута, због чега је континуитет у тим тачкама C^0 .

Први извод базне функције $N_{i,p}(u)$ дат је изразом:

$$N'_{i,p} = \frac{p}{u_{i+p}-u_i} N_{i,p-1}(u) - \frac{p}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u) \quad (2.3.17)$$

Диференцирањем претходног израза добија се општи израз за k -ти извод функције $N_{i,p}(u)$:

$$N_{i,p}^{(k)}(u) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p}-u_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}}{u_{i+p+1}-u_{i+1}} \right) \quad (2.3.17a)$$

Формулу за израчунавање k -тог извода функције $N_{i,p}(u)$ могуће је изрзити и у функцији $N_{i,p-k}, \dots, N_{i+k,p-k}$:

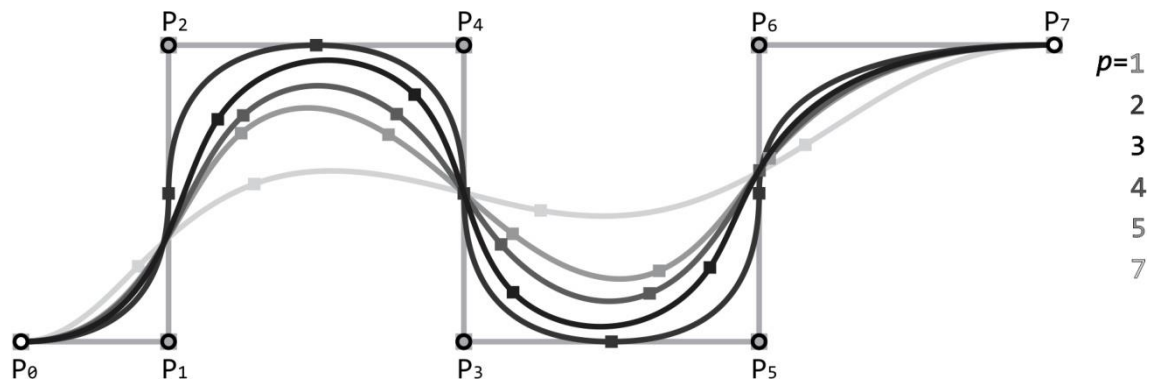
$$N_{i,p}^{(k)} = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k a_{k,j} N_{i+j,p-k} \quad (2.3.18)$$

$$a_{0,0} = 1; a_{k,0} = \frac{a_{k-1,0}}{u_{i+p-k+1}-u_i}; a_{k,j} = \frac{a_{k-1,j} - a_{k-1,j-1}}{u_{i+p+j-k+1}-u_{i+1}}, j = 1, \dots, k-1; a_{k,k} = \frac{-a_{k-1,k-1}}{u_{i+p+1}-u_{i+k}}$$

B -Spline крива $C(u)$ (слика 2.3.8) може се дефинисати као линеарна комбинација базних функција помножених координатама контролних тачака:

$$C(u) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(u) P_i \quad a \leq u \leq b \quad (2.3.19)$$

где је $N_{i,p}(u)$ B -Spline базна функција p -тог степена, а P_i i -та контролна тачка. Уколико није другачије дефинисано претпоставља се да је $a = 0$, а $b = 1$. Степен p , број контролних тачака $n + 1$ и број чворова $m + 1$ криве повезани су релацијом: $m = n + p + 1$.

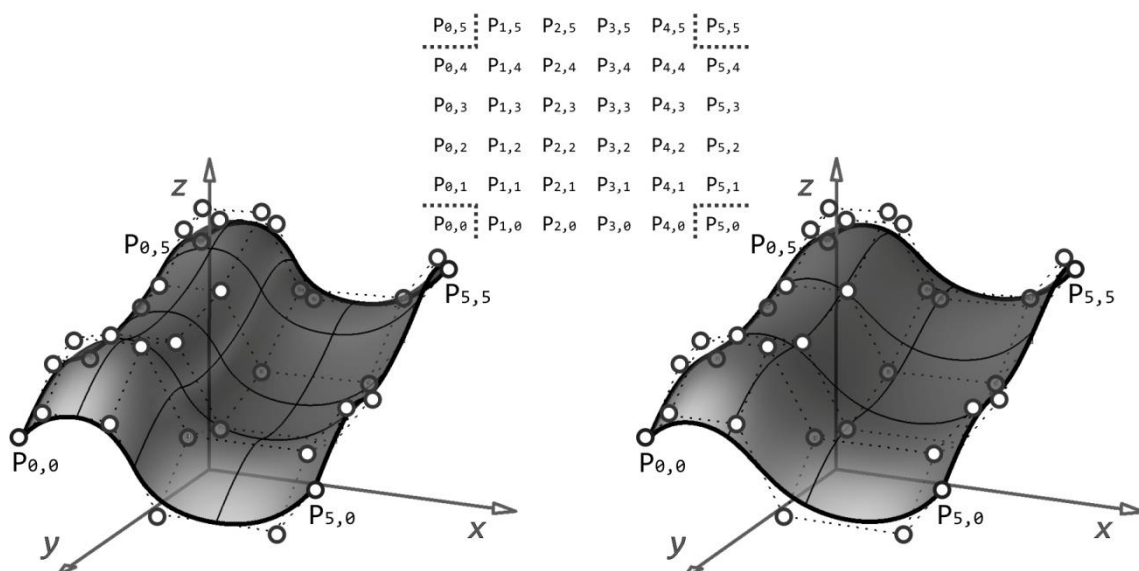


Слика 2.3.8 B -Spline криве: за исти контролни полигон од 8 контролних тачака означених са \circ различите криве добијене су варирањем степена p , \blacksquare је ознака за чворове

B-Spline површи могуће је дефинисати уколико се за полазиште узме бидирекционална мрежа од $n \times m$ контролних тачака $P_{i,j}$ и два чворна вектора: $U = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}$ и $V = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}$, где вектор U има $r + 1$ чворова, а V има $s + 1$ чворова. Релације којима су повезани степен p и q , број контролних тачака $n + 1$ и $m + 1$ и број чворова $r + 1$ и $s + 1$, у случају површи дефинисане су изразима: $r = n + p + 1$ и $s = m + q + 1$. Дакле, *B-Spline* површ (слика 2.3.9) је одређена помоћу два чворна вектора једнодимензионалних базних функција $N_{i,p}$ и $N_{j,q}$ (где је $i = 1, \dots, n$; а $j = 1, \dots, m$) реда p односно q и дефинисана изразом:

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j} \tag{2.3.20}$$

Изопараметарске криве на површи $S(u, v)$ добијају се аналогно као и код *Bézier* површи, тј. за константно $u = u_0$ добија се изокрива: $C_{u_0}(v) = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v) Q_j(u_0)$, где је $Q_j(u_0) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u_0) P_{i,j}$, док се за $v = v_0$ добија изокрива: $C_{v_0}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) Q_i(v_0)$, где је $Q_i(v_0) = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v_0) P_{i,j}$. Изокрива $C_{u_0}(v)$ је *B-Spline* крива q -тог степена на чворном вектору V , а изокрива $C_{v_0}(u)$ је *B-Spline* крива p -тог степена на чворном вектору U . Тачка $S(u_0, v_0)$ добија се у пресеку кривих $C_{u_0}(v)$ и $C_{v_0}(u)$.



Слика 2.3.9 *B-Spline* површи: за исту контролну мрежу 6×6 контролних тачака приказ квадратне површи /лево/ и кубне површи /десно/

NURBS крива је рационална *B-Spline* крива и представља пројекцију нерационалне (полиномске) *B-Spline* криве дефинисане у $(d + 1)$ -димензионалном простору хомогених координата на d -димензионални физички простор. Да би се добила *NURBS* крива у \mathbb{R}^d простору, потребно је прво дефинисати скуп $P_i^w, (i = 1, \dots, n)$ контролних тачака за *B-Spline* криву у \mathbb{R}^{d+1} простору и отворени неравномерни чворни вектор $U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, u_{p+1}, \dots, u_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$. Контролне тачке *NURBS* криве дефинисане су изразом:

$$(P_i)_j = \frac{(P_i^w)_j}{(P_i^w)_{d+1}}, \quad j = 1, \dots, d \quad (2.3.21)$$

где $(P_i)_j$ представља j -ту компоненту вектора P_i , а $w_i = (P_i^w)_{d+1}$ i -ту тежину.

NURBS базна функција степена p дефинисана је изразом:

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(u)w_i} \quad (2.3.22)$$

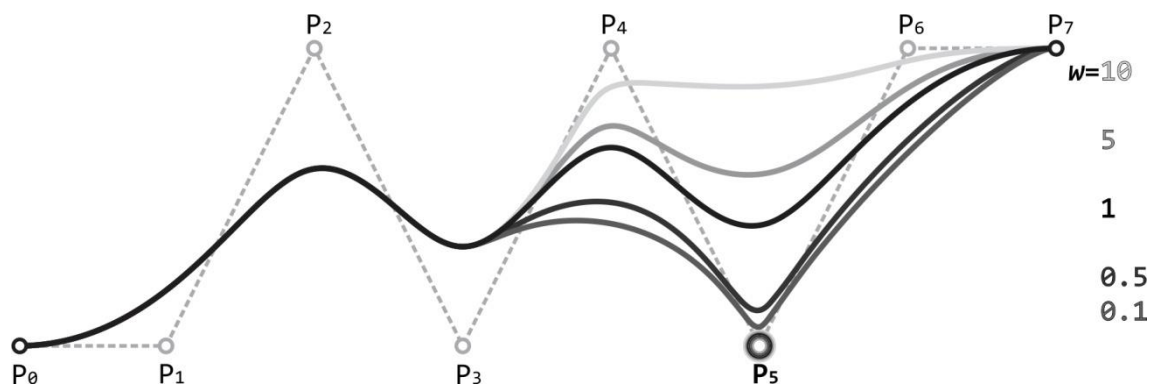
а *NURBS* крива (слика 2.3.10) p -тог степена изразом:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \quad a \leq u \leq b \quad (2.3.23)$$

где P_i представљају контролне тачке, w_i тежински фактор, а $N_{i,p}(u)$ *B-Spline* базне функције p -тог степена дефинисане на отвореном неравномерном вектору U . Уколико није другачије наглашено претпоставља се да је $a = 0$, $b = 1$, а $w_i > 0$. Односно сегменту *NURBS* криву могуће је дефинисати и изразом:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)P_i \quad (2.3.24)$$

где су $R_{i,p}$ сегментне рационалне базне функције на интервалу $u \in [0,1]$.



Слика 2.3.10 *NURBS* криве трећег степена, чије су контролне тачке означене са \circ , добијене варирањем тежинског фактора w чворне тачке P_5

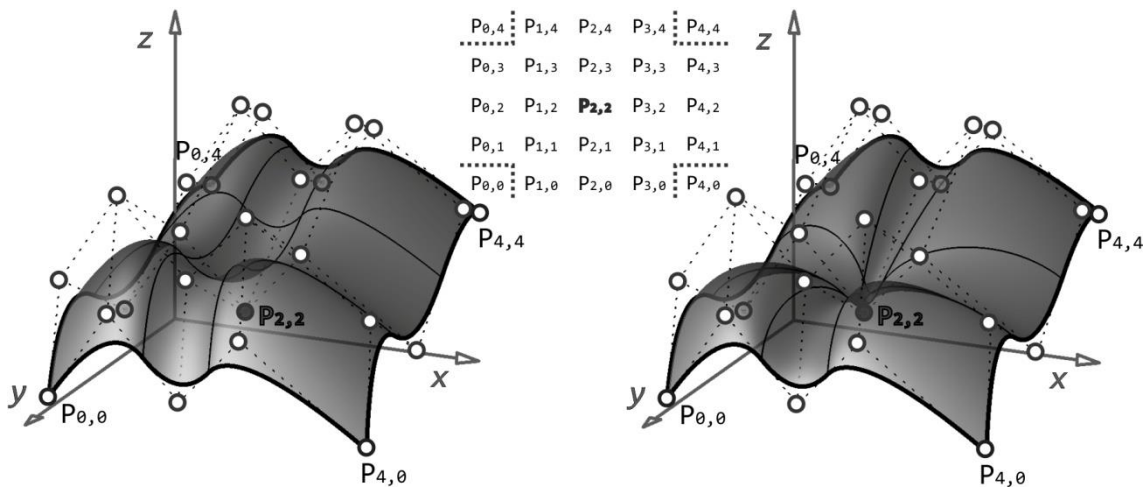
NURBS криве могуће је представити коришћењем хомогених координата полазећи од B-Spline криве $C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_i^w$ дефинисане у \mathbb{R}^{d+1} , где је $P_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$, NURBS крива у \mathbb{R}^d добија се применом перспективног мапирања H , тј. $C(u) = H\{C^w(u)\}$.

NURBS површ p -тог степена у u правцу и q -тог степена у v правцу је бипараметарска векторска сегментна рационална функција, дата изразом:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}} \quad 0 \leq u, v \leq 1 \quad (2.3.25)$$

где су $P_{i,j}$ бидирекциона контролна мрежа, $w_{i,j}$ тежински фактори, а $N_{i,p}(u)$ и $N_{j,q}(v)$ нерационалне B-Spline базне функције дефинисане на отвореним чворним векторима U и V . Увођењем рационалних базних функција: $R_{i,j}(u, v) = \frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)w_{k,l}}$, NURBS површ (слика 2.3.11) могуће је изразити на следећи начин:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v)P_{i,j} \quad (2.3.26)$$



Слика 2.3.11 NURBS површи: за исту контролну мрежу приказ квадратне површи /лево/ и површи настале варирањем тежинског фактора $w_{2,2} = 10.0$ означене контролне тачке $P_{2,2}$ /десно/

NURBS површи $S(u, v)$ је такође могуће представити коришћењем хомогених координата, полазећи од B-Spline површи $S^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)P_{i,j}^w$ дефинисане у \mathbb{R}^{d+1} и $P_{i,j}^w = (w_{i,j}x_{i,j}, w_{i,j}y_{i,j}, w_{i,j}z_{i,j}, w_{i,j})$, $S(u, v) = H\{S^w(u, v)\}$.

Особине параметарских кривих и површи произилазе из особина базних функција. Преглед основних особина сумиран је табелом 2.3.1.

Табела 2.3.1 Особине базних функција параметарских кривих и површи

особине базних функција	Bézier базне функције $B_{i,n}(u)$ $B_{i,n}(u)B_{j,m}(v)$	R-Bézier базне функције $R_{i,n}(u)$ $R_{i,n}(u, v)$	B-Spline базне функције $N_{i,p}(u)$ $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$	NURBS базне функције $R_{i,p}(u)$ $R_{i,j}(u, v)$
нису негативне <i>non-negativity</i>	$B_{i,n}(u) \geq 0,$ $\forall i, n$ и $0 \leq u \leq 1$	$R_{i,n}(u) \geq 0,$ $\forall i, n$ и $0 \leq u \leq 1$	$N_{i,p}(u) \geq 0,$ $\forall i, p, u$	$R_{i,p}(u) \geq 0,$ $\forall i, p, u$
јединично својство <i>partition of unity</i>	$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(u) = 1,$ $\forall 0 \leq u \leq 1$ $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,p}(u)B_{j,q}(v) = 1, \forall (u, v) \in [0,1] \times [0,1].$	$\sum_{i=0}^n R_{i,n}(u) = 1,$ $\forall 0 \leq u \leq 1$ $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,n}(u, v) = 1, \forall (u, v) \in [0,1] \times [0,1].$	$\sum_{j=i-p}^i N_{i,p}(u) = 1,$ $\forall u \in [u_i, u_{i+1})$ $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) = 1, \forall (u, v) \in [0,1] \times [0,1].$	$\sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) = 1,$ $\forall u \in [0,1]$ $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) = 1, \forall (u, v) \in [0,1] \times [0,1].$
	$B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1$	$R_{0,n}(0) = R_{n,n}(1) = 1$	$N_{0,p}(0) = N_{n,p}(1) = 1$	$R_{0,p}(0) = R_{n,p}(1) = 1$ $R_{0,0}(0,0) = R_{n,0}(1,0) = R_{0,m}(0,1) = R_{n,m}(1,1) = 1$
достигу тачно једну максималну вредност	на интервалу $u \in [0,1],$ у $u = i/n$	на интервалу $u \in [0,1]$	за $p > 0$ на интервалу $u \in [0,1]$ за $p > 0$ и $q > 0$	за $p > 0$ на интервалу $u \in [0,1]$ за $p > 0$ и $q > 0$
симетрија	за $\forall n,$ скуп полинома $\{B_{i,n}(u)\}$ је симетричан у односу на $u = 1/2$			
локално дејство <i>local support</i>			$N_{i,p}(u) = 0$ за $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$ $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) = 0$ ако су (u, v) изван четвороугла $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$	$R_{i,p}(u) = 0$ за $u \notin [u_i, u_{i+p+1})$ $R_{i,j}(u, v) = 0$ ако су (u, v) изван четвороугла $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$
			у четвороуглу $[u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$ највише $(p+1)(q+1)$ базних функција $\neq 0,$ и то $N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$ за $i_0 - p \leq i \leq i_0$ и $j_0 - q \leq j \leq j_0$	у четвороуглу $[u_{i_0}, u_{i_0+1}) \times [v_{j_0}, v_{j_0+1})$ највише $(p+1)(q+1)$ базних функција $\neq 0,$ и то $R_{i,j}(u, v)$ за $i_0 - p \leq i \leq i_0$ и $j_0 - q \leq j \leq j_0$
диференцијабилност			унутар распона чворова је $\infty,$ у чвору $(p-k)$ -пута унутар четвороугла образованог u и v чворним линијама постоје сви парцијални изводи у чвору $u(v)$ $p-k$ $(q-k)$ -пута диференцијабилна у $u(v)$ правцу	унутар распона чворова је $\infty,$ у чвору $(p-k)$ -пута унутар четвороугла образованог u и v чворним линијама постоје сви парцијални изводи у $u(v)$ чвору $p-k$ $(q-k)$ -пута диференцијабилна у $u(v)$ правцу
дегенерација		$w_i = 1, \forall i \Rightarrow R_{i,n}(u) = B_{i,n}(u)$ $w_{i,j} = 1, \forall i, j \Rightarrow R_{i,n}(u, v) = B_{i,n}(u, v)$	за случај $U = \{0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}$ $N_{i,p}(u) = B_{i,n}(u)$ $n = p, m = q, U = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\}$ и $V = \{0, \dots, 0, 1, \dots, 1\} \Rightarrow N_{i,p}(u)N_{j,q}(v) = B_{i,n}(u)B_{j,m}(v), \forall i, j$	$w_i = 1, \forall i \Rightarrow R_{i,p}(u) = N_{i,p}(u),$ $w_{i,j} = a, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m$ и $a \neq 0 \Rightarrow R_{i,j}(u, v) = N_{i,p}(u)N_{j,q}(v), \forall i, j$

У случају *B-Spline* и NURBS базних функција повећањем степена повећава се континуитет, док се повећањем мултиплицитета континуитет смањује.

Следеће геометријске особине параметраских кривих $C(u)$ и површи $S(u, v)$ директна су последица претходно сумираних особина базних функција. Криве/површи се налазе у оквиру конвексног дела (*convex hull*) контролног полигона, односно полиедарске просторне структуре, образованих линеарним спајањем контролних тачака. Крајње контролне тачке кривих и површи су интерполационе, док остале, у општем случају, не морају лежати на криви/површи, респективно $C(0) = P_0$ и $C(1) = P_n$, односно $S(0,0) = P_{0,0}$, $S(1,0) = P_{n,0}$, $S(0,1) = P_{0,m}$ и $S(1,1) = P_{n,m}$. Крива блиско прати контролни полигон (*variation diminishing*), тј. ни једна линија/раван нема више пресека са кривом у равни/простору него са њеним контролним полигоном. Што је нижи степен крива/површ ближе прати свој контролни полигон. Екстремни случај је за $p = 1$, када се крива и контролни полигон, односно површ и контролни полиедар поклапају. Тријангулацијом контролне мреже могуће је образовати планарну полиедарску апроксимацију површи. Криве/површи су коваријантне у погледу афино трансформација, тј. трансформације се остварују применом на њихове контролне полигоне/полиедре. Рационалне криве/површи су инваријантне према перспективним пројекцијама. У случају сегментних параметраских кривих и површи облик је могуће модификовати локално, односно померање контролних тачака P_i и/или варирање тежинских фактора w_i , у случају NURBS кривих, утиче само на део криве на интервалу $u \in [u_i, u_{i+p+1})$, односно у случају површи померање $P_{i,j}$ и/или варирање $w_{i,j}$, у случају NURBS површи, утиче на промену облика само у четвороуглу $[u_i, u_{i+p+1}) \times [v_j, v_{j+q+1})$. Крива је бесконачно диференцијабилна у унутрашњости интервала између чворова, а најмање је $p - k$ пута континуално диференцијабилна, односно површ је $p - k(q - k)$ пута диференцијабилна у $u(v)$ чвору мултиплицитета k . Полиномске Bézier криве/површи представљају специјалан случај рационалних Bézier кривих/површи и *B-Spline* кривих/површи. NURBS крива/површ која нама унутрашње чворове представља рационалну Bézier криву/површ. Полиномске и рационалне Bézier и *B-Spline* криве/површи су специјални случајеви NURBS кривих/површи.

Поступци манипулације густином мреже (refinement) су: уношење, прогушћење и уклањање тачака, елевација и редукција степена (слика 2.3.12).

Уношење тачака (knot insertion) представља поступак додавања тачке који имплицира промену векторског простора базе, а који не утиче на геометријску и параметрску промену криве/површи. За NURBS криву $C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_i^w$ дефинисану на чворном вектору $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ уметањем тачке \bar{u} , где $\bar{u} \in [u_k, u_{k+1})$, формира се нови чворни вектор $\bar{U} = \{\bar{u}_0 = u_0, \dots, \bar{u}_k = u_k, \bar{u}_{k+1} = \bar{u}, \bar{u}_{k+2} = u_{k+1}, \dots, \bar{u}_{m+1} = u_m\}$. Криву на вектору \bar{U} могуће је изразити као $C^w(u) = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{N}_{i,p}(u) Q_i^w$. Поступак уношења тачке у суштини се односи на одређивање Q_i^w решавањем система линеарних једначина. На сличан начин реализује се и уношење тачака код површи, применом поступка на колоне односно редове контролних тачака, тј. тачка \bar{u} се додаје чворном вектору U уношењем у свакој од $m + 1$ колона, чиме се добија мрежа $Q_{i,j}^w, 0 \leq i \leq n + 1, 0 \leq j \leq m$, док се тачка \bar{v} уноси у сваки од $n + 1$ ред, а резултујуће контролна мрежа је $Q_{i,j}^w, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m + 1$.

Прогушћење тачака (knot refinement) је поступак једновременог додавања више тачака који подразумева одређивање нових контролних тачака $Q_i^w, i = 0, \dots, n + r + 1$ за NURBS криву $C^w(u)$ дефинисану на чворном вектору U након додавања скупа $X = \{x_0, \dots, x_r\}$ који задовољава да је $x_i \leq x_{i+1}$ и $u_0 < x_i < u_m, \forall i$. У математичком смислу поступак је идентичан уношењу, а решавање проблема је заправо програмерске природе. У случају NURBS површи $S^w(u, v)$ дефинисане на чворним векторима U и V , прогушћење вектора остварује се применом алгоритма на $m + 1$ колона, односно на $n + 1$ редова.

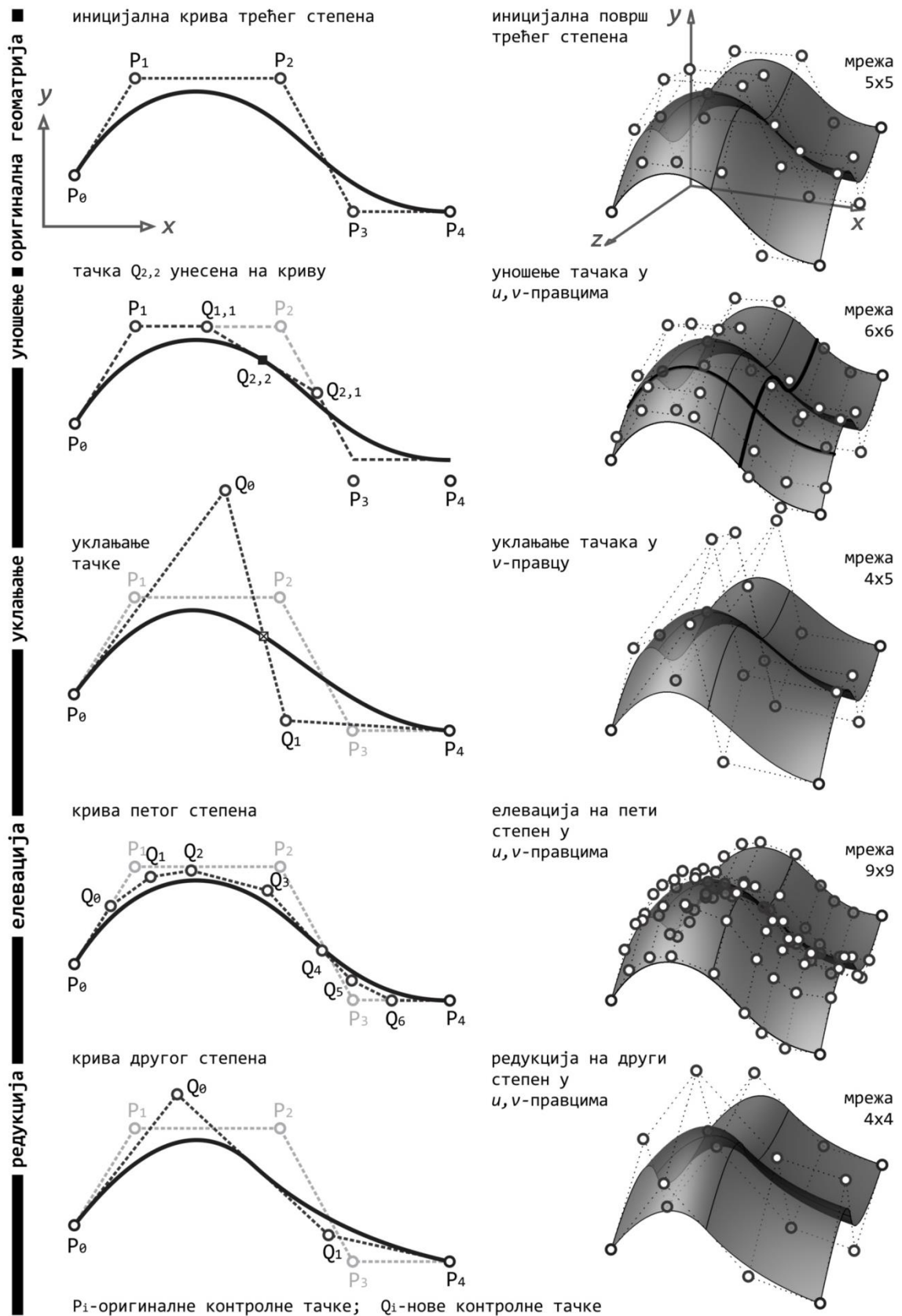
Уклањање тачака (knot removal) представља поступак обрнут уношењу којим се добија компактнија репрезентација. За NURBS криву $C^w(u)$ дефинисану на чворном вектору U уклањањем t -пута тачке u_r чији је мултиплицитет s из $U (1 \leq t \leq s)$, добија се вектор U_t . Након уклањања тачке u_r криву је могуће изразити као $C^w(u) = \sum_{i=0}^{n-t} \bar{N}_{i,p}(u) Q_i^w$, где су $\bar{N}_{i,p}(u)$ базне функције степена p на чворном вектору U_t . Након уклањања тачке крива геометријски и параметарски остаје идентична. Имајући у виду да базне функције $N_{i,p}(u)$ које нису једнаке нули у

тачки u_r имају континуитет C^{p-s} , тачку u_r могуће је t -пута уклонити ако и само ако је крива $C^w(u)$ континуитета C^{p-s+t} у $u = u_r$. У случају NURBS површи $S^w(u, v)$ уклањање тачке u , односно тачке v применом алгоритма на $m + 1$ колона, односно $n + 1$ редова контролних тачака.

Елевација степена (degree elevation) представља поступак подизања степена којим се не узрокују геометријске и пареметарске промене. NURBS криви $C^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_i^w$ степена p на чворном вектору U могуће је подићи степен на $p + 1$ тако да се образују нове контролне тачке Q_i^w и чворни вектор \hat{U} . Израз криве тада гласи $C_p^w(u) = C_{p+1}^w(u) = \sum_{i=0}^{\hat{n}} N_{i,p+1}(u)Q_i^w$, а \hat{n} , \hat{U} и Q_i представљају непознате. Како би се одредило \hat{n} и \hat{U} претпоставља се $U = \{u_0, \dots, u_m\} = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{u_s, \dots, u_s}_{m_s}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$, где је m_1, \dots, m_s мултиплицитет чворова. С обзиром да крива $C_{p+1}(u)$ мора имати исти континуитет као $C_p(u)$, а исти чвор мултиплицитет $m_i + 1$ следи $\hat{n} = n + s + 1$ и $\hat{U} = \{u_0, \dots, u_{\hat{m}}\} = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+2}, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{m_1+1}, \dots, \underbrace{u_s, \dots, u_s}_{m_s+1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+2}\}$, где је $\hat{m} = m + s + 2$. Израчунавање Q_i врши се решавањем система линеарних једначина. У случају NURBS површи $S^w(u, v)$ елевација степена остварује се применом на колоне/редове контролних тачака.

Редукација степена (degree reduction) представља поступак супротан елевацији. Криви $C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)Q_i$ степена p на чворном вектору $U = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{u_s, \dots, u_s}_{m_s}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1}\}$ могуће је редуковати степен тако да се добије $C(u) = \hat{C}(u) = \sum_{i=0}^{\hat{n}} N_{i,p-1}(u)P_i$ на чворном вектору $\hat{U} = \{\underbrace{a, \dots, a}_p, \underbrace{u_1, \dots, u_1}_{m_1-1}, \dots, \underbrace{u_s, \dots, u_s}_{m_s-1}, \underbrace{b, \dots, b}_p\}$, где је $\hat{n} = n - s - 1$. За разлику од елевације степена коју је увек могуће извршити, са редукацијом то није случај, због чега сваки алгоритам за редукацију степена мора произвести више једначина од непознатих P_i . Начелно резултујућа крива/површ степена $p - 1$ представља апроксимацију иницијалне криве/површи, а одступање које се јавља у оквирима је дозвољене толеранције.

Детаљно изложене алгоритме и примере могуће је пронаћи у [Pie97].



Слика 2.3.12 Приказ примена основних геометријских алгоритама уношење и уклањања тачака, елевације и редукције степена на криви и површи

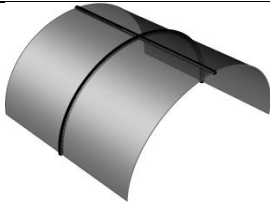
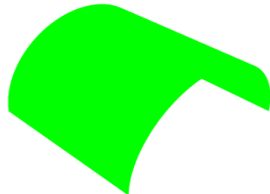


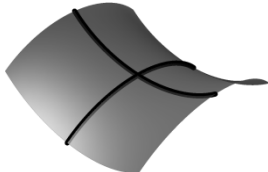
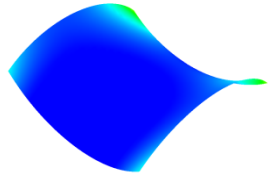
2.3.1.2 Технике моделовања геометрије система

Две фундаменталне геометријске карактеристике од значаја за разматрања површинских система су облик средње површи из чијих се једначина изводе изрази за напрезања и облик контуре дуж које су дати гранични услови. Начелно, облик контуре површи може варирати између геометријски правилног или неправилног, полигоналног или криволинијског. С друге стране, облик површи у првом реду повезан је са природом кривине и техником генерисања површи. У зависности од предзнака Гаусове кривине, која је дефинисана изразом:

$$K_G = K_1 \cdot K_2 = \frac{1}{r_1 r_2} \tag{2.3.27}$$

где је $K_1 = \frac{1}{r_1}$ прва, а $K_2 = \frac{1}{r_2}$ друга главна кривина у тачки површи, могуће је извршити класификацију површи на начин приказан табелом 2.3.2.

Табела 2.3.2 Класификација површи према врсти Гаусове кривине

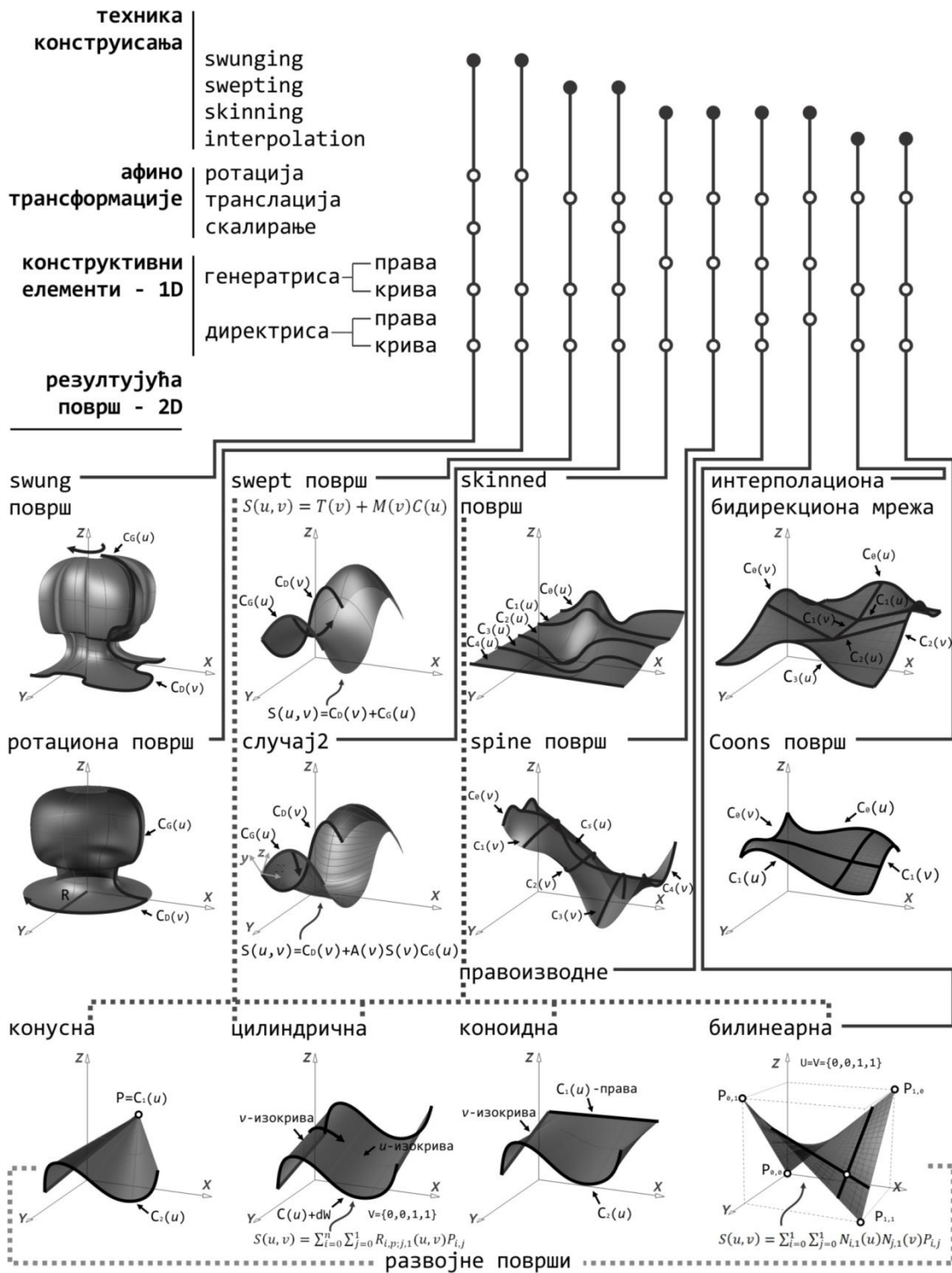
једноструко закривљене (цилиндричне површи)	двоструко закривљене површи	
	позитивно-синкластичне (елиптичне површи)	негативно-антикластичне (хиперболичне површи)
  $(r_2 = \infty) \frac{1}{r_1 \cdot r_2} = 0$ један од радијуса је у центри бесконачности, због чега је Гаусова кривина једнака 0	  $\frac{1}{r_1 \cdot r_2} > 0$ центри кривина обе фамилије кривих налазе се са исте стране површи	  $\frac{1}{r_1 \cdot r_2} < 0$ центри кривина једне фамилије кривих се налазе са једне стране, а друге фамилије кривих са друге стране површи

Друга значајна дефиниција кривине је просечна (*mean*) кривина дата изразом:

$$K_M = \frac{1}{2} (K_1 + K_2) \tag{2.3.28}$$

Када су главне кривине K_1 и K_2 једнаке вредности различитих предзнака просечна кривина једнака је нули, што представља специјалан случај површи познатих као минималне површи или површ нулте енергије.

Технике моделовања површи подразумевају њихово генерисање од задатих интерполационих изопараметрских NURBS кривих. Претходно се конкретизује избором кривих генератриса $C_G(u)$, директриса $C_D(v)$ и применом афино трансформација (слика 2.3.13).

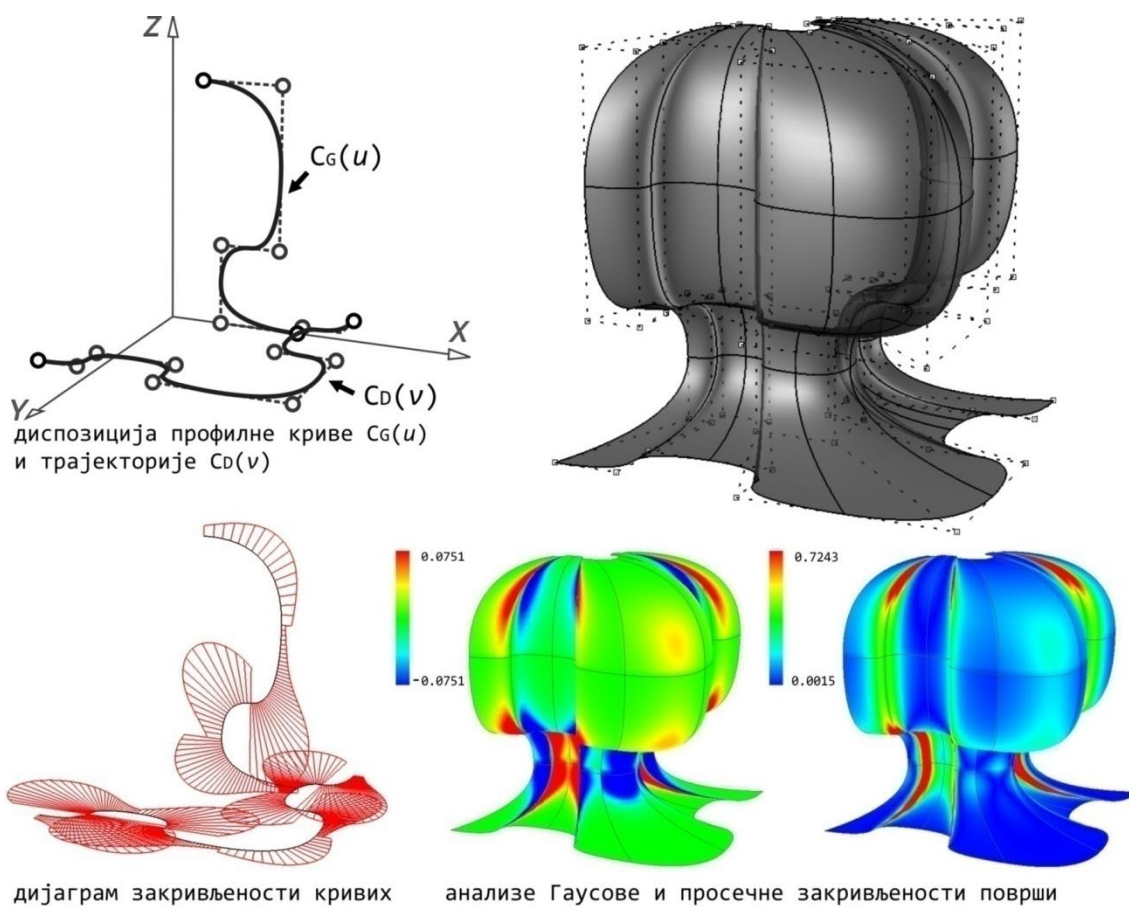


Слика 2.3.13 Класификација површи према техникама моделовања

Опште ротационе површи (*swing surfaces*) генеришу се ротацијом криве генератрисе $C_G(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u)P_i$ око z-осе и симултаним скалирањем према криви директриси $C_D(v) = \sum_{j=0}^m R_{j,q}(v)P_j$ (слика 2.3.14). Једначина површи гласи:

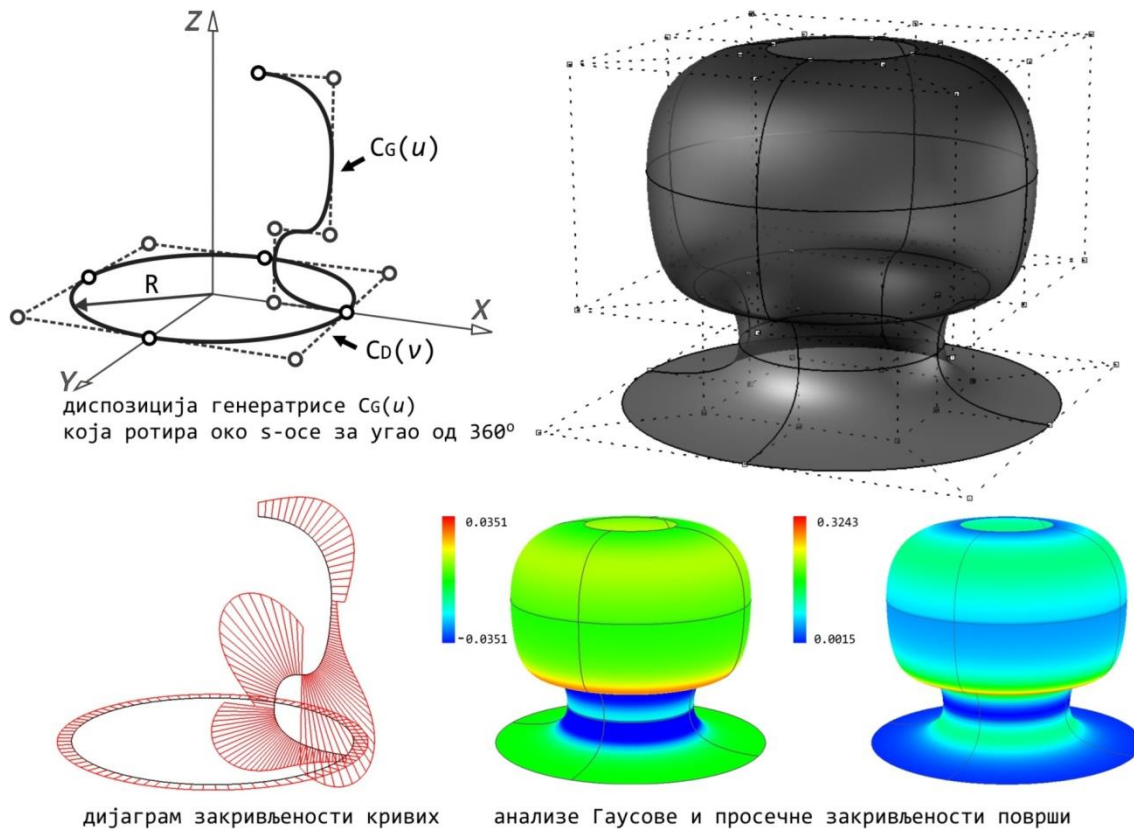
$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,p;j,q}(u, v)P_{i,j} \quad (2.3.29)$$

где је $P_{i,j} = (\alpha P_{i,x}P_{j,x}, \alpha P_{i,x}P_{j,y}, P_{i,z})$, α произвољни фактор скалирања, а $w_{i,j} = w_i w_j$. Површ $S(u, v)$ дефинишу исти чворни вектори U и V који дефинишу $C_G(u)$ и $C_D(v)$. У зависности од тога да ли су криве $C_G(u)$ и $C_D(v)$ отворене или затворене резултат ће бити отворене или затворене површи у u и/или v правцу.



Слика 2.3.14 Општа ротациона површ генерисана ротацијом и скалирањем генератрисе $C_G(u)$ криве око z-осе и директриси $C_D(v)$

Посебан случај представљају *NURBS ротационе површи* $S(u, v)$ које се генеришу ротационим кретањем генератрисе $C_G(u)$ око произвољне осе за произвољни угао. Код тако настале површ за константну вредност \bar{u} , $S(\bar{u}, v)$ добија се генератриса $C_G(u)$, а за константну вредност \bar{v} , $S(u, \bar{v})$ круг / кружни лук $C_D(v)$ који лежи у равни нормалној на осу ротације са центром у осу ротације (слика 2.3.15).



Слика 2.3.15 Ротациона површ генерисана ротацијом NURBS криве за 360° око z -осе

Опште транслаторне површи (*swept surfaces*) настају кретањем криве генератрисе $C_G(u)$ дуж произвољне криве директрисе $C_D(v)$. У општем случају површ је могуће формулисати изразом:

$$S(u, v) = C_D(v) + M(v)C_G(u) \tag{2.3.30}$$

где $M(v)$ представља матрицу 3×3 која инкорпорира ротацију и неуниформно скалирање $C_G(u)$ у функцији v . $C_D(v)$ и $C_G(u)$ могу бити произвољне рационалне/нерационалне, планарне/просторне, отворене/затворене криве. Практична примена ових површи ограничена је на два случаја (слика 2.3.16):

- када је $M(v), \forall v$ јединична, што значи да се $C_G(u)$ само транслира по $C_D(v)$ и
- када $M(v)$ не представља јединичну матрицу.

Први случај је могуће описати изразом:

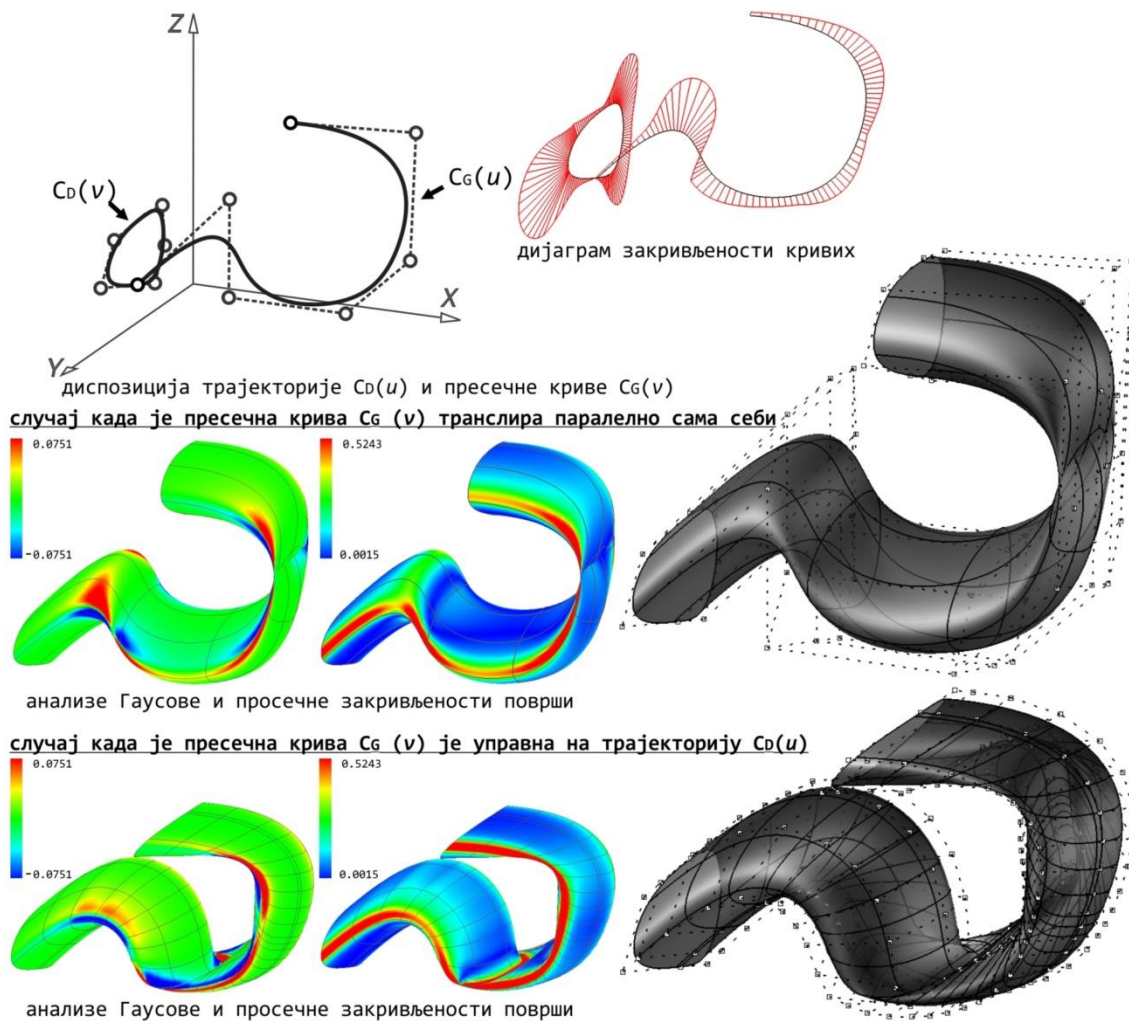
$$S(u, v) = C_D(v) + C_G(u) \tag{2.3.31}$$

односно за $C_D(v) = \frac{\sum_{j=0}^m N_{j,q}(v)w_j^D T_j}{\sum_{j=0}^m N_{j,q}(v)w_j^D}$, $V = \{v_0, \dots, v_s\}$ и $C_G(v) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{j,p}(u)w_i^G Q_i}{\sum_{i=0}^n N_{j,p}(u)w_i^G}$, $U =$

$\{u_0, \dots, u_r\}$, површ је могуће изразити као $S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}$, где

су $P_{i,j} = T_j + Q_i$; $i = 0, \dots, n$; $j = 0, \dots, m$ контролне тачке, а $w_{i,j} = w_i^G w_j^D$; $i = 0, \dots, n$; $j = 0, \dots, m$ тежине. Када се за $C_D(v)$ усвоји права линија настају цилиндричне површи, као специјалан случај.

Како би се објаснио други случај генерисања потребно је поред глобалног координатног система $\{O, X, Y, Z\}$ увести и локални ортогонални координатни систем $\{o(v), x(v), y(v), z(v)\}$ који се креће дуж $C_D(v)$. $\forall v, v_0 \leq v \leq v_s$ дефинишу се релације: $o(v) = C_D(v)$, $x(v) = \frac{C_D'(v)}{|C_D'(v)|}$ и векторска функција оријентације $B(v) \cdot x(v) = 0, \forall v$ која задовољава $z(v) = \frac{B(v)}{|B(v)|}$. У овом случају $y(v) = z(v) \times x(v)$, а скалирање се уводи помоћу тродимензионалне векторске функције $s(v) = (s_x(v), s_y(v), s_z(v))$.



Слика 2.3.16 Swept површ генерисана коришћењем директрисе-трајекторије $C_D(v)$ и генератрисе $C_G(u)$ која се транслира дуж трајекторије: 1/ случај када крива транслира паралелно сама себи и 2/ случај када је пресечна крива управна на трајекторију

Једначина површи гласи:

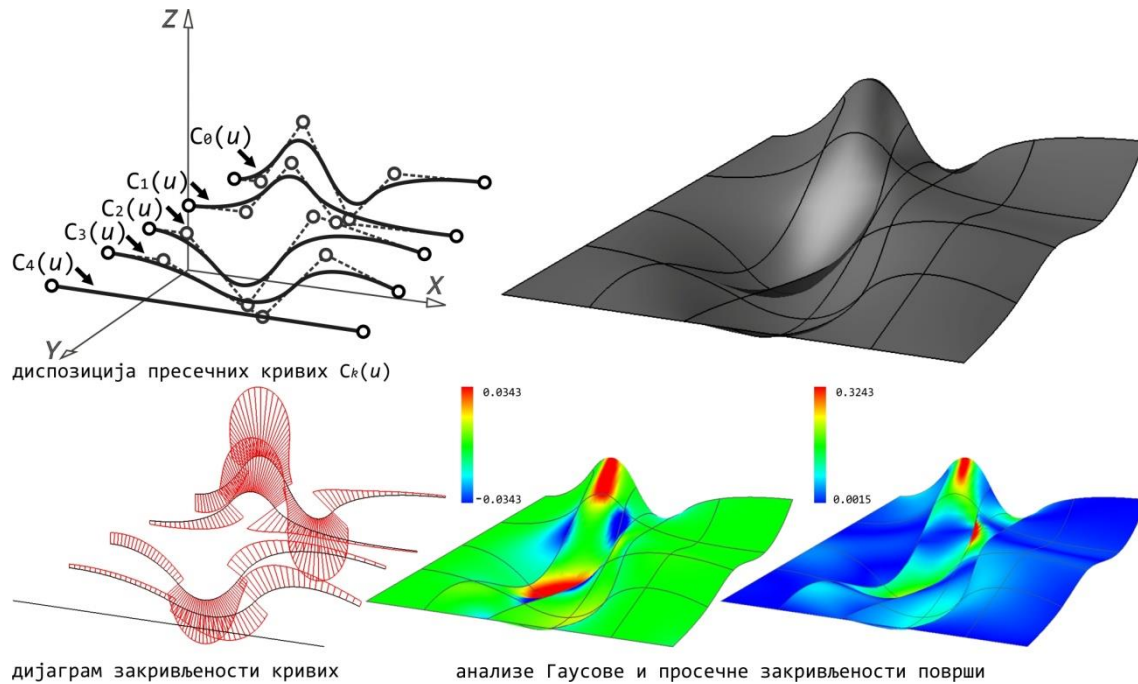
$$S(u, v) = C_D(v) + A(v)S(v)C_G(u) \quad (2.3.32)$$

где је $S(v)$ матрица чији су дијагонални елементи $(s_x(v), s_y(v), s_z(v))$, а $A(v)$ глобална матрица трансформације $\{O, X, Y, Z\}$ у $\{o(v), x(v), y(v), z(v)\}$. Исопараметарске криве $S(u, v)$ за константне вредности v представљају инстанце $C_G(u)$ трансформисане помоћу $A(v)$ и транслиране дуж $C_D(v)$. Када $C_G(u)$ пролази кроз глобални почетак представља изопараметарску криву површи $S(u = \bar{u}, v)$. NURBS репрезентација $S(u, v)$ није увек могућа, с обзиром да је потребно да $A(v)$ и $S(v)$ буду рационалне функције, што за $A(v)$ генерално није могуће, чак и за најједноставнији случај $z(v) = Z, \forall v_0 \leq v \leq v_s$. Коришћењем различитих метода, од којих су неке приказане у [Pie97], могуће је дефинисати NURBS апроксимацију израза (2.3.32). Када је $C_D(v)$ планарна, $B(v)$ је константна функција чије су вредности вектор нормале на раван у којој лежи $C_D(v)$. У случају када су $C_D(v)$ произвољне просторне криве користе се Френеови образци⁶⁶.

Опште правоизводне површи (skinned surfaces) настају међусобним спајањем скупа пресечних кривих $\{C_k(u)\}, k = 0, \dots, K$ тзв. поступком *skining*-а⁶⁷ (слика 2.3.17). Планарне или просторне криве $C_k(u)$ за резултујућу површ су интерполационе. Дефинисањем пресечних кривих: $C_k^w(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_{i,k}^w$, $k = 0, \dots, K$, истог степена p , на истом чворном вектору U , започиње поступак генерисања, који се наставља одређивањем степена q за v правац, израчунавњем параметара $\{\bar{v}_k\}, k = 0, \dots, K$ и чворног вектора V , који се користе за $n + 1$ интерполацију кривих преко контролних тачака пресечних кривих. На овај начин добија се мрежа $Q_{i,j}^w$ контролних тачака површи. У случају да је макар једна од кривих рационална $C_k^w(u)$ интерполација се врши у \mathbb{R}^{d+1} простору. Иако је формулација ових кривих једноставна сама имплементација често није с обзиром да је површ тешко контролисати јер зависи од бројних пресечних кривих, због чега се често прво дефинише површ од мањег броја пресечних кривих, а потом се у наредним итерацијама врши према потреби додавање пресечних кривих.

⁶⁶Френеовим (Frenet) обрасцима описане су кинематичке особине тачке која се креће по континуалној диференцијабилној кривој у \mathbb{R}^3 простору, односно геометријске особине саме криве. Обрасцима су дефинисане релације јединичних вектора тангенте T , нормале N и бинормале B .

⁶⁷Уместо термина *skining* у употреби је и старији термин *lofting*, који се користи у машинству, бродоградњи, аутомобилској и авиоиндустрији.



Слика 2.3.17 Skinned површ генерисана коришћењем скупа пресечних кривих $C_k(u)$ у поступку *skinning (lofting)*

Често се користи и техника у којој је полазиште крива водила (*spine/path curve*) $C_s(u) = \sum_{i=0}^{n_s} R_{i,p_s}(u)R_i$ која се користи за позиционирање и оријентисање пресечних кривих (слика 2.3.18). Пресечне криве се оријентишу тако да је равна у којој леже управна на вектор тангенте криве водиле на месту њиховог пресека.

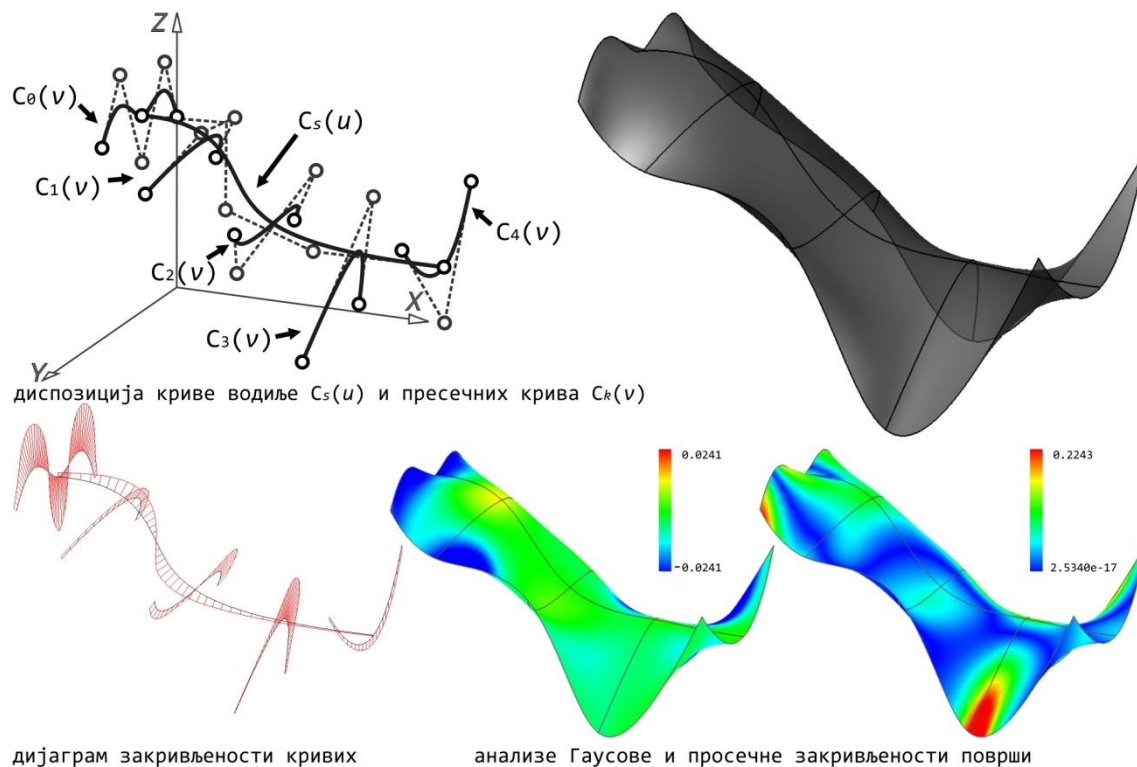
NURBS правоизводне површи, чије су генератрисе праве линије представљају специјалан случај општих правоизводних површи. Начелно могуће их је генерисати уколико се за директрисе дефинишу две NURBS криве $C_k(u) = \sum_{i=0}^{n_k} R_{i,p_k}(u)P_i^k$, $k = 1, 2$ на чворном вектору $U^k = \{u_0^k, \dots, u_{m_k}^k\}$. Правоизводна површ представља линеарну интерполацију између директрисних кривих $C_1(u)$ и $C_2(u)$, при чему се интерполација врши између тачака једнаких параметрских вредности⁶⁸, тј. за константно \bar{u} , $S(\bar{u}, v)$ је дуж која повезује тачке $C_1(\bar{u})$ и $C_2(\bar{u})$. Површ је могуће изразити на следећи начин:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^1 R_{i,p;j,1}(u, v)P_{i,j} \quad (2.3.33)$$

где је $V = \{0, 0, 1, 1\}$, док је $n, U, p, w_{i,j}$ и $P_{i,j}$ потребно дефинисати. С обзиром да је NURBS површ тензорски производ две граничне криве морају имати исти степен

⁶⁸Праву линију на NURBS површи искључиво је могуће конструисати између једнаких параметарских вредности, а не између тачака на једнаким релативним дужинама лука.

и бити дефинисане на истом чворном вектору. Цилиндричне, конусне, коноидне површи представљају специјалне случајеве правоизводних површи. NURBS правоизводне површи могу бити и билинеарне уколико у свакој тачки постоје две различите праве које леже на површи, а хиперболични параболоид представља пример површи генерисаних на овај начин. Посебну групу чине површи које могу бити развијене у раван без деформација тзв. развојне површи (*developable surfaces*), чија је Гаусова кривина у свим деловима површи једнака је нули.

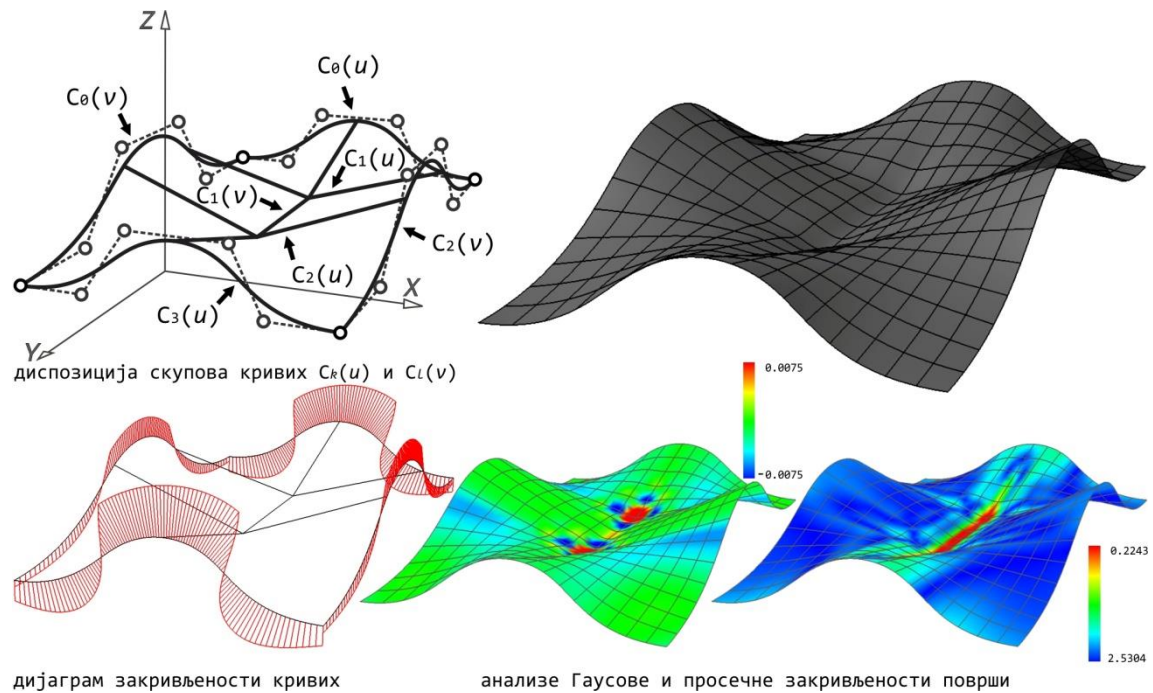


Слика 2.3.18 Skinned површ генерисана коришћењем криве водиле (*spine curve*) $C_s(u)$ и пресечних крива (*section curves*) $C_k(v)$

Интерполационе бидирекционе мреже кривих (*interpolation of bidirectional curve network*)⁶⁹ су површи конструисане интерполацијом два скупа кривих $C_k(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_{k,i}$; $k = 0, \dots, r$; $u \in [0,1]$ и $C_l(v) = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v)P_{l,j}$; $l = 0, \dots, s$; $v \in [0,1]$ које задовољавају услове компатибилности, тј. да су све $C_k(u)$ дефинисане на заједничком вектору U^C , односно да су све $C_l(v)$ дефинисане на заједничком вектору V^C , као и да постоје параметри $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_{s-1} < u_s = 1$ и $0 = v_0 < v_1 < \dots < v_{r-1} < v_r = 1$ за које је $Q_{i,k} = C_k(u_i) = C_l(v_k)$, $k = 0, \dots, r$ $l = 0, \dots, s$. Интерполационе криве $S(u_l, v) = C_l(v)$; $l = 0, \dots, s$ и $S(u, v_k) =$

⁶⁹ тзв. Гордонове површи (*Gordon surfaces*), назване по Гордону (Gordon) који је 1960-тих, док је радио за *General Motors Corporation*, развио технику њиховог конструисања.

$C_k(u)$; $k = 0, \dots, r$ нису рационалне (слика 2.3.19). Иако је теоретски конструкција површи у \mathbb{R}^{d+1} простору могућа, углавном није практична услед непредвидљивости резултата. Погодније решење представља коришћење апроксимације рационалних кривих у оквирима одређене толерације.



Слика 2.3.19 Интерполациона бидирекциона мрежа генерисана коришћењем два скупа кривих $C_k(u)$ и $C_l(v)$

Гордон је доказао да је за два произвољна скупа базних функција $\{\phi_l(u)\}_{l=0}^a$ и $\{\psi_k(v)\}_{k=0}^r$ ⁷⁰ које задовољавају:

$$\phi_l(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{ако } l \neq i \\ 1 & \text{ако } l = i \end{cases} \quad \text{и} \quad \psi_k(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{ако } k \neq i \\ 1 & \text{ако } k = i \end{cases} \quad (2.3.34)$$

могуће дефинисати површ која задовољава услове интерполације изразом:

$$\begin{aligned} S(u, v) &= \sum_{l=0}^s C_l(v)\phi_l + \sum_{k=0}^r C_k(u)\psi_k(v) - \sum_{l=0}^s \sum_{k=0}^r Q_{l,k}\phi_l(u)\psi_k(v) \\ &= L_1(u, v) + L_2(u, v) - T(u, v) \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

Ова површ заправо је композиција три једноставније и то две опште правоизводне површи $L_1(u, v)$ и $L_2(u, v)$ и тензорског производа $T(u, v)$. Контролне тачке површи $S(u, v)$ израчунавају се помоћу израза: $P_{i,j} = P_{i,j}^{L_1} + P_{i,j}^{L_2} + P_{i,j}^T$, где $P_{i,j}^{L_1}$, $P_{i,j}^{L_2}$ и $P_{i,j}^T$ представљају контролне тачке $L_1(u, v)$, $L_2(u, v)$ и $T(u, v)$.

⁷⁰Гордон је експериментисао са различитим једноставним функцијама, Лагранжовим полиномима, кубним *splines*.

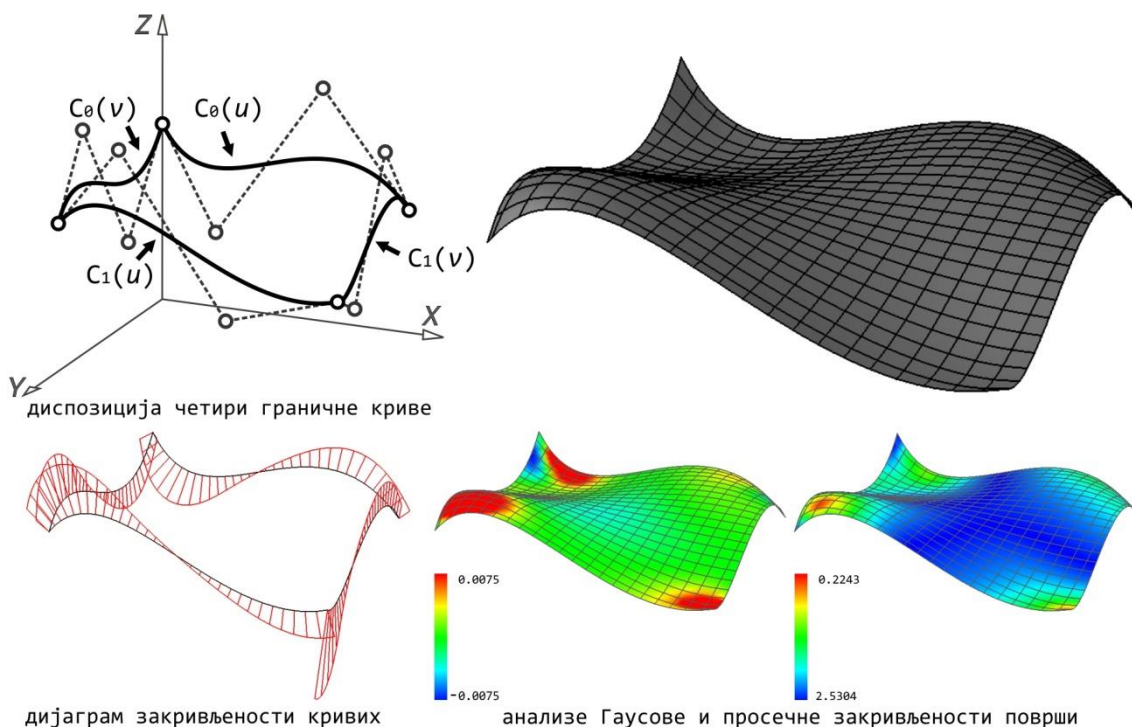
Кунсова површ (*Coons surface*) генерише се полазећи од четири граничне криве: $C_k(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_{k,i}; k = 0,1; u \in [0,1]$ и $C_l(v) = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v)P_{l,j}; l = 0,1; v \in [0,1]$ које задовољавају услове компатибилности, тј. да су обе $C_k(u)$ дефинисане на заједничком вектору U , односно да су обе $C_l(v)$ дефинисане на заједничком вектору V , као и да су тачке у угловима: $S_{0,0} = C_{k=0}(u = 0) = C_{l=0}(v = 0), S_{1,0} = C_{k=0}(u = 1) = C_{l=1}(v = 0), S_{0,1} = C_{k=1}(u = 0) = C_{l=0}(v = 1)$ и $S_{1,1} = C_{k=1}(u = 1) = C_{l=1}(v = 1)$ (слика 2.3.16). Криве могу бити рационалне, али је потребно задовољити услов компатибилност тежинских фактора тачака у угловима. Билинеарни спојени Кунсов печ (*bilinear blended Coons patch*) је специјални случај Гордонове површи, а дефинисан је изразом:

$$S(u, v) = R_1(u, v) + R_2(u, v) - T(u, v) \tag{2.3.36}$$

где су $R_1(u, v)$ и $R_2(u, v)$ правоизводне површи између $C_{k=0}(u)$ и $C_{k=1}(u)$, односно између $C_{l=0}(v)$ и $C_{l=1}(v)$, а $T(u, v)$ билинеарни тензорски производ:

$$T(u, v) = [1 \ u] \begin{bmatrix} S_{0,0} & S_{0,1} \\ S_{1,0} & S_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix}$$

Кунсова печа је C^0 и G^0 тј. образује се набор. За добијање глатког $C^n (n > 0)$ континуаланог споја развијени су печеви вишег степена.



Слика 2.3.20 Кунсова површ генерисана коришћењем четири граничне криве $C_k(u)$ и $C_l(v)$

2.3.2 Изогеометријско моделовање система

Механика континуума представља општу основу за напонско-деформацијску анализу деформабилних тела. Њене специјализоване области примењена механика, односно у оквиру ње теорија површинских система, и рачуарска механика, оријентисана на решавање математичких модела применом нумеричких поступака употребом савремених дигиталних технологија, у фокусу су овог рада.

Преглед литературе. Први математички приступ анализи површинских система формулисао је Ојлер (Euler) 1766. године. Он је проблем слободних вибрација правоугаоних и кружних мембрана покушао да реши користећи аналогију са системом управно повезаних ужади. Француска математичарка Жерман (Germain) прва је извела диференцијалну једначину вибрација плоча користећи варијациони поступак, да би Лагранж (Lagrange) корекцијом њеног рада извео диференцијалну једначину слободних вибрација плоча. Међу бројним радовима Навијеа (Navier), који се сматра оснивачем теорије еластичности, су и радови из теорије савијања танких плоча. Зачетак модерне теорије савијања плоча и љуски обележавају радови Кирхофа (Kirchoff). Кирхоф-Лав (Kirchoff-Love) хипотеза у основи теорије танких плоча и љуски представља генерализацију Бернули-Ојлерове (Bernoulli-Euler) хипотезе савијања гредних носача. Увођењем утицаја смицања формулисана је Рајснер-Миндлин (Reissner-Mindlin) теорија, генерализација Тимошенкове (Timoshenko) гредне теорије, која се примењује код површинских система значајне дебљине. За потребе решавања специфичних проблема до данас су развијене различите формулације.

У нумеричкој анализи, од средине прошлог века, доминантно се примењује анализа коначним елементима (FEA), чији се константни развој реализује унапређењем базних функција (дефиниције коначних елемената) и варијационе формулације. Коначни елементи су уобичајено дефинисани интерполационим полиномима и то најчешће класичним попут Лагранж или Ермите. Значајне инстанце у развоју коначних елемената представљају формулације линеарног тетраедра [Gal62], билинеарног четвороугла [Tai61] и изопараметрских

елемената⁷¹ [Iro66], [Zie68], једног од најважнијих концепата у развоју ове технологије. Поред низа стандардних коначних елемената⁷², који имају чворове само на крајевима или у угловима развијени су и елементи вишег реда⁷³ који имају и међучворове и унутрашње чворове. Ограничење примене изопараметарског концепта на интерполације континуитета C^0 , које посебно долази до изражаја у анализи танких љуски⁷⁴, подстакло је развој одређеног броја елемената [Clo65], [Arg68], [Cow68], [DeV68], [Bel69], којима се превазилази овај проблем, међутим њихова комплексност и неефикасност преусмерила је интересовање на развој различитих варијационих формулација. У осмишљавању апроксимација простора за одређене класе варијационих формулација значајан је допринос различитих математичара [Rav77], [Dem07], [Dem 08]. У литератури је могуће пронаћи бројне алтернативне варијационе формулације којима се унапређују перформансе једноставних елемената. Један од приступа дефинисања базних функција, различит од класичног концепта, је декомпозиција елемената позната као мешлес метода (*meshless method*) [Nay92]. Различите врсте ове процедуре⁷⁵ омогућиле су решавање комплексних инжењерских проблема које није могуће решити класичном FEA процедуром.

Све већа комплексност пројектних решења утицала је да генерисање модела коначних елемената на основу CAD геометрије постане захтевније од саме анализе, што има негативне импликације на ефикасност и распрострањеност примене FEA. Упркос чињеници да су и CAD и FEA у функцији инжењерског пројектовања, ови алати развијани су независно и за репрезентацију решења користе различите геометријске конструкте што представља суштински проблем њихове интеграције. У ситуацији када процес пројектовања захтева анализе коришћењем више од једне мреже (варијације), примену динамично-

⁷¹Код изопараметрских елемената функције за описивање геометрије и интерполационе функције истог су реда.

⁷²У стандардне површинске коначне елементе убрајају се нпр.: троугаони површински елемент оптерећен у сопственој равни (*linear triangle*) [Tur56], троугаони коначни елемент са константним деформацијама (*constant strain triangle-CST*), билинеарни четвороугао (*bilinear quadrilateral-Q4*), итд.

⁷³У површинске елементе вишег реда убрајају се нпр.: квадратни троугао (*quadratic triangle*) [DeV65] или троугаони коначни елемент са линеарном деформацијом (*linear strain triangle-LST*), кубни троугаони елемент (*cubic triangle*) или троугаони коначни елемент са квадратном апроксимацијом деформације (*quadratic strain triangle-QST*), биквадратни четвороугаони коначни елемент (*biquadratic quadrilateral-Q9*), осмочворни четвороугао (*serendipity*) [Zie71], итд.

⁷⁴Танки закривљени елементи захтевају интерполационе шеме вишег реда, тј. квадратну интегралност генерализаних других извода, због чега елементи континуитета C^1 представљају погодне подпросторе.

⁷⁵У мешлес методе убрајају се Галоркинова метода без елемената (*element-free Galerkin method*), метода јединичне поделе (*partition of unity method*), и *hp-clouds*, затим методе честица (*particle methods*), метода дискретних елемената (*discrete element method*), која комбинује честице и коначне елементе и др.

подешавајућих технологија попут оптимизације, и сл., проблеми геометријске неегзактности и немогућности остваривања комуникације са CAD-ом посебно долазе до изражаја. Упркос бројним академским радовима, аутоматизоване рутине за генерисање мрежа коначних елемената (*mesh generators*) и поступци аутоматског адаптивног прогушћавања мреже (*adaptive mesh refinement*) нису се показали као адекватна и у пракси широко прихваћена решења. У циљу интеграције CAD и FEA, водећи се идејом успостављања јединствене геометријске дескрипције, Хјуз (Hughes) поставља изогеометријски концепт (*isogeometric concept*) [Hug05] и са тимом сарадника развија изогеометријску анализу (*Isogeometric Analysis - IGA*) [Cot09]. Ефикасност предложене процедуре мотивисала је њену примену у решавању различитих истраживачких проблема [Baz06], [Cot06], [Cot07], [Zha07], [Gom08], [Baz09], [Hug10] и покренула један број истраживачких пројеката.

Дескрипција почетне геометрије и кинематике истим функцијама омогућава реконструкцију анализе у геометријским оквирима CAD технологија и анализу на основу егзактно дефинисане геометрије. За описивање геометрије начелно је могуће користити различите технологије. У досадашњим разматрањима у првом реду користе се NURBS, [Hug05], [Cot09] и *T-Splines* [Baz08], [Dor08]. Изогеометријски приступ отвара могућност развоја нових технологија анализе под утицајем унапређења у области CAD-а, као и могућност креирања посебних геомтеријских концепата. У оквирима овог рада разматрања су ограничена на изогеометријску анализу засновану на NURBS-у [Cot09], с обзиром да у овом тренутку представља доминантно распрострањену технологију геометријске репрезентације.

2.3.2.1 Изогеометријски концепт

Изогеометријска анализа је технологија рачунарске механике заснована на CAD геометријској репрезентацији. У изогеометрији се уместо модела коначних елемената који апроксимира геометрију за анализу користи егзактни геометријски модел. Ову процедуру могуће је сматрати за генерализацију стандардне FEA.

Основне поставке NURBS засноване IGA. У корену IGA је изопараметарски концепт у смислу да се исте базе користе за егзактно моделовање геометрије и описивање поља решења у нумерици. Фундаментална разлика између конвенционалног концепта изопараметарских елемената и изогеометријског концепта је у томе да се FEA базе изабране за апроксимацију непознатих поља решења користе за апроксимацију познате геометрије, док се код IGA, обрнуто, базе селектоване за репрезентацију геометрије користе и за апроксимацију поља решења. Оваква логика омогућава коришћење CAD модела директно у анализи, уз напомену да је потребно изабрати геометријску репрезентацију која поседује способност да апроксимира поље решења. NURBS базе у том смислу представљају адекватну технику, оне обезбеђују конвергенцију решења с обзиром да задовољавају услове континуитета (компатибилности) и довршености [Hug00]. Односно, коришћењем NURBS база могуће је задовољити услов да су функције континуитета C^1 у унутрашњости (заправо већина функција у унутрашњости има континуитет C^∞), и минимум континуитета C^0 на границама елемента. С друге стране, услов довршености односи се на способност базе да на било ком елементу Ω^e репрезентује све линеарне функције, тј. узимајући базу $\{N_a\}_{a=1}^{n_{en}}$ за простор решења, услов довршености захтева да постоје коефицијенти d_a , тако да је за било коју константу C_0, C_1, C_2 и C_3 :

$$u^h | \Omega^e \equiv \sum_{a=1}^{n_{en}} N_a d_a = C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3 z \quad (2.3.37)$$

што задовољава било која базна функција која има јединично својство (*partition of unity*). Дакле, изопараметарски концепт и јединично својство обезбеђују да изогеометријска анализа буде довршена и конвергентна метода за различите технологије које се користе за опис елемената укључујући и NURBS [Cot09].

Коначни елементни, којима се врши декомпозиција реалне геометрије, имају две репрезентације, једну у матичном домену (*parent domain*) а другу у физичком простору (*physical space*). Елементи су уобичајено дефинисани чворним координатама, а вредности базних функција у чворовима представљају степене слободе (*degrees of freedom* - DOF). Базне функције или функције облика класичних коначних елемената обично су интерполационе, што је детаљније приказано у [Hug00]. У претходном поглављу приказано је да контролне тачке и

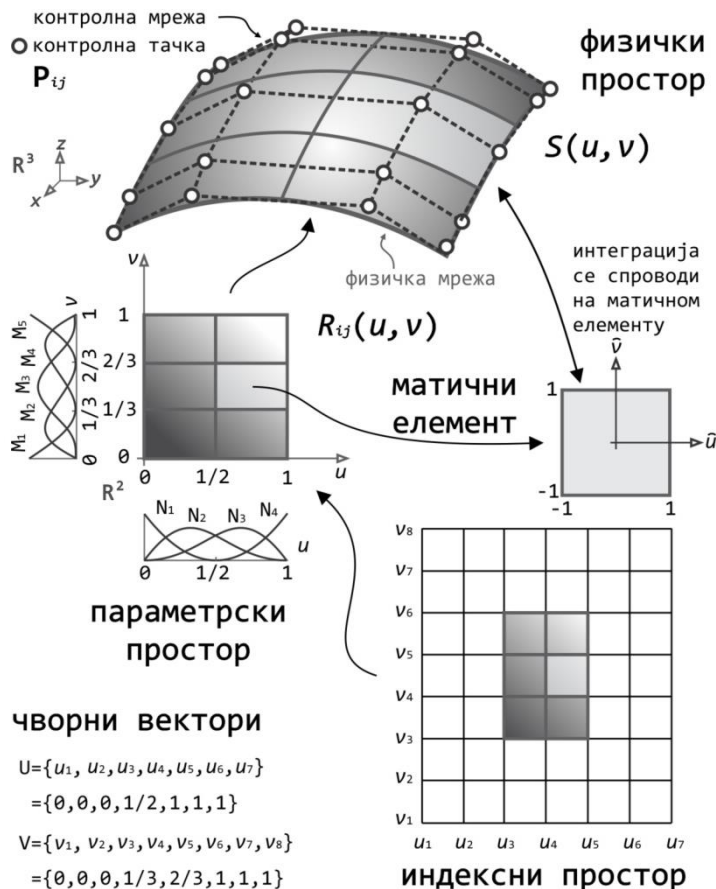
њима придружене базне функције које дефинишу NURBS геометрију у општем случају, осим прве и последње, не морају бити интерполационе. Претходно имплицира две мреже које представљају декомпозицију реалне геометрије: контролну мрежу (*control mesh*) и физичку мрежу (*physical mesh*).

Контролна мрежа је дефинисана контролним тачкама, које су јој интерполационе, а састоји се од вишедимензионалних елемената, који су у две димензије билинеарни четвороугаони елементи, а у три димензије тродимензионални хексаедри. У случају функција вишег степена контролна мрежа не представља реалну геометрију, већ врсту оплате која је контролише и има изглед конвенционалне мреже коначних елемената. Контролне варијабле, тј. генералисане координате, су степени слободе лоцирани у контролним тачкама. Контролни елементи могу бити дегенерисани на примитиве, као што су троуглови или тетраедри.

Физичка мрежа представља декомпозицију реалне геометрије и садржи две врсте елемената: макроелемент печ (*patch*) и микроелемент - чворно растојање (*knot span*). Макроелемент или печ представља поддомен и има две репрезентације једну у матичном домену и другу у физичком простору. Репрезентација у матичном домену печа дводимензионалне топологије је четвороугаоног облика, а тродимензионалне у облику кубоида. Комплексне мултипеч геометрије могуће је конструисати, слично као код стандардне FEA, спајањем контролних мрежа. NURBS печ дефинисан преко параметраског домена подељен је интервалима чворног вектора. Односно, могуће је извршити декомпозицију печа на микроелементе - чворна растојања. Чворна растојања су ограничена чворовима, тј. тачкама, линијама и површима код једно-, дво-, односно тро-димензионалних топологија и такође имају репрезентацију у матичном и физичком домену. Термин елемент обично ће се односити на чворно растојање. У математичком смислу чворна растојања представљају домene елемента у којима су функције C^∞ , док је њихов континуитет у чворовима C^{p-m} , где p представља ред полинома, док је m мултиплицитет чвора. Базне функције вишег степена начелно обезбеђују већу тачност у поређењу са елементима нижег реда. Претходно је сумирано табелом 2.3.3.

Табела 2.3.3 NURBS у изогеометријској анализи на основу [Cot09]

индексни простор		физички простор	
контролна мрежа	печев	чворна растојања	физичка мрежа
контролни елементи	печеви	чворна растојања	физичка мрежа
Топологија: 1D: праве линије дефинисане помоћу две узастопне контролне тачке 2D: билинеарни четвороуглови дефинисан са четири контролне тачке 3D: билинеарни четвороуглови дефинисан са четири контролне тачке	Топологија: 1D: криве 2D: површи 3D: запремине	Топологија: 1D: криви сегменти који повезују узастопне тачке 2D: закривљени четвороугаоници ограничени са четири криве ивице 3D: закривљени хексаедар ограничен са шест стране кривих површи	Топологија чворова у матичном домену: 1D: тачке 2D: праве линије 3D: равне
Топологија чворова у физичком простору: 1D: тачке 2D: криве 3D: површи			



◀ Шематски приказ једног печа - NURBS површи $S(u, v)$ конструисана на отвореним чворним векторима U и V коришћењем квадратних C^1 континуалних базних функција $R_{ij}(u, v)$

Потребно је нагласити да у овој поставци, базне функције нису ограничене на један елемент већ се њихов утицај протеже на више елемената, чиме су омогућени виши континуитети функција преко граница елемената, а што је битна разлика у односу на класичне коначне елементе. Није могуће дефинисати један NURBS елемент без целог NURBS печа. Још једна карактеристика NURBS геометрије је индексни простор (*index space*) печа, који једнозначно идентификује сваки чвор и прави разлику међу чворовима истог мултиплицитета већег од један.

У циљу постизања веће прецизности NURBS модела, могуће је извршити прогушћење (*refinement*) базних функција, и то *h*-, *p*- или *k-refinement*. Претходно се спроводи поступцима уношења тачака и елевацијом степена без утицаја на оригиналну гометрију или њену параметризацију и без повезивања са CAD базом података. Уношење тачака представља поступак аналоган *h-refinement* стратегији у класичној FEA којим се постојећи елемент дели на нове. Поступак се разликује у броју нових функција које се креирају, као и у континуитету база преко новокреираних граница елемента (у питању је C^{p-1} континуитет у овом случају). Потпуно реплицирање *h-refinement* поступка постиже се уношењем сваке нове вредности чвора *p* пута тако да функција постане C^0 континуална преко нових граница. Алтернативу уношењу нових тачака представља повећање мултиплицитета постојећих вредности чворова како би се смањио континуитет база без креирања нових елемената, што представља поступак за који не постоји пандан у класичној FEA, с обзиром да класичне FEA мреже иницијално имају C^0 континуитет на границама елемената. Елевација степена слична је поступку *p-refinement* у класичној FEA с обзиром да се овим поступком повећава степен полинома базне функције. Разлика је у томе што се у FEA *p-refinement* спроводи на базама које су у почетку свуда C^0 континуитета, док је елевацију степена могуће спроводити на NURBS мрежи било које могуће комбинације континуитета. Оваква техника прогушћавања вишег реда својствена је изогеометријској анализи.

Осим претходна два поступка за изогеметрију је карактеристичан и *k-refinement* поступак који нема пандан у класичној FEA. У овом поступку прво се врши елевација степена оригиналне базне функције са *p* на *q*, а тек онда уношење тачака \bar{u} , што за резултат има $q - 1$ континуитет базне функције у тачкама. Претходно се врши из разлога јер уношење и елевација нису комутативни, односно уколико би се изменио редослед операција и прво извршило уношење тачке, а потом елевација степена са *p* на *q*, мултиплицитет сваке тачке (укључујући и тачку која је унесена) се повећава тако да дисконтинуитет *p*-тих извода базних функција остаје сачуван, односно базна функција у тачкама и даље има изводе континуитета $p - 1$ без обзира што је степен полинома постао *q*.

Решавање проблема граничних вредности (*Boundary value problems* - BVP), тачније његове строге форме, реализује се коришћењем различитих техника

апроксимације - нумеричких метода, којима се строга форма проблема преводи у слабу тј. дефинише се варијациони еквивалент строге форме. Попут класичне FEA и у изогеометријској анализи могуће је користити различите нумеричке методе. Фаворизован приступ је Гаљоркинова (Galerkin) метода, међутим могуће је имплементирати и методу колокације (*collocation*), анализу најмањих квадрата (*laast-square analysis*), мешлес методе (*meshless methods*). Штавише, у [Cot09] приказано је да приступ заснован на NURBS-у има значајне предности у односу на традиционалне имплементације ових нумеричких метода.

Компарација IGA са класичном FEA (табела 2.3.4) доводи до закључка да је највећа разлика, ових по структури сличних метода, заправо у базама које се користе, што има значајне импликације.

Табела 2.3.4 Компарација FEA и NURBS засноване IGA на основу [Cot09]

Анализа коначним елементима <i>Finite Element Analysis - FEA</i>	Изогеометријска анализа <i>Isogeometric Analysis - IGA</i>
Геометрија: апроксимација коришћењем мреже <i>FE</i>	Геометрија: егзактна
Гранични услови: примењују се на чворове и чворне варијабле	Гранични услови: примењују се на контролне тачке и контролне варијабле
Изопараметрски концепт	Изопараметрски концепт
Гаљоркинова метода	Гаљоркинова метода
Базне функције: полиномске	Базне функције: NURBS
Базне функције су интерполационе у чворним тачкама, варијабле су интерполационе	Базне функције нису интерполационе у чворним тачкама, варијабле нису интерполационе
Базне функције не морају бити позитиве	Базне функције су позитивне (<i>pointwise positive</i>)
Јединично својство <i>Partition of unity</i>	Јединично својство <i>Partition of unity</i>
Афина коваријантност	Афина коваријантност
Осцилаторна у присуству дисконтинуланих података	<i>Variation diminishing</i> у присуству дисконтинуалних података
Нема особине <i>convex hull</i>	<i>Convex hull</i>
Редак линеарни систем	Редак линеарни систем
Тачност геометрије: C^0 континуитет, фиксирана и ограничена мрежом <i>FE</i>	Тачност геометрије: континуитет вишег степена, одређена тачношћу геометријског прорачуна; прилагодљива
Тачности анализе могуће је контролисати коришћењем поступака <i>h-</i> и <i>p-refinement</i>	Тачности анализе могуће је контролисати коришћењем поступака <i>h-</i> , <i>p-</i> и <i>k-refinement</i>
Задовољен печ тест	Задовољен печ тест
Иста архитектура кода	Иста архитектура кода

Геометријска егзактност IGA утиче на процес анализе, тачност прорачуна и поступке прогушћења (*refinement*). Такође, за разлику од чворних тачака и варијабли у FEA контролне тачке и контролне варијавле IGA нису интерполационе, због чега их није могуће интерпретирати засебно већ паралелно

са базним функцијама. Међутим, математичка структура Гаљоркинове методе и њена имплементација код FEA и IGA се не разликују.

IGA и FEA имају веома сличну архитектуру кода. У имплементацији изогеометријски елементи третирају се на исти начин као и класични елементи. Матрице крутости и у овом случају израчунавају се на нивоу елемената, а потом спајају у глобалну матрицу крутости. С обзиром да је једина разлика између IGA и FEA у функцијама облика, постојећи FEA код могуће је трансформисати у IGA код модификацијом делова алгорита који су повезаних са базама (тј. улазних података, матрице коначних елемената и глобалне матрице, формата записа излазних података). Чињеница да кореспондирајући чворови елемената, тј. контролне тачке, нису интерполационе нема импликације на њихов третман у коду. Трансформација FEA кода у IGA код за случај једног печа (*single-patch*) и мулти-печа (*multi-patch*) приказана је у [Cot09]. Свакако најважнија предност IGA је што се у нумеричким тестовима показала тачнијом у поређењу са класичном FEA, а што је приказано у [Cot09], [Cot06], [Cot07], [Hug05] итд. Такође применом NURBS база вишег реда избегавају се тзв. *locking* феномени који се могу јавити у анализи површинских система, а који су последица примене елемената нижег реда који не могу коректно описати њихово физичко понашање.

2.3.2.2 Изогеометријска теорија система

Површински конструктивни системи - љуске начелно представљају тродимензионална тела, ограничена са две најчешће паралелне површи (основе) и цилиндричном површи управном на њих која представља бочну контуру, а која се назива ивична површ. Општији случај представљају љуске са основама које нису међусобно паралелне, тј. које немају константну дебљину, а које се са мањом или већом тачношћу прорачунавају на основу истих претпоставки као и љуске константне дебљине. Скуп свих тачака које полове дебљину љуске образују средњу површ, а пресек средње површи и ивичне површи је крива која се назива ивична линија.

У зависности од односа дебљине h према најкраћој страни b могуће је извршити класификацију љуски на:

- веома танке (мембране) без флексионе крутости $h/b \leq (1/8 - 1/100)$;
- флексибилне⁷⁶ које поседују и мембранску и флексиону крутост;
- танке $(1/8 - 1/100) \leq h/b \leq (1/5 - 1/8)$ и
- дебеле $h/b \geq (1/5 - 1/8)$.

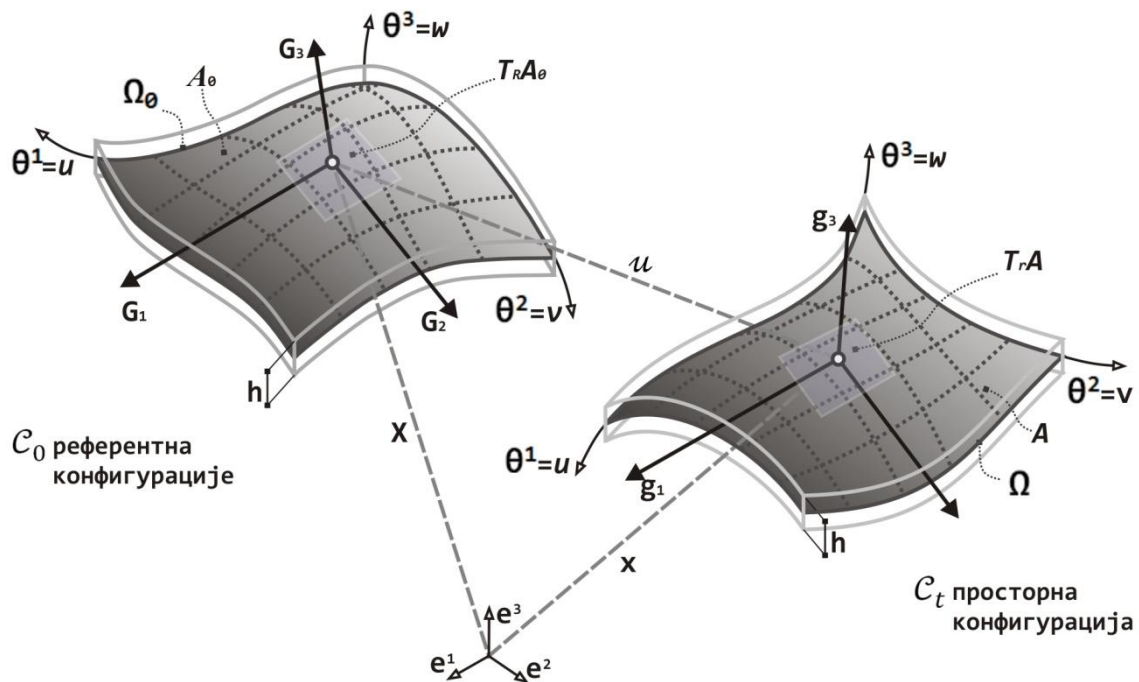
За сваки од наведених типова љуски уводе се одређене претпоставке на основу којих је могуће формулисати различите теорије. Класична теорија површинских система заснована је на Кирхофовој хипотези о равним пресецима, која представља основу за извођење закључака о кинематици и деформацији, што је приказано у [Vuk95]. У традиционалној формулацији степени слободе су померања и ротације. Коришћење NURBS геометријске дескрипције површинских система имплицира да се као степени слободе јављају само померања (тј. контролне варијабле) и омогућава формулацију без ротације (*rotationless*), што је претходно разматрано за случај плоче у [Eng02]. Коришћењем NURBS база могуће је задовољити услове континуитета C^1 или веће. Елементи љуске без ротације претходно су разматрани у [Pha92], [Cir00], [Opa00], Рајснер-Миндлин изогеометријски елемент љуске без ротације у [Ben10], а Кирхоф-Лав и Рајснер-Миндлин изогеометријских елемената љуске у [Rad14]. У циљу потпуности приказа прво ће бити направљен кратки осврт на основне поставке механике континуума [Мић90].

Основне поставке механике континуума. Према техничкој теорији средња површ љуске представља посебан случај дводимензионалног простора добијен дегенерацијом тродимензионалног континуума посматраног у криволинијским координатама θ^i . Односно, свака љуска, која у суштини представља тродимензионални објекат, може се третирати као материјална површ, а све математичке релације између одговарајућих величина тродиманзионалног система могу се свести на одговарајуће релације површи.

Геометријске поставке представљају полазни корак у дефиницији модела љуске. Референтна средња површ љуске представља почетну, недеформисану конфигурацију, која ће након деформације заузети свој просторни положај, тј. деформисани облик (слика 2.3.21). Величине које се односе на референтну

⁷⁶Ове љуске се углавном примењују у авиоиндустрији.

конфигурацију биће означене великим, док ће се за просторну конфигурацију користити мала слова.



Слика 2.3.21 Геометрија и кинематика материјалних површи

За референтне координате X , базни вектори референтне конфигурације G_i дефинисани су као парцијални изводи референтног вектора положаја X у односу на криволинијске координате θ^i , што је дато изразом:

$$G_i = \frac{\partial X}{\partial \theta^i} = X_{,i} \quad (2.3.38)$$

где $i \in \{1,2\}$ у случају дводимензионалних, односно $i \in \{1,2,3\}$ у случају тродимензионалних структура.

Деформисана геометрија у просторној конфигурацији описује се помоћу референтних координата X и поља померања u :

$$x = X + u \quad (2.3.39)$$

Базни вектори просторне конфигурације g_i дефинишу се као парцијални изводи просторних координата x у односу на θ^i , што је дато изразом:

$$g_i = \frac{\partial x}{\partial \theta^i} = x_{,i} \quad (2.3.40)$$

Дефинисањем базних вектора у референтној и просторној конфигурацији омогућава се израчунавање коваријантних метричких коефицијената у референтној и просторној конфигурацији изразима:

$$G_{ij} = G_i \cdot G_j \quad \text{и} \quad g_{ij} = g_i \cdot g_j \quad (2.3.41)$$

Матричном инверзијом коваријантних метричких кофицијената добијају се контраваријантни метрички кофицијенти:

$$G^{ij} = \{G_{ij}\}^{-1} \quad \text{и} \quad g^{ij} = \{g_{ij}\}^{-1} \quad (2.3.42)$$

Коваријантни и контраваријантни базни вектори повезани су помоћу Кронекер делта (*Kronecker delta*). Ову релацију која важи и у референтној и у просторној конфигурацији могуће је формулисати као:

$$G_i \cdot G^j = g_i \cdot g^j = \delta_i^j \quad \delta_i^j = \begin{cases} 0 & \forall i \neq j \\ 1 & \forall i = j \end{cases} \quad (2.3.43)$$

Одређивањем контраваријантних метричких кофицијената омогућено је израчунавање контраваријантних базних вектора у референтној конфигурацији и просторној конфигурацији изразима:

$$G^i = G^{ij} G_j \quad \text{и} \quad g^i = g^{ij} g_j \quad (2.3.44)$$

Коришћењем метричких кофицијената и базних вектора метрички тензор дефинише се изразом:

$$G = G_{ij} G^i \otimes G^j = G^{ij} G_j \otimes G_j \quad (2.3.45)$$

Метричким тензором замењује се јединичи тензор $I = e_i \otimes e_j$ који није могуће применити на геометријске репрезентације у криволинијским координатама.

Неопходна геометријска величина за формулацију љуски је нормала на површ (претходно дата изразом (2.3.4)) у референтној G_3 и просторној конфигурацији g_3 . За координате нормале не прави се разлика између коваријантне и контраваријантне дескрипције, такође вектори G_3 и g_3 уобичајено су L_2 нормирани. Вектор нормале у референтној конфигурацији следи из векторског производа референтних базних вектора, што је дефинисано изразом:

$$G_3 = \frac{G_1 \times G_2}{|G_1 \times G_2|} = G^3 = \frac{G^1 \times G^2}{|G^1 \times G^2|} \quad (2.3.46)$$

док је израз за вектор нормале просторне конфигурације:

$$g_3 = \frac{g_1 \times g_2}{|g_1 \times g_2|} = g^3 = \frac{g^1 \times g^2}{|g^1 \times g^2|} \quad (2.3.47)$$

Следећа фундаментална особина површи је кривина. Компоненте тензора кривине могуће је дефинисати изразом:

$$b_{\alpha\beta} = -g_\alpha \cdot g_{3,\beta} = -g_\beta \cdot g_{3,\alpha} = g_{\alpha,\beta} \cdot g_3 \quad (2.3.48)$$

Кинематика и деформација. Кинематиком се описује кретања система, односно кинематичким једначинама повезују се померања и ротације конструкције са променама облика материјалне тачке. Кинематичке једначине уобичајено се формулишу у односу на референтну конфигурацију. Промена геометрије референтног у просторни положај описује се пољем померања u :

$$u = x - X \quad (2.3.49)$$

Трансформација референтне у стварну конфигурацију изражава се помоћу градијента деформације F , несиметричног тензора другог реда дефинисаног као:

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \quad (2.3.50)$$

Диференцирањем израза (2.3.40) добија се израз за трансформацију коваријантног базног вектора из референтне у просторну конфигурацију:

$$g_i = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \theta^i} = FG_i \quad (2.3.51)$$

Модификовањем претходног израза добија се израз за израчунавање градијента деформације помоћу коваријантних базних вектора просторне конфигурације и контраваријантних базних вектора референтне конфигурације:

$$F = g_i \otimes G^i \quad (2.3.52)$$

односно: $F^{-1} = G_i \otimes g^i$; $F^T = G^i \otimes g_i$; $F^{-T} = g^i \otimes G_i$.

Дефинисањем градијената деформације и метричког тензора омогућено је формулисање деформације за геометријски нелинеарне проблеме. У механици континуума деформације су углавном формулисане за референтну конфигурацију помоћу Грин-Лагранж (Green-Lagrange) тензора деформације E датог изразом:

$$E = \frac{1}{2} (F^T F - G) \quad (2.3.53)$$

где тензорски производ $F^T F$ представља десни Коши-Гинов (Cauchy-Green) тензор деформације дефинисан изразом $C = F^T F$. У просторној конфигурацији мера деформације представљена је Ојлер-Алмансијевим (Euler-Almansi) тензором A дефинисаним изразом:

$$A = F^{-T} E F^{-1} \quad (2.3.54)$$

где су F^{-1} инверзни градијенти деформације, а F^{-T} њихове транспоноване вредности. Потребна напомена је да су Грин-Лагранжов и Ојлер-Алмансијев тензори деформације ограничени на решавање проблема коначних деформација.

Конститутивне једначине дефинишу релацију између деформације и напона. Мере напона и деформације су енергетски коњуговани пар величина. У том смислу енергетски коњугован пар Грин-Лагранжовом тензору деформација E представља други Пиола-Кирхофов (Piola-Kirchhoff) напон S , који је могуће дефинисати изразом:

$$S = \frac{\partial W^{int}}{\partial E} \quad (2.3.55)$$

где W^{int} представља енергију деформације. Тензори напона и деформације повезани су материјалним тензором четвртог реда C , тзв. тензором еластичности, који је формулисан изразом:

$$C = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial^2 W^{int}}{\partial E^2} \quad (2.3.56)$$

Односно у референтној конфигурацији везу између напона и деформације могуће је формулисати изразом:

$$S = C \cdot E \quad \text{где је} \quad C = C^{ijkl} G_i \otimes G_j \otimes G_k \otimes G_l \quad (2.3.57)$$

Понашање линеарно еластичних изотропних материјала у геометријски нелинеарним проблемима формулисано је Сан-Венан-Кирхоф (Saint-Venant-Kirchhoff) материјалним моделом помоћу две Ламеове (Lamé) константе λ и μ , које је могуће изразити преко материјалних параметара Јанговог (Young) модула E и Поасоновог (Poisson) коефицијента ν као:

$$\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.3.58)$$

Ламеове константе омогућавају следећу формулацију материјалног тензора C^{ijkl} :

$$C^{ijkl} = \lambda G^{ij} G^{kl} + \mu (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{kj}) \quad (2.3.59)$$

Други Пиола-Кирхофов напон заправо не представља физички напон који је описан Кошијевим тензором напона σ . Кошијев и други Пиола-Кирхофов напон повезани су градијентима деформације, што је дато изразима:

$$\sigma = (\det F)^{-1} \cdot F \cdot S \cdot F^T \quad (2.3.60)$$

$$S = \det F \cdot F^{-1} \cdot \sigma \cdot F^{-T} \quad (2.3.61)$$

Такође, уобичајено је и коришћење Пиола-Кирхофовог напона прве врсте P који је дефинисан изразом:

$$P = \det F \cdot \sigma \cdot F^{-T} = F \cdot S \quad (2.3.62)$$

Једначине равнотеже описују баланс унутрашњих и спољних сила. Уколико су ове једначине задовољене систем је у равнотежи. Локална форма статичког момента равнотеже дефинисана је изразом:

$$\operatorname{div}(\mathbf{FS}) + \rho b = 0 \quad (2.3.63)$$

где су ρ густина, b запреминске сила, а $\operatorname{div}()$ дивергенција у односу на референтну конфигурацију. Израз (2.3.63) представља строгу форму проблема граничне вредности дефинисањем адекватних граничних услова, тј. Дирихлеових (Dirichlet) граничних услова

$$u = \hat{u} \quad \text{на} \quad \Gamma_u \quad (2.3.64)$$

и Нојманових (Neumann) граничних услова

$$t = \hat{t} \quad \text{на} \quad \Gamma_t \quad (2.3.65)$$

где је $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$.

Систем једначина равнотеже, кинематичких релација, конститутивних релација и граничних услова у потпуности описује модел. Међутим, директно решење непознатог поља померања u могуће је само за одређене геометрије и граничне услове. Превођење граничног проблема у слабу форму основа је за просторну дискретизацију проблема помоћу коначних елемената. Коришћење дискретизоване форме проблема граничних вредности омогућава изналажење решења за произвољне геометрије и граничне услове.

Слаба форма дефинише се полазећи од једначине равнотеже дате изразом (2.3.63) и Нојманових граничних услова (2.3.65) множењем тежинским или тест функцијама. На овај начин добија се израз:

$$\int_{V_X} (-\operatorname{div}(\mathbf{FS}) - \rho b) w d\Omega_X + \int_{\partial V_X} (t - \hat{t}) w d\Gamma_t = 0 \quad (2.3.66)$$

где је $V_X \subset \Omega_X$, а $\Gamma_t \subset \partial\Omega_X$. Према дефиницији тест функције w морају да испуне Дирихлеов гранични услов на Γ_u . Ω_X и $\partial\Omega_X$ описују референтни домен, односно границе референтног домена. Применом Кошијеве теореме и Гаусове интегралне теореме [Hol00] израз (2.3.66) могуће је преформулисати у израз:

$$\int_{V_X} (\mathbf{SF}^T \cdot \operatorname{grad}(w)) d\Omega_X = \int_{V_X} \rho b w d\Omega_X + \int_{\partial V_X} \hat{t} w d\Gamma_t \quad (2.3.67)$$

где $\operatorname{grad}()$ означава градијент у односу на референтну конфигурацију. Израз $\mathbf{F}^T \operatorname{grad}(w)$ дефинисан је као виртуална Гринова деформација:

$$S \cdot (F^T \text{grad}(w)) = S \frac{1}{2} (F^T \text{grad}(w) + (\text{grad}(w))^T F) = S \cdot \delta E \quad (2.3.68)$$

где виртуална Гринова деформација представља Гатоов (Gateaux) диференцијал Грин-Лагранжовог тензора деформације у правцу w .

Слабу форму граничног проблема могуће је дефинисати на следећи начин:

пронаћи $u \in \mathcal{V}_{\hat{u}}$ тако да $\forall w \in \mathcal{V}$

$$\int_{V_X} S \cdot \delta E d\Omega_X - \int_{V_X} \rho b w d\Omega_X - \int_{\partial V_X} \hat{t} w d\Gamma_t = 0 \quad (2.3.69)$$

$\mathcal{V}_{\hat{u}}$ и \mathcal{V} описују просторе тест функција, а дефинисани су изразима:

$$\mathcal{V}_{\hat{u}} = \{u \in H^1(\Omega_X) : u = \hat{u} \text{ на } \Gamma_u\} \quad (2.3.70)$$

$$\mathcal{V} = \{u \in H^1(\Omega_X) : u = 0 \text{ на } \Gamma_u\} \quad (2.3.71)$$

$H^1(\Omega_X)$ дефинише Собољев простор⁷⁷ функција са квадратним интегралним вредностима и првим изводима у Ω_X . Из једначине (2.3.70) следи да примењени Дирихлеови гранични услови морају бити компатибилни са тест функцијама. Механичка интерпретација слабе форме граничног проблема дата изразом (2.3.69) је да се енергија система у равнотежном стању не мења варијацијом δE , односно да у свим екстремним тачкама важи (2.3.69).

Дискретизација континуума. Једначином (2.3.69) формулисана је континуална слаба форма нелинеарног проблема граничних вредности. Дискретизацијом коначним елементима континуални проблем апроксимира се дискретним проблемима, а величине се изражавају дискретним чворним вредностима и функцијама облика. Основне особине елемента следе из имплементираних кинематичких претпоставки, у конкретном случају формулација без ротације. У оквиру овог рада користе се коначни елементи засновани на принципу виртуалног рада, односно принципу виртуалних померања, који подразумева да се под утицајем бесконачно малих виртуалних померања на систем, сума унутрашњег и спољњег виртуалног рада које врше унутрашње и спољашње силе на виртуалним померањима нестaje уколико је систем у равнотежи, што је формулисано изразом:

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad (2.3.72)$$

Унутрашњи и спољашњи виртуални рад дефинисани су изразима:

⁷⁷Собољеви простори представљају математичку основу дискретизације коначним елементима, а детаљније су разматрани у [Bre94].

$$\delta W_{int} = -\int_{\Omega} \delta E: S d\Omega \quad (2.3.73)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{\Gamma} T \cdot \delta u d\Gamma + \int_{\Omega} \rho B \cdot \delta u \Omega \quad (2.3.74)$$

где Ω представља домен, Γ границу домена у референтној конфигурацији, а T вектор граничних сила.

Резултујући нелинеарни систем алгебарских једначина линеаризује се, нпр. развијањем помоћу линеарног Тејлоровог (Taylor) реда, који омогућава долажење до решења, тј. израчунавање поља померања које задовољава услове равнотеже са довољном тачношћу, кроз итеративну Њутн-Рапсон (Newton-Raphson) процедуру [Bat95], [Bel00], [Zie00].

Формулација NURBS засноване Кирхоф-Лав теорије танких еластичних љуски подразумева дефиницију геометрије средње површи помоћу претходно дате NURBS формулације (2.3.26). Усвајањем параметара површи u и v за криволинијске координате $\theta^i, i \in \{1,2\}$, $\theta^1 = u$, а $\theta^2 = v$ (слика 2.3.21), добија се израз за референтну средњу површ љуске у односу на Декартове координате:

$$X = \sum_{i,j}^{n,m} R_{i,j}(\theta^i) P_{i,j} \quad (2.3.75)$$

С обзиром да изогеометријски концепт имлицира да се и референтна и просторна конфигурација средње површи описују истим базним функцијама, вектор померања произвољне тачке средње површи могуће је описати изразом:

$$u = \sum_{i,j}^{n,m} R_{i,j}(\theta^i) u_{i,j} \quad (2.3.76)$$

где су

$$u = u^m i_m = u_m i^m \quad u_{i,j} = (u_{i,j})^m i_m = (u_{i,j})_m i^m \quad (2.3.77)$$

вектори померање произвољне тачке средње површи и контролних тачака.

Даље, вектор положаја деформисане средње површи могуће је изразити као:

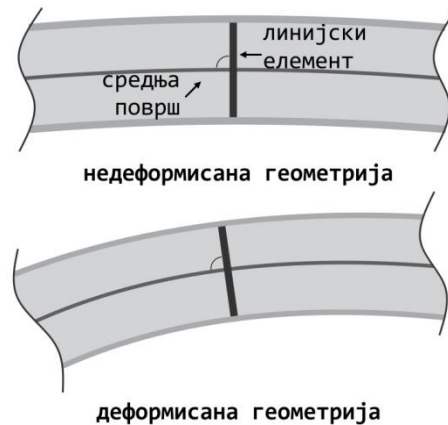
$$x = X + u = \sum_{i,j}^{n,m} R_{i,j}(\theta^i) x_{i,j} \quad \Rightarrow \quad x^m = X^m + u^m \quad (2.3.78)$$

а векторм положаја контролне тачке у просторној конфигурацији као:

$$x_{i,j} = X_{i,j} + u_{i,j} \quad \Rightarrow \quad x_{i,j}^m = X_{i,j}^m + u_{i,j}^m \quad (2.3.79)$$

Имјући у виду да је просторни положај средње површи једнозначно одређен компоненталним померањима контролних тачака $u_{i,j}^m = (u_{i,j})_m$, закључак је да су оне заправо генералисане координате, односно степени слободе изогеометријске љуске, реферисани у односу на глобални Декартов координатни систем.

Кирхоф-Лав теорија је заснована на хипотези да линијски елемент управан на средњу површ љуске пре деформације, остаје прав, непромењене дужине и управан на деформисану средњу еластичну површ и после деформације, што одговара линеарној дистрибуцији деформације по дебљини (слика 2.3.22).



Слика 2.3.22 Кирховљева танка еластична љуска - илустрација хипотезе о равним пресецима

С обзиром да нормала дефинише поречни пресек после деформације, његов положај у простору одређен је само кинематиком средње површи. Имајући у виду да су компоненте мембранске деформације функција глобалних степени слободe, односно померања контролних тачака изражена у односу на Декартов координатни систем, код изогеометријског коначног елемента нема потребе за увођењем ротација као генерализаних координата јер је одговарајући континуитет обезбеђен базним функцијама $R_{i,j}(\theta^i)$ и померањима контролних тачака $u_{i,j}$.

Претпоставка о томе да пресек остаје управан на деформисану средњу површ имплицира занемаривање деформација смицања, што одговара случају танких љуски. С обзиром да се у разматрање узимају само коефицијенти деформације у равни израз (2.3.53) постаје:

$$E = E_{\alpha\beta} G^\alpha \otimes G^\beta \quad (2.3.80)$$

где $E_{\alpha\beta}$ представљају коефицијенте деформације које је могуће дефинисати изразом:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) \quad (2.3.81)$$

Захваљујући претпоставци о равном попречном пресеку сваку тачку континуума љуске могуће је описати помоћу средње површи и њеног вектора нормале. Односно, уколико је h дебљина љуске а θ^3 координата дебљине у опсегу $-0.5h \leq$

$\theta^3 \leq 0.5h$, средња површ дефинисана је помоћу $x(\theta^3 = 0)$. Базни вектор средње површи a_i добија се из израза:

$$a_\alpha = x_{,\alpha}(\theta^3 = 0) \quad (2.3.82)$$

$$a_3 = \frac{a_1 \times a_2}{|a_1 \times a_2|} \quad (2.3.83)$$

Метричке коефицијенте и коефицијенте кривине средње површи могуће је изразити на следећи начин:

$$a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta \quad (2.3.84)$$

$$b_{\alpha\beta} = -a_\alpha \cdot a_{3,\beta} = -a_\beta \cdot a_{3,\alpha} = a_{\alpha,\beta} \cdot a_3 \quad (2.3.85)$$

Вектор положаја тачке x која припада љуски дефинисан је изразом:

$$x = \theta^\alpha a_\alpha + \theta^3 a_3 \quad (2.3.86)$$

базни вектор дефинисан је изразом:

$$g_\alpha = a_\alpha + \theta^3 a_{3,\alpha} \quad (2.3.87)$$

а метрички коефицијенти $g_{\alpha\beta}$ изразом:

$$g_{\alpha\beta} = (a_\alpha + \theta^3 a_{3,\alpha}) \cdot (a_\beta + \theta^3 a_{3,\beta}) = a_{\alpha\beta} - 2\theta^3 b_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 a_{3,\alpha} \cdot a_{3,\beta} \quad (2.3.88)$$

У случају танких љуски квадратни израз θ^3 се занемарује чиме се добија израз:

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2\theta^3 b_{\alpha\beta} \quad (2.3.89)$$

Уношењем израза (2.3.89) у израз (2.3.81) добија се израз:

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) + \theta^3(B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) \quad (2.3.90)$$

Овим изразом деформација љуске репрезентована је помоћу метричких коефицијената и коефицијената кривине средње површи. Из израза се може видети да се деформација састоји од константног и линеарног дела. Константни део описује деформацију у средњој површи љуске и одговара мембранском дејству. У том смислу, мембранску деформацију $\varepsilon_{\alpha\beta}$ могуће је дефинисати изразом:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}) \quad (2.3.91)$$

Линеарни део, који је симетричан у односу на средњу површ, представља промену кривине и њен утицај на савијање. Промена кривине $K_{\alpha\beta}$ дефинисана је изразом:

$$K_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} \quad (2.3.92)$$

Користећи $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $K_{\alpha\beta}$ израз (2.3.90) је могуће формулисати и као:

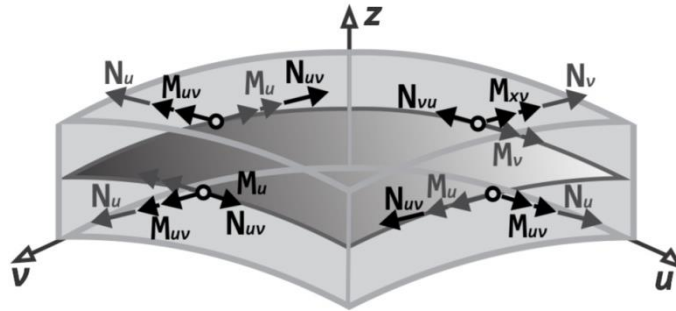
$$E_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \theta^3 K_{\alpha\beta} \quad (2.3.93)$$

Раздвајање мембранског дејства и савијања примењује се и у случају напрезања. Интеграцијом по дебљини, узимајући у обзир да је дистрибуција напрезања линеарна, добијају се резултујућа нормална N сила и моменти савијања M (слика 2.3.23):

$$S^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta} \quad (2.3.94)$$

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} S^{\alpha\beta} d\theta^3 = C^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} Ch \quad (2.3.95)$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} S^{\alpha\beta} \cdot \theta^3 d\theta^3 = C^{\alpha\beta\gamma\delta} K_{\gamma\delta} \cdot \frac{h^3}{12} \quad (2.3.96)$$



Слика 2.3.23 Кирховљева танка еластична љуска - силе у пресецима

С обзиром да су тензори напона и деформације симетрични, постоје само три независна коефицијента деформације E_{11} , E_{22} и E_{12} као и три независна коефицијента напона S^{11} , S^{22} и S^{12} . Конститутиву једначину је могуће изразити у векторској форми на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} S^{11} \\ S^{22} \\ S^{12} \end{bmatrix} = \tilde{D} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{bmatrix} \quad (2.3.97)$$

где је \tilde{D} матрица материјала, чији су елементи параметри материјала. Коефицијенти деформације у локалном Декартовом координатном систему $\bar{E}_{\alpha\beta}$ дефинисани су изразом:

$$\bar{E}_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} (E_{\gamma} \cdot G^{\alpha})(G^{\beta} \cdot E_{\delta}) \quad (2.3.98)$$

где E_{γ} и E_{δ} представљају локалне Декартове базне векторе у референтној конфигурацији.

Матрица материјала D користи се за израчунавање Пиола-Кирхофових коефицијената деформације $\bar{S}^{\alpha\beta}$:

$$\begin{bmatrix} \bar{S}^{11} \\ \bar{S}^{22} \\ \bar{S}^{12} \end{bmatrix} = D \cdot \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} \\ \bar{E}_{22} \\ 2\bar{E}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.3.99)$$

као и код деформације горњи индекси означавају локалне Декартове базе. За случај изотропног материјала матрица је дефинисана на следећи начин:

$$D^{iso} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.3.100)$$

где је E Јангов модул еластичности, а ν Поасонов коефицијент. У случају ортотропног материјала јављају се различите вредности Јангових модула E_1 , E_2 и Поасонових коефицијентата ν_{12} , ν_{21} за два различита правца, а како би се задржала симетрија матрица материјала неопходно је обезбедити релацију $\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2$. Заједно са модулим клизања G_{12} , ортотропна матрица материјала дефинисана је на следећи начин:

$$D^{ort} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{\nu_{21}E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.3.101)$$

Као и тензор напона S , тензори N и M су такође симетрични, а њихови коефицијенти могу се израчунати аналогно једначини (2.3.99). Линија изнад коефицијената ($\bar{\quad}$) и у овом случају се односи на локалне Декартове координате:

$$\begin{bmatrix} \bar{N}^{11} \\ \bar{N}^{22} \\ \bar{N}^{12} \end{bmatrix} = t \cdot D \cdot \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.3.102)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{M}^{11} \\ \bar{M}^{22} \\ \bar{M}^{12} \end{bmatrix} = \frac{t^3}{12} \cdot D \cdot \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} \\ \bar{K}_{22} \\ 2\bar{K}_{12} \end{bmatrix} \quad (2.3.103)$$

Користећи векторе нормалних сила и момената савијања, унутрашњи виртуални рад могуће је формулисати изразом:

$$\delta W_{int} = -\int_{\Omega} (S: \delta E) d\Omega = -\int_A (N: \delta \varepsilon + M: \delta K) dA \quad (2.3.104)$$

где је dA диференцијална површина средње површи у референтној конфигурацији. Израз (2.3.104) представља слабу форму парцијалних диференцијалних једначина Кирхоф-Лав танке еластичне љуске.

С обзиром да кривине K садрже друге изводе геометријске дескрипције, варијациони индекс је два, због чега је неопходно обезбедити C^1 континуитет између елемената како би се задовољили услови компатибилности. Претходно начелно није могуће коришћењем Лагранжових полинома као базних функција, тј. C^1 континуитет између најчешће коришћених билинеарних елемената љуске није задовољен. Лагранжовим елементима вишег реда, могуће је задовољити C^1 континуитет у случају правилних облика али не и у случају површи слободне форме. Претходно је разлог ређе употребе Кирхофове формулације коначних елемената у односу на Рајснер-Миндлин елементе. У случају Рајснер-Миндлин формулације узимају се у обзир деформације смицања, варијациони индекс је један и довољан је C^0 континуитет између елемената. Коришћењем NURBS база могуће је обезбедити C^1 и више континуитете између елемената, због чега се претходно приказана Кирхоф-Лав формулација може имплементирати без даљих модификација. Предност NURBS засноване Кирхоф-Лав формулације је у томе што не захтева ротацију као степен слободе, изузев у одређеним случајевима када је неопходно описати ротацију као гранични услов, нпр. у случају укљештених ивица, услова симетрије, спајања NURBS печева. У тим случајевима поред померања мора се одредити и нагиб површи дуж контуре. Нагиб граница NURBS површи одређује се помоћу прва два реда контролних тачака од тих граница. Дакле, у случају укљештене ивице то значи да се прва два реда контролних тачака од те ивице морају фиксирати, уз напомену да се на овај начин не уводе ослонци унутар љуске. У случају услова симетрије, права два реда контролних тачака дуж ивица морају се удвојити како би нагиб остао константан. Иста стратегија се примењује и код образовања мултипеч NURBS структура.

2.4 Резиме

Површи које представљају структуру⁷⁸

Површи имају посебну улогу у комуникацији пројектних идеја, може се рећи да стоје у средишту геометријског приказивања и омогућавају нарочиту слободу израза. Док је моделовање засновано на солидима⁷⁹ значајно за инжењерство, моделовање у архитектури се у првом реду ослања на површи [Pot07], [Sec10]. Међутим, слобода коју омогућава овај вид геометријске презентације често води погрешном схватању процеса пројектовања у дигиталном контексту.

Апстраховање употребом површи има бројне аспекате, од којих су само неки обухваћени дигиталном репрезентацијом геометрије површи. Овај рад се посебно обраћа проблематичном раздвајању геометријског од структуралног аспекта приликом коришћења CAD и CAGD технологија, који често резултује објектима у виду скулптуралних експресија раздвојених од конструктивног система, што је са становишта реализације неодрживо. Указивањем на овај проблем не подржава се ограничавање креативне слободе, већ предлаже укључивање сензитивности према конструктивном и материјалном у процес моделовања, чиме се омогућава прецизно дефинисање и постпроцесирање у дигиталном систему.

Међузависност форме и структуре карактеристична је за конструктивне типологије које отпорност остварују обликом (*shape-resistant*), као што су површински конструктивни системи, код којих је механичко понашање нераскидиво повезано са глобалном просторном конфигурацијом. Једини одржив приступ пројектовању ових конструктивних система је применом техника проналажења форме и структуралне оптимизације. У случају када структура није само технички захтев, већ је у интеракцији са архитектонским обликом, она представља интегрални део креативног процеса пројектовања.

Проблем превођења репрезентације пројекта из дигитално-геометријског у физичко-материјални контекст могуће је превазићи увођењем конструкта

⁷⁸ *Surface performing structure*

⁷⁹ Могло би се приметити да развој моделовања солидима (*solid modeling*) потискује значај површи, међутим и солиди представљају површи, ако не математички онда у визуелном смислу.

материјалних површи у поступке моделовање система. И поред одређених ограничења овај приступ омогућава пројектантима заинтересованим за проучавање површинских система истраживања која превазилазе искључиво аспект визуализације. Употреба овог конструкта помаже осетљиву интерпретацију резултата добијених генерисањем форме. Битан корак процеса продукције површинских конструктивних система је управо превођење абстрактних просторних дијаграма геометрије у материјализоване волуметријске структуре. Ова транзиција форме, од нултог волумена модела до материјалне енvelope изграђене форме, није формална конверзија, мапирање жичаног модела у објекат који садржи волуметрију примењеног материјала, већ је корак заснован на искуству и познавању материјала, структуре и њихових релација који су апроксимирани моделом материјалне површи.

Инкорпорирањем физичких особина омогућено је контролисање геометрије површи. Као што је приказано, параметрске површи могу бити генерисане и контролисане на различите начине. Механизми контроле утичу на могући резултат, а сама контрола има одређени ниво абстракције који омогућава манипулисање комплексних ентитета помоћу неколико параметара. Систем контроле може имати одређену хијерархију, нпр. геометријски систем контроле чини скуп контролних тачака у оквиру функције које представљају субпараметре површи. Концепт контролног система може се применити и на структуралне површи које се реализују интеграцијом физичких параметара. У том смислу, манипулисањем граничних и прелазних услова или оптерећења као субпараметара могуће је спроводити глобалне и локалне манипулације облика деформабилних површи.

Параметарском дескрипцијом површи омогућава се параметрска контрола форме. Параметрско пројектовање обезбеђује формална истраживања и евалуацију захваљујући презентацији могућих резултата помоћу параметрских конструката. Параметрски конструкт је хијерархијски, њиме се контролишу различити нивои компоненти које утичу на крајњу конфигурацију облика, делова и саме компоненте. Инкорпорирањем већег броја параметрских зависности, води вишеслојном параметрском конструкту површи и начин је да се дефинишу

комплексни пројектни проблеми. Међутим, већи број параметра чини интеракцију са предметом пројектовања мање интуитивном.

Повратни подаци и међузависности остварују утицаје између пројектоване геометрије и физичког склопа. Већина архитектонских објекат пројектује се тако да је узајамни утицај између различитих компоненти минималан. Оваква конзервативна стратегија има утемељење у подели дисциплина која постоји у пракси, међутим у случају површинских структура је неодржива. Пионири у пројектовању ових структура прибегли су изради физичких модела, испитујући на тај начин однос између структуре, форме и материјала. У којој мери је, на пример, Ото преферирао овај емпиријски огледни приступ потврђује и његов исказ *Ја не пројектујем, ја претражујем* [Ott94]. Оваквим приступом процес пројектовања површинских структура приближио се традиционалним занатима, чији су предмет рада артефакти далеко мањих димензија, међутим код којих услед начина рада форма далеко више рефлектује материјал.

Тактилни и мануелни рад свакако није једноставно скалирати нити буквално применити на веће пројекте. Препознајући ова ограничења, и сам Ото је наглашавао да геометрија чак и када је произашла из процеса тражења форме није довољна, и указивао на важност интерпретације резултат и поступка њиховог превођења у детаље који ће одговарати материјалу и размери како би се остварило успешно пројектно решење [Ser06]. Тенутно су процеси истраживања кроз пројекат претежно премештени у дигитално окружење. У те сврхе користи се велики број доступних софтвера. Сваки софтвер представља систем за себе, намеће ограничења и обезбеђује алате који омогућавају да се одређени пројекти развијају. Софтверски системи имају сопствена ограничења која је потребно разумети. С друге стране, могуће је развити флексибилне адаптивне рачунске системе за пројектовање површинских структура уграђивањем физичких особина у геометријски субстрат. Развијање алата прилагођених за решавање одређених проблема, који ће интегрисати све релевантне аспекте проблема могуће је повећати квалитет симулације перформанси.

Пројекат настаје кроз процес увећања разумевања пројектног проблема и ограничења. Може се схватити и као процес тражења решења, који подразумева

дефинисање пројектног проблема и адекватног оквира (граница) претраге. Идентификација и постављање ограничења не обезбеђује дефинитивне одговоре у смислу пројектних решења, већ референтни оквир који саржи решења. Стварање потпунијег референтног оквира и измештање садржаја управо је оно што одваја пројектовање као претрагу од поступака евалуације и комбинаторике. Одређени број генеративних рачунарских система уграђује различите стратегије које се користе у истраживањима кроз пројекат. Генетски алгоритми представљају један од приступа оперисања параметрима модела кроз стратегије претраге. Изграђени око биолошке метафоре, ови алгоритми обезбеђују робустан начин за повезивање функције евалуације за процедуру претраге. Њихова модуларна структура и способност различитих начина превођења генотипова и фенотипова омогућава да се на релативно једноставан начин адаптирају различитим пројектним проблемима.

Круцијално за иновацију процеса пројектовања је да се избегне да систем постане конвенција која спречава еволуцију, адаптацију и инвентивност. Актуелни приступ пројектовању намеће потребу за све директнијом повезаношћу процеса креирања геометрије, анализа, адаптивности и визуелизације, као и да се ови процеси одигравају паралелно на скалирајући начин, што захтева реконструкцију конвенционалних процеса.

Изогеометријска морфогенеза

Континулани развој дигиталних технологија геометријске репрезентације одвија се у правцу омогућавања слободe и флексибилности у обликовању и комуникацији пројектних идеја. И док се с једне стране на тај начин омогућавају формални експерименти у виртуланом окружењу, резултујуће форме су често лоших структуралних перформанси и нетектоничне. У циљу постављања процеса пројектовања површинских конструктивних система у рационаланији оквир овим радом фаворизује се приступ пројектовања заснован на структуралним перформансама и предлаже метод изогеометријске морфогенезе.

У најопштијем случају изогеометријска морфогенеза представља интегративни метод генерисања структуралних морфологија коришћењем аналогича природних процеса, физички заснованог моделовања и изогеометријског концепта. Овај у основи генеративни метод пројектовања демонстрира могућности коришћења природних и научних аналогича у процесу обликовања конструктивних типологија и повезује идеје за шири контекст присутан у научном дискурсу, ослањајући се на биоапропријацију, рачунарство, теорију система, рачунарску механику, а прилог је области пројектовања конструктивних система и просторних структура.

Изогеометријска морфогенеза припада дискурсу генеративног пројектовања. У основи ове методе је генеративни продукциони систем који оперише на основу претходно артикулисане интерне логике. Генеративни систем је по свом карактеру рачунарски, динамичан, биолошки, комплексан, адаптиван, а заснован је на механичком моделу обликовања конструктивних система. Продукција формалних решења оптималних у погледу структуралних перформанси, што је задатак овог система, одвија се кроз итеративни процес у коме су обликовање и физичка симулација симултани и међузависни, насупрот приступу пост-дизајн оптимизације, у коме се структурална анализа користи пасивно тек након што је

форма објекта артикулисана. Коришћењем генетског алгоритма симулира се еволутивни процес и производе варијације, тачније на основу евалуације перформанси алгоритам продукује опсег могућности, од крајње неоптимизованог стања преко субоптималних до оптималног решења, из ког се може усвојити решење адекватно за даљу разраду.

Као и остале морфогенетске процедуре у области архитектонског инжењерства, и изогеометријска морфогенеза представља процедуру за оптимизацију структура. Задаци изогеометријске морфогенезе су моделовање манипулацијом геометријских и физичких параметара и проналажње форми адекватних структуралних перформанси. За разлику од уобичајених поступака тражење равнотежних стања конструктивних система заснованих на аналогним методама, тј. техникама израде материјалних физичких модела, или рачунарским методама у којима се равнотежна форма тражи из услова статичке равнотеже у сваком чвору структуре апроксимиране системом линијских елемената и чворова (FDM) или постављањем услова динамичке равнотеже (DR, PS), изогеометријска морфогенеза није ограничена на продукцију искључиво равнотежних форми. У њеној основи је поступак оптимизације заснован на еволуционом концепту, којим се проширује опсег продукције могућих формалних решења.

У контексту овог рада NURBS технологија геометријске репрезентације и њена физички заснована генерализација - NURBS структура користе се за моделовање система, а NURBS заснована изогеометријска анализа за процену испуњености критеријума селекције решења. Применом изогеометријског концепта заснованог на CAD геометријским функцијама кроз читав процес, што представља особеност овог приступа, обезбеђује је се интеграција пројектовања и анализе, и превазилазе недостаци сличних метода (приказаних у радовима [Pug09], [She00], итд.) заснованих на апроксимацији коришћењем класичне FEA. У оквиру предметног истраживања имплементација изогеометријске морфогенезе ограничена је на површинске структуралне типологије. У том смислу, рачунарском имплементацијом процедуре, и реализацијом експерименталних пројеката проверена је ефикасност алата, методе и приступа.

3.1 Основе

Конвенционално, геометријско моделовање применом NURBS технологија заправо представља кинематички процес у коме се обликовање врши индиректно манипулацијом различитих геометријских параметара - померањем контролних тачака, подешавањем вредности тежинских фактора, модификацијом чворних вектора. Међутим оваквим начином моделовања не искоришћавају се у потпуности потенцијали NURBS технологије, а сам процес, и поред софистицираности интерактивних CAD софтвера за 3D моделовање, може бити неконфоран чак и непродуктиван. Такође, овај процес у великој је мери интуитиван и недовољно информисан о структуралним перформансама насталих форми посебно у случају неконвенционалних комплексних геометрија, с обзиром да су у фокусу кинематичких процеса кретања, али не и узроци кретања система.

Потреба за увођењем физичке рационалности у процес моделовања подстакла је крајем 1980-тих година развој концепта физички заснованог моделовања [Ter87], [Ter88] који се од тада константно развија. Физички засновани деформабилни модели, који симулирају еластично или пластично деформисање објеката имају широку примену у компјутерској графици. Развијен је већи број поступака и алата, између осталих и поступци који користе *B-Spline* [Blo90], [Cel92], [Wei92], [Kag98] и NURBS технологије за геометријско моделовање слободних форми [Cel91], [Ter94], [Vol99], [Bro08] и др. Начелно, у основи физички заснованог моделовања су принципи механике. У том смислу, концепт физички заснованог моделовања реализује се инкорпорирањем физичких величина у геометријски супстрат. Односно, поступак моделовања комплексних форми не врши се само модификацијом геометријских већ и подешавањем физичких параметара и глобалних и локалних ограничења.

Придруживањем физичких величина (попут дистрибуције масе, унутрашње енергије деформације, сила, итд.) геометрији настају кинематичке структуре, чије је понашање могуће формулисати познатим једначинама механике континуума. Редуковање једначина на ефикасан алгоритам врши се применом нумеричких процедура попут класичне Гаљоркинове FEA, или, у случају овог рада, њене

генерализације - изогеометријске анализе засноване на функцијама коришћеним за геометријску дескрипцију. Додељивањем физичких атрибута геометријском објекту и коришћење функција за дескрипцију геометрије директно у анализи омогућава се употреба јединственог модела заснованог на геометријској репрезентацији кроз читав процес. Претходно имплицира значајне уштеде у времену, већу поузданост резултата и континуитет циклуса дизајн-анализа.

У оквирима овог рада који је ограничен на проблем пројектовања површинских конструктивних система, физички засновано моделовање у функцији је тражења форми адекватних структуралних перформанси. Моделовање континуалних површинских система, као што је приказано, често се спроводи применом аналогије, односно заменом дискретним линијским системима. У контексту NURBS технологије овакав приступ моделовању има нешто другачију интерпретацију, захваљујући томе што NURBS површи имају две репрезентације геометрије, континуално закривљену површ, која представља физичку репрезентацију и дискретну контролну мрежу, просторну структуру састављену од линијских елемената који повазују контролне тачке. С обзиром да се све трансформације површи заправо спроводе трансформацијама њене контролне мреже, може се закључити да је кинематика површи одређена кинематиком контролне мреже.

Применом физичких величина на контролну мрежу, покреће се итеративни процес тражења оптималне деформисане конфигурације у којој су оптерећења (у случају овог рада сопствена тежина) дискретно моделована у контролним тачкама. Дакле, поступком се тражи деформисана конфигурација, која се добија као резултат оптимизације одређеног критеријума за задате граничне услове. У оваквој поставци, варијације облика представљају функције променљиве вредности пројектних варијабли. Перформансе добијених форми оцењују се на основу резултата структуралне анализе који су основ за селекцију форме која најбоље задовољава задати критеријум. У том смислу, може се рећи да су финалне форме добијене процесом оптимизације.

Изогеометријска морфогенеза представља еволуциону технику тражења оптимизованих структуралних форми. То је процес тражења најбоље могућих

решења у задатим оквирима која се јављају у релацији између параметара и перформанси. У контексту решавања инжењерских проблема, оптимално стање заправо представља комбинацију параметара који не дозвољавају унапређење перформанси. То је крајње стање, замишљена крајња тачка развоја на ком се више не одвија еволуција. Потребно је напоменути да постоји разлика између ове аналогije и процеса који се одвија у природи. Природа решава проблеме на начин да се сваки природни објекат/организам уклапа у своје окружење на фасцинантан начин, међутим ниједно од њих није оптимално. У природи не постоји оптимално, из разлога јер се еволуција никада не завршава, што је потребан услов достизања оптималног решења. Односно сваки природни објекат/организам предмет је константне еволуције која је у првом реду узрокована променама у окружењу. Процес еволуције се у природи одвија чак и у константним енвајорменталним условима. Иако нису оптимална, природна решења су веома близу оптималних за услове датог окружења. У супротном би у процесу еволуције била елиминисана.

За разлику од процеса оптимизације у којима се полази под познате почетне геометрије у процесу изогеометријске морфогенезе почетна геометрија није дефинисана. Претходно имплицира да је иницијални задатак у овом процесу дефинисање домена пројектног решења, пројектних варијабли, граничних и прелазних услова. Односно, полазећи иницијално генерисаних облика/конфигурација, за задате вредности материјалних параметара врши се напонско-деформацијаска анализа, у свакој итерацији и за сваку конфигурацију, како би се пронашла структура оптималног механичког понашања. Аутоматизација процеса и продукција варијација спроводи се коришћењем генетског алгорита, стохастичке процедуре, херуистичке методе претраге која је ефикасна и довољено флексибилна у решавању проблема, што може бити стимулативно у фази конципирања пројектног решења.

Резултати процеса изогеометријске морфогенезе су структурално рационалне форме и њихове варијације. С обзиром да приступ омогућава обликовање комплексних форми манипулацијом геометријских и симулираних физичких параметара, може се рећи да овакав приступ представља квалитативно унапређење процеса моделовања.

3.1.1 Генеративни систем

Карактеристике генеративног система у основи изогеометријске морфогенезе могуће је сумирати на следећи начин:

- Генеративни систем припада дискурсу проналажења форми, тј. под окриљем је структуралне морфогенезе с обзиром да је устројен као технологија која има капацитета да продукује тектоничне површинске структуре.
- Генеративни систем подпада под оквир дигиталне морфогенезе с обзиром да се процес развоја структуралних форми и симулирање физичког понашања реализују доминантно употребом рачунарских технологија, а могућност коришћења аналогних техника ограничена је на фазе процеса.
- Генеративни систем је комплексан, с обзиром да се реализује мапирањем различитих аспеката реалне ситуације, геометријских и физичких карактеристика, ограничења, утицаја и дејстава, у виртуални модел, а резултујуће структуре настају као резултат интеракција тих аспеката.
- Генеративни система је инспирисан процсом биолошке еволуције, заснован је на еволуционом алгоритму који управља технологијама које се користе за спровођење морфогенезе.
- Генеративни систем је адаптиван, подједнако у смислу да су структуралне форме резултат еволутивног процеса, као и у смислу да настају као одговор на симулиране утицаје. Адаптивно понашање система обезбеђено је механизмом повратних петљи.
- Генеративни систем је заснован на моделовању структуралних перформанси, односно омогућава пројектовање структура на начин у коме су сва могућа геометријска решења у задатом оквиру укључена у елагантну формулацију која обезбеђује евалуацију механичких перформанси сваке варијације облика и селекцију решења.
- Генеритавни систем доприноси концепту генеративне конвергенције у интегративном приступу пројектовању архитектонских структура. Примењена физички заснована техника моделовања површинских конструктивних система, у чијој основи је изогеометијски концепт, интегрише геометријски и механички модел на кохерентан начин. Обједињена формулација, као пример

интеграције, која је у оквирима овог рада ограничена на фазу концепције, потенцијално је применљива кроз читав процес продукције архитектуре.

3.1.1.1 Кључни концепти

Три кључна концепта примењена на специфичан начин у контексту изогеометријске морфогенезе су: еволуциони концепт, концепт физички заснованог моделовања и изогеометријски концепт (слика 3.1.1).

Еволуциони концепт у контексту изогеометријске морфогенезе у функцији је оптимизације, аутоматизације и продукције варијација. Генетски алгоритам, претходно приказан у поглављу 2.2.2, представља примењену еволуциону стратегију. Начелно ма који јасно дефинисан адаптивни проблем може се генетски формулисати и решити помоћу овог алгоритма дефинисањем шеме репрезентације, критеријума евалуације, параметара и варијабли којима се алгоритам контролише, начина одређивања резултата и терминационих критеријума.

Специфичне карактеристике генетског алгоритма примењеног у контексту изогеометријске морфогенезе могуће је сумирати на следећи начин:

- Популацију могућих решења f^i чине јединке (хромозоми) различите геометријске конфигурације NURBS структура.
- Критеријумска функција која се користи у претрази за евалуацију квалитета хромозома, тј. структуралних перформанси површи врши се у односу на минимизацију максималне вредности померања.
- Генетски оператори који се примењују су: оператор селекције за одабир хромозома који ће учествовати у репродукцији, укрштања за креирање нових јединки и мутације којом се врши модификација малог процента хромозома.

Концепт физички заснованог моделовања у контексту изогеометријске морфогенезе могуће је реализовати применом аналогних или дигиталних технологија. Рачунарске технологије су доминантне, док је примена аналогних техника у функцији сужења домена претраге. У случају примене дигиталних техника за процес обликовања површинских конструктивних система користи се NURBS технологија. Уместо конвенционалног поступка обликовања

експлицитним померањем контролних тачака и мењањем вредности тежинских фактора, NURBS површима додељују се материјалне карактеристике танких еластичних љуски, а њихово обликовање врши се кроз процес деформисања. Деформабилне NURBS структуре обликују се постављањем геометријских ограничења и услова минималне вредности померања. Дакле овај систем за интерактивно моделовање заснован је на оптимизацији крутости.

Специфичне карактеристике физички заснованог деформабилног модела, примењеног у контексту изогеометријске морфогенезе, могу се сумирати на следећи начин:

- Деформабилни модели представљају генерализацију геометријских модела, начелно реализују се на стандардним геометријским основма, као што је параметарска репрезентација кривих и површи слободне форме, у конкретном случају NURBS репрезентација. На овај начин је обезбеђен континуитет и подизање процеса моделовања на физички ниво коришћењем постојећих геометријских алата.
- Деформабилни модели су под утицајем физичких закона. Ови модели заправо представљају рачунарску симулацију физичког понашања структуре, а облик структура настаје као одговор на дејство сила/оптерећења.
- Равнотежно стање динамичких модела карактерише минимум померања за наметнута ограничења. Померања представљају векторску величину којима се описује глобално и локално понашање система, због чега је проблем могуће формулисати тако да се задовоље локални и глобални критеријуми, тј. геометријска ограничења релевантна за обликовање.

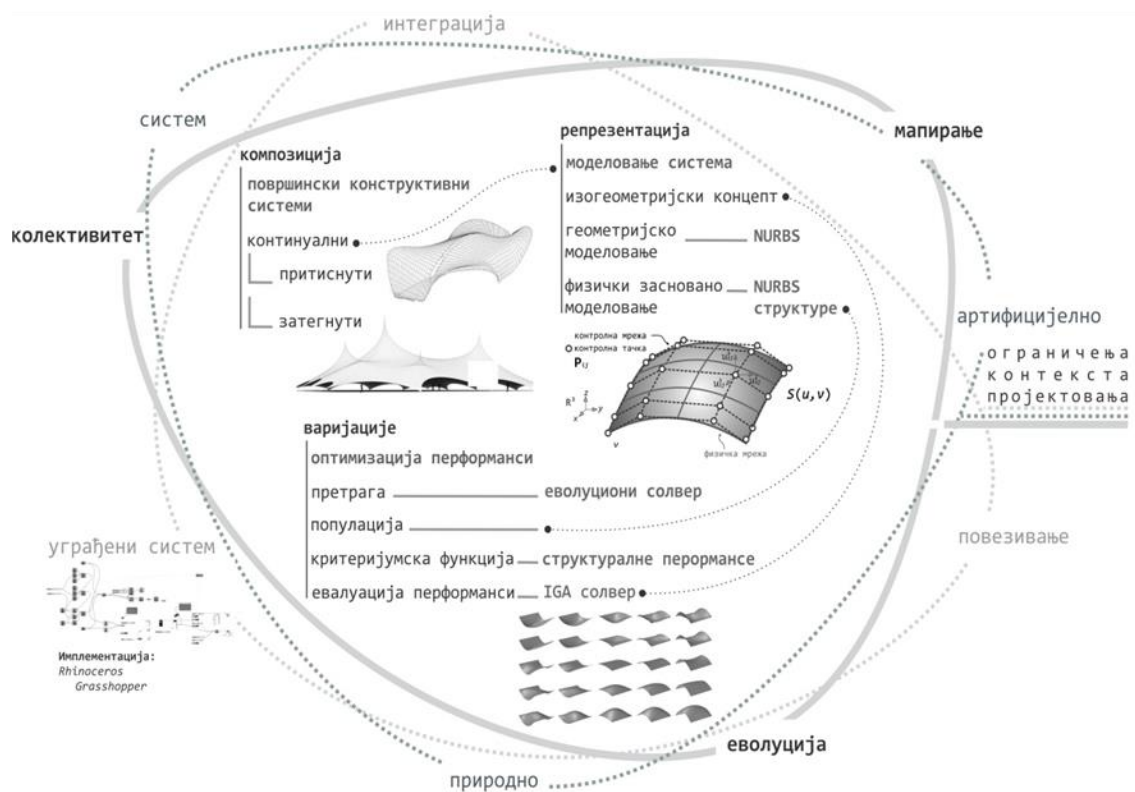
Овај у основи механички приступ геометријском моделовању захтева решавање диференцијалних једначина, најчешће коришћењем приступа заснованог на коначним елементима, односно у случају овог рада биће примењени изогеометријски елементи.

Изогеометријски концепт као што је приказано поглављем 2.3.2 подразумева конзервацију геометријске репрезентације, односно коришћење функција за геометријску репрезентацију у напонско деформацијској анализи.

Специфичне карактеристике изогеометријске анализе примењене у контексту изогеометријске морфогенезе су следеће:

- Изогеометријска анализа се користи за решавање проблема еластостатике.
- Изопараметрски концепт реализује се применом NURBS база - функција за моделовање геометрије и поља померања.
- Гранични услови примењују се на контролне варијабле.
- Апроксимација понашања површинског система реализује се применом NURBS изогеометријског елемента љуске без ротације.

Абстакција система коришћењем NURBS технологије има практично неограничене могућности и слободу геометријске презентације с једне стране, а с друге стране функције се могу применити у анализи. Изогеометријски концепт обезбеђује интеграцију и непрекидност циклуса дизајн-анализа. Може се рећи да је физички засновано моделовање и изогеометрија приступ у многоме деле заједничке циљеве. У том смислу циљ овог рада је повезивање ових технологија и употреба у служби пројектовања површинских конструктивних система.



Слика 3.1.1 Дијаграм концепта изогеометријске морфогенезе

3.1.1.2 Приказ основних фаза генеративне процедуре

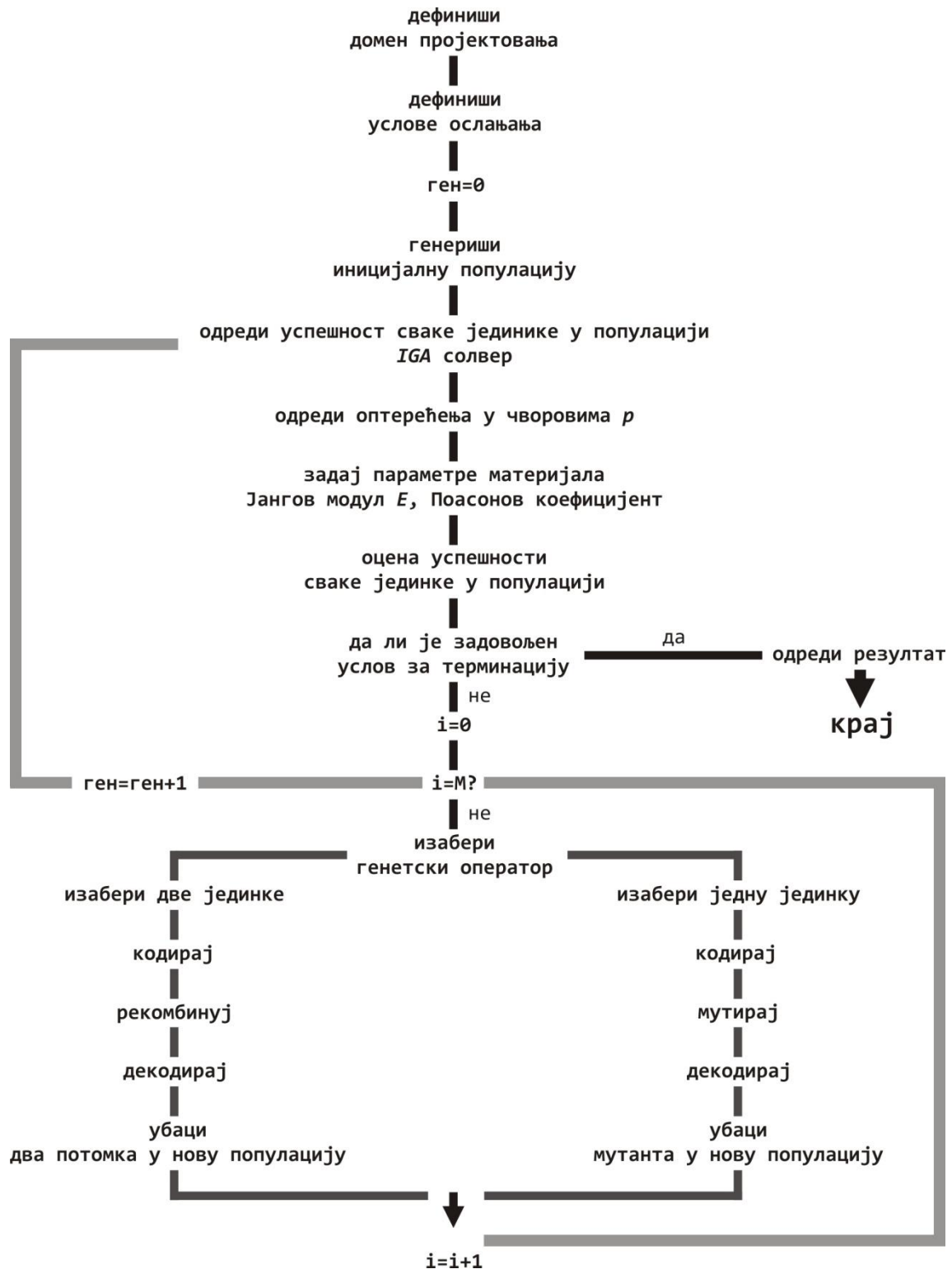
Морфогенеза површинских конструктивних система спроводи се итеративним поступком у коме посебно развијен генетски алгоритам управља интеракцијом између рачунарских алата геометријске репрезентације и структуралне анализе. С обзиром да полазиште, у општем случају, не представља унапред позната форма, процес почиње дефинисањем домена, граничних услова пројектног проблема и варијабли. Затим се кроз процес евалуације - анализе - добијају информације о перформансама структура, на основу којих генетски алгоритам врши селекцију најбољих решења и генерисање наредне генерације коришћењем оператора укрштања и мутације. Резултат овог процеса који обједињује тражење форме и оптимизацију су рационална решења оптимизова у погледу крутости.

Процедуру изогеометријске морфогенезе могуће је приказати на следећи начин:

- **Фаза 1.** *Иницијализација* у којој се полазећи од претходно дефинисаних домена, варијабли и граничних услова проблема помоћу тродимензионалног NURBS заснованог софтвера за геометријско моделовање генерише прва популација форми - скуп који садржи одређени број јединки.
- **Фаза 2.** *Евалуација* генерисане популације у којој се применом солвера за изогеометријску анализу на основу изабраних евалуационих параметара врши структурална анализа просторне конфигурације сваке јединке.
- **Фаза 3.** *Генерисање нове популације* коришћењем генетских оператора селекције, укрштања и мутације. Селекцијом се на основу резултата добијених изогеометријском анализом врши одабир најбољих јединки које треба да генеришу следећу популацију облика на начин да се пожељне особине преносе следећој генерацији, а операторима укрштања и мутације врши се размена информација и остварују варијације у оквиру исте врсте.

Евалуација, селекција, укрштање и мутација се понављају све док се не постигне задовољавајуће формално решење.

Дијаграм на слици 3.1.2 описује ток процедуре у којој је могуће раздвојити следеће секвенце:



Слика 3.1.2 Дијаграм процедуре изогеометријске морфогенезе

3.1.2 Модел генеративног система

Превођење топологије у физичку структуру

Формулација модела подразумева избор геометријске, физичке и нумеричке апроксимације појаве. У основи изогеометријске морфогенезе је модел детерминисан карактеристикама топологије конструктивног система и геометријско-механичким особинама елемената који га конституишу. У том смислу, абстракција реалног система врши се коришћењем NURBS геометријске репрезентације и њене физичке генерализације NURBS структуре, уз напомену да се генерализација одвија на скалирајући начин од геометрије ка структури.

NURBS геометрија представља параметарску репрезентацију кривих и површи, односно као што је претходно приказано у поглављу 2.1.1, NURBS крива $C(u)$ представља функцију једног, а NURBS површи $S(u, v)$ два геометријска параметра.

NURBS структура је физички модел добијен генерализацијом NURBS геометрије увођењем физичких величина. Начелно, у случају линијских система NURBS структуре представљају материјалне линије, а у случају површинских конструктивних система NURBS структуре представљају материјалне површи. Механичко понашање ових материјалних површи претходно је разматрано поглављем 2.3.2.2.

Кинематичке степене слободе NURBS геометрије чине контролне тачке и њима придружени тежински фактори. Манипулација облика NURBS површи реализује се подешавањем кинематичких степени слободе. Код *B-Spline* и *Bézier* геометрија, које представљају специјални случај NURBS-а, кинематички степени слободе су само контролне тачке.

Генералисане физичке координате NURBS структуре су контролне тачке и њима придружени тежински фактори. Они представљају контролне варијабле.

Гранични и прелазни услови подразумевају услове ослањања и карактер веза између елемената. Гранични услови односе се на систем као целину, а прелазни на појединачне елементе или групе елемената. Граничним и прелазним условима намећу се глобална и локална геометријска ограничења. Дефинисањем одређеног

броја ослонаца тј. услова ослањања уводе се ограничења генералисаних померања система као крутог тела у равни или простору. Гранични и прелазни услови моделују се применом концепта казних функција⁸⁰ (*penalty functions*) који подразумева да се спречавање одређеног генералисаног степена слободe врши додавањем релативно велике константе на локацији дијгонале матрице крутости која одговара спреченом степену слободe, што је еквивалентно додавању велике крутости у систему елемената на место и у правцу спречавања генералисаног померања.

Понашање материјала описује се материјалним константама (параметрима материјала) Јанговим модулом еластичности E и Поасоновим коефицијентом ν , а неопходан податак за одређивање сопственог оптерећења је запреминска маса ρ . Напомена је да у овој процедури карактеристике материјала фигуришу као параметри неопходни за спровођење анализе, а да детаљнији третман конструктивног понашања примењених материјала, карактеристичан за фезу разраде пројектног решења, превазилази оквире овог рада.

Крутост, у статичком смислу, представља меру отпора деформисању система на који делују силе, односно може се дефинисати као генералисана сила која изазива одређено генералисано померање, или као генералисана сила која је изазвана генералисаним померањем одређене величине (димензија је [сила/дужина]). Распоред и повезаност крутости одређује се приликом описивања геометрије и топологије система, а величина крутости избором типа коначних елемената и моделовања контурних и прелазних услова.

Попустљивост, у нумеричком смислу, представља величину инверзну крутости, односно могуће је дефинисати као генералисано померање изазвано генералисаном силом одређеног интензитета (димензија је [дужина/сила]).

Концентрисано оптерећење представља дискретну апроксимацију континуално распоређеног оптерећења реалног површинског конструктивног система, а моделују се на основу услова да дистрибуција и величина концентрисаних сила буду такви да замењујући систем има приближно исте

⁸⁰Граничне услове је могуће моделовати и брисањем одређеног генералисаног степена слободe, тј. елиминацијом врсте и колоне матрице крутости која одговара спреченом степену слободe система.

особине као и релано оптерећење конструктивног система. Концентрисане силе моделује се у контролним тачкама. Број концентрисаних сила које делују на систем одговара броју контролних тачака, а све концентрисане силе су исте величине (равномерно распоређивање оптерећења). У оквирима овог рада користи се случај гравитационог сопственог оптерећења које делује вертикално, што представља како је већ наглашено најчешће примењен случај оптерећења у поступцима тражења форме. Примена других случајава оптерећења превазилазе оквира овог рада.

Једноставност и нумеричка ефикасност представљају разлоге селекције ове врсте апроксимације довољне тачности за концептуалну фазу процеса пројектовања, која омогућава реализацију приступа обликовања површинских конструктивних система заснованог на физици.

3.1.2.1 Геометријска и физичка апроксимација

Површинске NURBS структуре. Начелно задатак ма које напонско-деформацијске анализе је проналажење деформисаног облика структуре. Дакле, овим поступцима се третира питање промене просторног облика. Као што је већ наглашено, карактеристика NURBS засноване изогеометријске анализе је да се истим функцијама описују референтна C_0 и просторна C_t конфигурација површинског система. Аналогно изразима (2.3.26) и (2.3.75) геометрију материјалне површи референтне конфигурације C_0 могуће је описати:

$$X(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} X(\alpha, \beta) \\ Y(\alpha, \beta) \\ Z(\alpha, \beta) \end{bmatrix} = \sum_{i,j}^{n,m} R_{i,j}(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} X_{P_i} \\ Y_{P_i} \\ Z_{P_i} \end{bmatrix} = \sum_{i,j}^{n,m} R_{i,j}(\alpha, \beta) P_{i,j} \quad (3.3.1)$$

где су параметри NURBS површи усвојени за криволинијске координате.

У складу са изопараметрским концептом, непознату просторну конфигурацију C_0 напрегнуте материјалне површи могуће описати истим функцијама претпостављајући кинематичко поље у форми:

$$u(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} u(u, v) \\ v(u, v) \\ w(u, v) \end{bmatrix} = \sum_{i,j}^{n,m} R_{i,j}(\alpha, \beta) \begin{bmatrix} u_{P_{i,j}} \\ v_{P_{i,j}} \\ w_{P_{i,j}} \end{bmatrix} = \sum_{i,j}^{n,m} R_{i,j}(\alpha, \beta) P_{i,j} \quad (3.1.2)$$

где су $u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ померања произвољне тачке материјалне површи у правцу Декартових координата x, y, z , док су $u_{P_{i,j}}$, $v_{P_{i,j}}$, $w_{P_{i,j}}$ одговарајућа померања контролних тачака.

Полазећи од предходних израза деформисану геометрију тела могуће је описати на следећи начин:

$$x(\alpha, \beta) = X(\alpha, \beta) + u(\alpha, \beta) = \sum_{i,j}^{n,m} R_{i,j}(\alpha, \beta)(P_{i,j} + u_{i,j}) = \sum_{i,j}^{n,m} R_{i,j}(\alpha, \beta)p_{i,j} \quad (3.1.3)$$

где су $p_{i,j} = P_{i,j} + u_{i,j}$ контролне тачке NURBS површи у просторној C_t конфигурацији. Из израза (3.1.3) следи да је проналажење просторне геометрије NURBS структуре могуће ако су позната померања свих контролних тачака.

Генерализане координате површинске NURBS структуре чине мрежа $(m + 1)(n + 1)$ контролних тачака $P_{i,j}$ и тежина $w_{i,j}$, а њихов вектор дефинисан је изразом:

$$P = [P_{0,0}^T w_{0,0} \quad \dots \quad P_{i,j}^T w_{i,j} \quad \dots \quad P_{m,n}^T w_{m,n}]^T \quad (3.1.4)$$

Гранични услови и проблем граничних вредности претходно су дати изразима (2.3.63)-(2.3.65). Изогеометријски приступ решавању граничног проблема заснован је на NURBS базним функцијама R_M , које у складу са тим формирају просторе тест функција. Генерално у случају NURBS репрезентације задовољење Дирихлеових граничних услова (2.3.64) засновано је на линеарној комбинацији оних базних функција које имају утицај на контуру Γ_u , што је формулисано као:

$$\mathcal{G}_i = \sum_{M=N_q+1}^{N_p} R_M \mathcal{Q}_{Mi} \quad (3.1.5)$$

где су \mathcal{G}_i задата, а \mathcal{Q}_{Mi} контролна померања. У случају контурне интерполационе контролне тачке наметање граничног услова своди се на $\mathcal{Q}_{Mi} = \mathcal{G}_i$. Уколико контролна померања \mathcal{Q}_{Mi} не задовољавају егзактно задати гранични услов, као и код класичних коначних елемената, могуће је извршити интерполацију вредности \mathcal{G}_i . С обзиром да контролне тачке нису интерполационог карактера, погодним избором вредности \mathcal{Q}_{Mi} могуће је постићи бољу апроксимацију контурних услова него у класичном приступу. Такође, потребно је напоменути да хомогени гранични услови $\mathcal{G}_i = 0$, који представљају најчешћи случај, у складу са изразом (3.1.5) имплицирају нулте вредности контролних померања $\mathcal{Q}_{Mi} = 0$ за $M = N_q +$

$1, \dots, N_p$, док су у случају константних граничних вредности $\varphi_i = c_i$, и померања контролних тачака су константна $q_{Mi} = c_i$ за $M = N_q + 1, \dots, N_p$, што је последица јединичног својства NURBS базних функција (табела 2.3.1).

Еквивалентне контролне силе могуће је формулисати полазећи од израза за рад спољашњих сила на виртуалним померањима и обртањима средње површи љуске:

$$\delta W_{ext} = - \int_A p(\theta^i) \delta u(\theta^i) dA \quad (3.1.6)$$

где је

$$p = p^k i_k \quad (3.1.7)$$

вектор расподељеног спољашњег оптерећења.

Коришћењем изогеометријског описа кинематичког поља љуске једначину (3.4.6) је могуће преформулисати на следећи начин:

$$\delta W_{ext} = - \int_A [p(\theta^i) (\sum_{i,j}^{n,m} R_{i,j}(\theta^i) \delta u_{i,j})] dA \quad (3.1.8)$$

односно

$$\delta W_{ext} = - \sum_{i,j}^{n,m} \int_A R_{i,j}(\theta^i) p(\theta^i) \delta u_{i,j} dA \quad (3.1.9)$$

Заменом расподељених оптерећења и момената генералисаним вектором расподељених оптерећења датим следећим изразом:

$$p = \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{bmatrix} \quad (3.1.10)$$

израз (3.1.9) се може преформулисати на следећи начин:

$$\delta W_{ext} = - \sum_{i,j}^{n,m} [\int_A R_{i,j}(\theta^i) p(\theta^i) dA] \delta q_{i,j} \quad (3.1.11)$$

или

$$\delta W_{ext} = - \sum_{i,j}^{n,m} Q_{i,j}^T \delta q_{i,j} \quad (3.1.12)$$

где је $Q_{i,j}$ вектор еквивалентних сила i, j -те контролне тачке елемента љуске:

$$Q_{i,j} = \int_A R_{i,j}(\theta^i) p(\theta^i) dA \quad (3.1.13)$$

Као што је претходно наглашено у поглављу 2.3.2.2 једначину која представља услов равнотеже начелно није могуће решити аналитички, у наставку рада, за решавање ће бити искоришћена NURBS заснована изогеометријска анализа [Cot09]. Дискретизације ће се извршити применом Кирхоф-Лав елемента танке еластичне љуске без ротације.

3.1.2.2 Нумеричка апроксимација

Кирхов-Лав елемент танке еластичне љуске без ротације карактерише одсуство смичућих деформација у равнима управним на средњу површ, што имплицира елиминацију трансверзалне силе из вектора генералисаних сила, а приказано је изразима:

$$E^T = [\varepsilon^T \quad -K^T] = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \gamma_{12} \quad -K_{11} \quad -K_{22} \quad -2K_{12}] \quad (3.1.14)$$

$$R^T = [N^T \quad M^T] = [N^{11} \quad N^{22} \quad N^{12} \quad \bar{M}^{11} \quad \bar{M}^{22} \quad \bar{M}^{12}]$$

као и да матрица материјалне крутости има следећи облик:

$$D = \begin{bmatrix} D_M & D_{MB} \\ D_{MB}^T & D_B \end{bmatrix} \quad (3.1.15)$$

Принцип виртуалних померања. Унутрашњи виртуални рад коначног/контролног елемента, сагласно изразу (2.3.73) могуће је изразити као:

$$\delta W_{int} = \int_V \bar{\sigma}^{\alpha\beta} \delta \bar{\varepsilon}^{\beta\alpha} dV \quad (3.1.16)$$

где је V запремина елемента. Диференцијални елемент запремине на произвољном одстојању од средње површи љуске могуће је описати следећим изразом:

$$dV = (\bar{g}_1 \times \bar{g}_2) \bar{g}_3 dudvdw = \sqrt{\bar{g}} dudvdw \quad (3.1.17)$$

односно:

$$dV = g_0 \sqrt{\bar{g}} dudvdw = (g_0 dw) dA \quad (3.1.18)$$

где је $dA = \sqrt{\bar{g}} dudv$.

Интеграцијом израза (3.1.16) по дебљини љуске добија се израз:

$$\delta W_{int} = \int_A \int_{-t/2}^{t/2} [\bar{\sigma}^{\alpha\beta} (\delta \varepsilon_{\beta\alpha} - \zeta \delta K_{\beta\alpha})] g_0 dw dA \quad (3.1.19)$$

односно

$$\delta W_{int} = \int_A (N^{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\beta\alpha} - \bar{M}^{\alpha\beta} \delta K_{\beta\alpha}) dA \quad (3.1.20)$$

На основу претходног израза могуће да је виртуални рад на коначном елементу љуске последица је мембранских сила $N^{\alpha\beta}$ на мембранској деформацији $\varepsilon_{\beta\alpha}$ и момената савијања $\bar{M}^{\alpha\beta}$ на промени кривине средње површи $K_{\beta\alpha}$.

Матрица крутости. Унутрашњи виртуални рад у условима инфинитезималних деформација може се написати и у облику:

$$\delta W_{int} = \int_A R^T \delta E dA = \int_A E^T D \delta E dA \quad (3.1.21)$$

Стандардном процедуром методе коначних елемената претходни израз је могућа преформулисати на селдаћи начин:

$$\delta W_{int} = \int_A E^T D \delta E dA = q^T (\int_A B_L^T D B_L dA) \delta q = q^T K_L \delta q \quad (3.1.22)$$

Из претходног израза следи формулација матрице крутости изогеометријског коначног елемента:

$$K_L = \int_A B_L^T D B_L dA \quad (3.1.23)$$

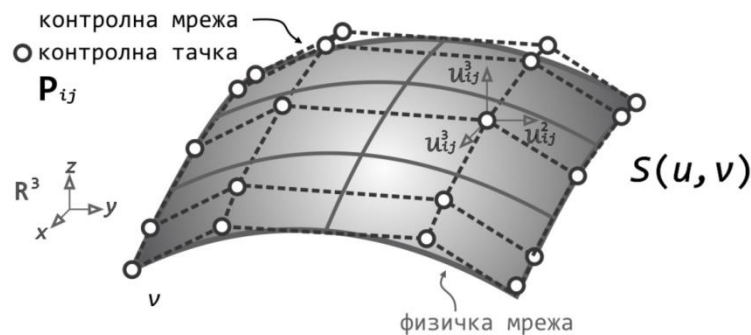
где B_L представља NURBS матрицу трансформације линеарне деформације средње површи љуске.

Вектор генералисаних померања коначног елемента љуске могуће је изразити у форми:

$$q = [q_{1,1}^T \quad \dots \quad q_{i,j}^T \quad \dots \quad q_{n,m}^T]^T \quad (3.1.24)$$

где ма који субвектор $q_{i,j}$ сарджи генералисана померања, односно степене слободе ij -те контролне тачке (слика 3.1.3), односно:

$$q_{i,j}^T = [u_{i,j}^1 \quad u_{i,j}^2 \quad u_{i,j}^3] \quad (3.1.25)$$



Слика 3.1.3 Кирхоф-Лав коначни/контролни елемент љуске без ротације

Оператори трансформације деформација. Вектор деформације средње површи љуске могуће је изразити као:

$$E = \sum_{m=1}^3 L_m u_{12}^m \quad (3.1.26)$$

где L_m представља оператор деформације:

$$L_m = \begin{bmatrix} x_{,1}^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{,2}^m & 0 & 0 & 0 \\ x_{,2}^m & x_{,1}^m & 0 & 0 & 0 \\ x_{,11}^k x_{,k}^1 x_{m,3} & x_{,11}^k x_{,k}^2 x_{m,3} & -x_{,3}^m & 0 & 0 \\ x_{,22}^k x_{,k}^1 x_{m,3} & x_{,22}^k x_{,k}^2 x_{m,3} & 0 & -x_{,3}^m & 0 \\ x_{,12}^k x_{,k}^1 x_{m,3} & x_{,12}^k x_{,k}^2 x_{m,3} & 0 & 0 & -x_{,3}^m \end{bmatrix} \quad (3.1.27)$$

а вектор u_{12}^m

$$(u_{12}^m)^T = [u_{,1}^m \quad u_{,2}^m \quad u_{,11}^m \quad u_{,22}^m \quad u_{,12}^m] \quad (3.1.28)$$

Вектор u_{12}^m изражен коришћењем генералисаних померања елемента љуске могуће је изразити као:

$$u_{12} = B_{u\varphi} \varphi \quad (3.1.29)$$

где су:

$$u_{12} = \begin{bmatrix} u_{12}^1 \\ u_{12}^2 \\ u_{12}^3 \end{bmatrix} \quad B_{u\varphi} = \begin{bmatrix} B_1^1 & \dots & B_{ij}^1 & \dots & B_{nm}^1 \\ B_1^2 & \dots & B_{ij}^2 & \dots & B_{nm}^2 \\ B_1^3 & \dots & B_{ij}^3 & \dots & B_{nm}^3 \end{bmatrix} \quad (3.1.30)$$

а субматрице произвољне контролне тачке B_{ij}^m су:

$$B_{ij}^1 = \begin{bmatrix} R_{ij,1} & 0 & 0 \\ R_{ij,2} & 0 & 0 \\ R_{ij,11} & 0 & 0 \\ R_{ij,22} & 0 & 0 \\ R_{ij,12} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 0 & R_{ij,1} & 0 \\ 0 & R_{ij,2} & 0 \\ 0 & R_{ij,11} & 0 \\ 0 & R_{ij,22} & 0 \\ 0 & R_{ij,12} & 0 \end{bmatrix} \quad B_{ij}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{ij,1} \\ 0 & 0 & R_{ij,2} \\ 0 & 0 & R_{ij,11} \\ 0 & 0 & R_{ij,22} \\ 0 & 0 & R_{ij,12} \end{bmatrix} \quad (3.1.31)$$

Увођење оператора укупне деформације датог изразом:

$$L = [L_1 \quad L_2 \quad L_3] \quad (3.1.32)$$

омогућава да се израз (3.1.26) преформулише на следећи начин:

$$E = L u_{12} = L B_{u\varphi} \varphi = B_L \varphi \quad (3.1.33)$$

где је B_L заправо матрица трансформације деформације

$$B_L = L B_{u\varphi} \varphi \quad (3.1.34)$$

Дискретна једначина равнотеже. Полазећи од израза за равнотежу система (2.3.72) нулту вредност виртуалног рада коначног елемента љуске у конфигурацији $\mathcal{C}_{t+\Delta t}$ могуће је формулисати на следећи начин:

$$\delta_0^{t+\Delta t} W_{int} + \delta_0^{t+\Delta t} W_{ext} = 0 \quad (3.1.35)$$

Дискретну форму у функцији контролних степени слободе могуће је изразити као:

$$({}_0\varphi^T {}^t K_T + {}_0^t F^T - {}_0^t Q^T) = \delta_0 \varphi = 0 \quad (3.1.36)$$

Даље следи:

$${}^t K_{T0} \varphi = {}_0^t Q - {}_0^t F = {}_0 Q \quad (3.1.37)$$

где ${}_0 Q$ представља инкрементално контролно оптерећење.

Коришћењем итеративне Њутн-Рапсонове процедуре врши се линеаризација, односно добија се линеарни систем једначина по непознатим итеративним контролним померањима:

$${}^t K_0 q^{(i)} = {}^{t+\Delta t} Q - {}^{t+\Delta t} F_0^{(i-1)} \quad (3.1.38)$$

где ${}^0 q^{(i)}$ представља i -то итеративно контролно померање, а ${}^{t+\Delta t} F_0^{(i-1)}$ вектор унутрашњих контролних сила након $(i - 1)$ -те итерације.

У случају Кирховљеве теорије танких еластичних љуски без померања, вектори линеарног и нелинеарног прираштаја деформације садрже следеће елементе:

$${}^0 e^T = [{}^0 e_{11} \quad {}^0 e_{22} \quad 2{}^0 e_{12} \quad -{}^0 K_{11} \quad -{}^0 K_{22} \quad -2{}^0 K_{12}] \quad (3.1.39)$$

$${}^0 \bar{\eta}^T = [{}^0 \eta_{11} \quad {}^0 \eta_{22} \quad {}^0 \eta_{12}]$$

Оператор нелинеарне деформације је облика:

$${}^0 \bar{\eta}^T = [{}^0 u_{,1}^1 \quad {}^0 u_{,2}^1 \quad {}^0 u_{,1}^2 \quad {}^0 u_{,2}^2 \quad {}^0 u_{,1}^3 \quad {}^0 u_{,2}^3] \quad (3.1.40)$$

Претходно имплицира матрицу сила која је једнака:

$${}^t \hat{R} = \begin{bmatrix} N^{11} & N^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N^{21} & N^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{11} & N^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N^{21} & N^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N^{11} & N^{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N^{21} & N^{22} \end{bmatrix} \quad (3.1.41)$$

Као што је већ наглашено у NURBS заснованој Кирхофовој теорији танких еластичних љуски не фигуришу ротације око тангенцијалних базиса средње површи, јасно је онда да вектор еквивалентних контролних сила не садржи концентрисане моменте, већ само силе претходно формулисане изразом (3.1.12).

3.2 Имплементација

За разлику од метода пројектовања у којима се форма конципира у иницијалној фази на основу скица, а потом као референтни облик препушта инжењерима како би се побољшале њене механичке перформансе, као што је претходно наглашено, поступак изогеометријске морфогенезе, у општем случају, не захтева иницијалну геометрију.

Дефинисање проблема и пројектних варијабли у оваквој поставци представља почетни корак. Задатак је проналажење форме која поседује најбоље структуралне перформансе - оптимизација облика. У зависности од разматраног проблема геометрија се дефинише параметрски, а за пројектне варијабли усвајају се геометријске варијабли које утичу на укупан облик структуре. Дефинишу се гранични услови - начини ослањања, оптерећења, дебљина површинске структуре, као и параметри материјала.

Дефинисање домена, односно адекватног простора претраге фундаментални је задатак с обзиром да директно утиче на функционисање морфогенетске процедуре. Приликом дефинисања опсега варијабли начелно су могућа два приступа. У случају усвајања малог опсега, тј. лимитираног домена, финални облик се заправо може сматрати унапређеном верзијом иницијалне просторне конфигурације, односно поступак се своди на оптимизацију механичких перформанси. У случају претпостављања ширег опсега, еволуциони алгоритам спроводи прави морфогенетски процес, чији су резултат оптималне структуре, али и низ нових интересантних облика захтеваних структуралних перформанси. Из тог разлога се оваква процедура може сматрати неконвенционалним процесом пројектовања.

Дефинисање критеријум евалуације спроводи узимајући у обзира да се процењују структуралне перформансе. Као меру структуралних перформанси начелно је могуће усвојити следеће величине: померања, деформације, напоне или енергију деформације, све ове величине исказују утицаје услова оптерећења на еластичну структуру. Различит карактер ових величина усмериће процес у правцу проналажења различитих оптималних решења. Крута структура ће имати мала

померања и деформације, док ће јака структура имати релативно мала напрезања, а и једна и друга ће имати малу енергију деформације. Померања представљају векторско поље, напони су тензорско поље, локално дефинисано, а укупна енергија деформације представља скаларну вредност, која се израчунава као интеграл на целој структури и представља глобалну меру механичког понашања.

Имплементације процедуре изогеометријска морфогенезе и различите могућности у том поступку приказане су табелом 3.2.1.

Табела 3.2.1 Опције имплементације ИГМ процедуре

параметар	опис	опције имплементације
пројектне варијабле <i>design variables</i>	геометријске варијабле које утичу на облик структуре	▪ координате NURBS контролних тачака
домен пројектовања <i>design domain</i>	волуме у оквиру чијих граница је предметна структура	▪ волумен дефинисан димензијама основе и максималном висином
домен претраге <i>search domain</i>	дефинисан је опсегом варијабли	▪ шири ▪ ужи
гранични услови <i>boundary conditions</i>	начин ослањања структуре	▪ у тачки(ама) ▪ по контури - кривој/правој отвореној/затвореној
ограничења <i>constraints</i>		▪ хоризонталне координате NURBS контролних тачака ▪ вертикалне координате NURBS контролних тачака ▪ дебљина структуре ▪ маса структуре
оптерећења <i>loads</i>	спољашњи утицаји на структуру	▪ сопствена тежина ▪ стална оптерећења ▪ покретна оптерећења ▪ итд.
примењени материјал <i>applied material</i>	матријализација структуре; у прорачунима фугуришу параметри материјала	▪ бетон ▪ композити ▪ итд.
критеријум евалуације <i>fitness evaluation</i>	мера структуралних перформанси	▪ померање ▪ деформација ▪ напон ▪ енергија деформације ▪ итд.

Примена одговарајућег образаца репрезентације је кључни корак поступка изогеометријске морфогенезе. Образац репрезентације је начин мапирања проблема и подразумева дефинисање простора претраге, начина генетске репрезентације могућих решења - јединки (хромозома) и опсега варијабилности сваког гена како би се лимитирало поље могућих решења. Свака варијабла проблема кодира се како би постала део (ген) јединственог хромозома, тј. генетска репрезентација могућег решења (јединке).

3.2.1 Пројектовање генетског алгоритма

Полазиште процеса пројектовања генетског алгоритма, чији је задатак избор површинског система оптималних структуралних перформанси, је одређивање начина кодирања и спецификација основних параметара. Иако генетски алгоритам начелно спада у алгоритме типа *црна кутија* (*black-box*) мора се прилагодити специфичном проблему. Избор параметара генетског алгоритма драстично утиче на перформансе и релевантност решења. Генетски алгоритам је дефинисан следећим параметрима:

- n - величином популације;
- f - функцијом евалуације;
- p_c - вероватноћом укрштања (*crossover rate*);
- p_m - вероватноћом мутације;
- g - генерацијским јазом (*gap*).

У складу са општом структуром приказаном у поглављу 2.2.2, процес пројектовања генетског алгоритма одвија се кроз фазе дефинисања функције евалуације, образаца кодирања, начина формирања иницијалне популације, механизма селекције, укрштања и мутације, терминационог критеријума, а у функцији проблема тражења површи оптималних структуралних перформанси.

Уобичајено само две компоненте генетског алгоритма зависе од конкретног проблема: кодирање проблема и функција евалуације. Дакле конкретизација опште структуре генетског алгоритма почиње његовим дефинисање помоћу функције евалуације и поступком кодирања проблема креирањем хромозома. Имјући у виду да се радом разматра проблем оптимизације структуралних перформанси површинских конструктивних система примењен је поступак дводинамзионалног реалног кодирања. Односно, у поступку изогеометријске морфогенезе који је орјенетисан на тражењем оптималних облика, пројектне вријабле су природно контролне тачке NURBS површи, с обзиром да се промена облика једноставно може вршити померањем селектованих нехомогених координата контролних тачака и тежина, као што је претходно приказано у поглављу 2.3.1. Претходно практично значи да контролне тачке представља скуп

пројектних варијабли облика. Функција евалуације узима кодирани записа хромозома као улазну променљиву, а као излазни податак генерише критеријуме перформанси који су придружени том хромозому. У конкретном случају функција евалуације процењује структуралне перформансе површи. Слично процесу еволуције у природи улога функције евалуације је да прикаже меру квалитета решења.

Дакле, пројектовање генетског алгоритма подразумева процес одлучивања о одређеном броју техничких питања, чији одговори у великој мери утичу на успешност алгоритма.

3.2.1.1 Функција евалуације

Начелно, функција евалуације треба да задовољи два услова: да је могуће употребити у генетском алгоритму и да осликава везу са реалним проблемом пројектовања и оптимизације површинских конструктивних система. Први услов се заправо своди на то да функција евалуације није негативна, док је други услов последица чињенице да генетски алгоритам користи само функцију евалуације као везу са реалним проблемом, имајући у виду да оператори нису специфични за проблем. Функција евалуације траба на најбољи начин да репрезентује циљ оптимизације како би исход био добро решење. У том смилсу, осим апстрактно дефинисаног скупа потенцијалних решења мора се дефинисати адекватна мера структуралних перформанси.

Као основни критеријуми евалуације начелно могу се одабрати мера масе или крутости. Процена крутости (критеријум који се користи у оквирима овог рада) може се извршити на основу максималних вертикалних померања структуре, и представља погодан параметар за грубу процену структуралног понашања. Аналогне резултате могуће је добити израчунавањем функције крутости, али и интеграла укупне енергије деформације или максимално оптерећење еластичног извијање итд. Уколико је циљ да структура одговори на одређене захтеве, нпр. да максимално напрезање буде у одређеним границама потребно је дефинисати ограничења и обезбеди њихово задовољење. Ограничења се могу користити за аугментацију или пенализацију критеријумске функције на начин да могу утицати

на селекцију неодрживих решења или њихову елиминацију као конкурентних. Евалуација успешности сваке јединке спроводи се коришћењем метода померања (нпр. FEA, IGA) и позива се најмање један пут у свакој итерацији алгорита.

Формулација проблема Минимизирање максималне вредности померања представља пројектни критеријум коришћен за евалуацију структуралних перформанси у оквиру овог рада. У том смислу, проблем оптимизације крутости површинских конструктивних система могуће је формулисати на следећи начин:

$$\min_s u_{\max} \quad (3.2.1)$$

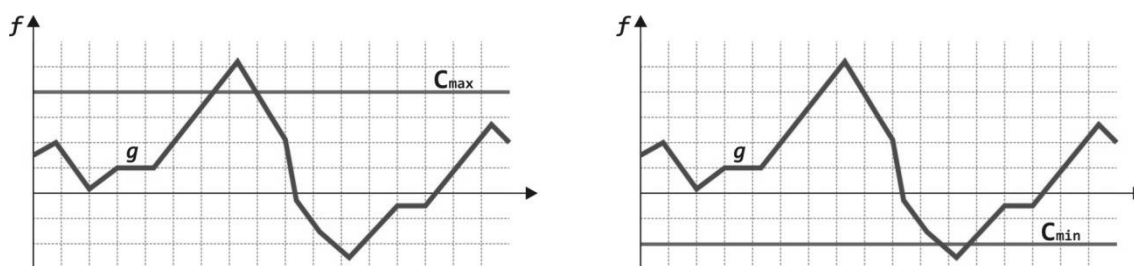
где су u_{\max} максимална померања, док је s скуп пројектних варијабли облика који укључује координате свих контролних тачака осим оних које учествују у дефинисању граничних услова. Задатак је одређивање конструктивних параметара - геометрије који дефинишу екстремна својства - минимум максималних померања предметног површинског конструктивног система.

Прилагођавање функције евалуације (слика 3.2.1) најједноставније се врши одсецањем. Односно у случају да је циљ минимизирање функције $g(x)$ одабира се функција евалуације $f(x)$ тако да задовољава услов:

$$f(x) = \begin{cases} C_{\max} - g(x), & \text{за } C_{\max} - g(x) > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Односно, у случају максимизирања функције $g(x)$, одабира се функција евалуације $f(x)$ тако да задовољи услов:

$$f(x) = \begin{cases} C_{\min} + g(x), & \text{за } C_{\min} + g(x) > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (3.2.3)$$



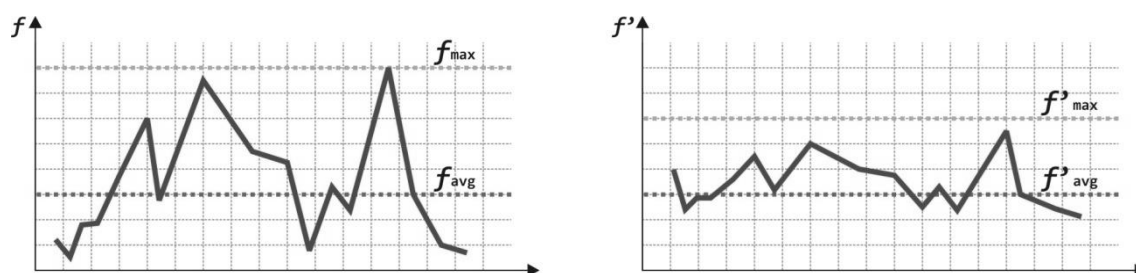
Слика 3.2.1 Графички приказ прилагођавања функције евалуације

Скалирање функције евалуације (слика 3.2.2) спроводи се како би се спречила преурањена конвергенција и неналажење глобалног екстрема до ког може доћи услед доминације тзв. супер јединке, односно јединке чија је вредност функције евалуације значајно већа у односу на остале. С обзиром да је вероватноћа

селекције директно пропорционална вредности функције евалуације оваква јединка би својом доминацијом практично могла да спречи могућност откривања потенцијално других добрих простора претраге. Како би се допустило и лошијим јединкама да опстану и да потенцијално еволуирају у значајно боље јединке у другим просторима претраге потребно је направити компромис између брзине конвергенције и дела простора обухваћеног претрагом. У том смислу, како би се добила погодније функција евалуације f' врши се скалирање иницијалне функције евалуације $f(x)$, што је дато изразом:

$$f' = af + b \quad (3.2.4)$$

Коефицијенти a и b бирају се тако да је средња вредности функција f' и f иста, тј. $f'_{avg} = f_{avg}$ као и да је $f'_{max} = C_{max} * f_{avg}$, где је C_{max} одабрана константа. Константом C_{max} може се контролисати очекивани број најбољих јединки који се одабира за учешће у наредној генерацији.



Слика 3.2.2 Графички приказ скалирања функције

Недозвољена стања која се могу јавити приликом решавања практичних проблема најчешће се елиминишу модификацијом функције евалуације тако да се врши тзв. кажњавање или пенализација уколико се променљива нађе у недозвољеној области. Односно, вредност функције евалуације могуће је поставити на 0 у недозвољеним деловима простора претраге, или је могуће пенализовати ниво нарушавања неког услова. Претходно се користи како би се елиминисале површи које излазе изван домена пројектовања, али може се применити и на одређене контролне тачке које имају фиксирани координате, тј. које припадају ослоњцима или имају функцију да обезбеде потребну висину објекта. Овакве тачке дефинишу се као интерполационе или се уводе са њима повезане казнене функције. На овај начин се заправо редукује могућност *опстанка* површи која не испуњавају дефинисана ограничења.

Дефинисање успешности и начина његовог мерења. Мера перформанси/успешности, тј. вероватноће да ће јединка преживети, одређује се на основу *референтне евалуације перформанси (reference performance evaluation)* за које се у техничкој терминологији користи и назив *груби фитнес (raw fitness)*. Ова вредност се у одређеним случајевим (укључујући и овај рад) преводи у *стандардизовани фитнес (standardized fitness)*, а код генетских алгоритама постоји начелни договор да нижа нумеричка вредност одговара бољим перформансама. Постоји и *нормирани фитнес (normalized fitness)* који се прорачунава директно из стандардизованог како би се увек добиле вредности које су између 0 и 1 (веће за боље јединке у популацији а у укупном збиру једнаке 1).

3.2.1.2 Генетско кодирање пројектних варијабли и генетски оператори

Образац генетског кодирања представља начин трансформације специфичног знања везаног за одређени проблем у оквиру генетског алгоритама. С обзиром да се сви оператори примењују на кодираним хромозомима, и да овај избор директно утиче на ефикасност оператора у вршењу својих функција, неопходно је водити се препоруком да се генетски оператори пројектују једновремено са образцем кодирања како би се што боље одговорило специфичним захтевима проблема. У том смислу, за кодирање пројектних варијабли проблема оптимизације структуралних перформанси површинских конструктивних система, у оквирима овог рада, одабрано је реално дводиманзионално кодирање [Tsa13].

Реално кодирање као одабрана стратегија репрезентације пројектних варијабли у првом реду омогућава добро описивање геометријског проблема, тј. кодирање површи коришћењем геометријских координата. Код бинарног кодирања у процесу рекомбинације може се десити да дође до пресецања хромозома родитеља на начин који ће узроковати нежељене девијације новодобијених хромозома потомака, због чега у овом случају не представља ефикасну стратегију. С друге стране реално кодирање омогућава једноставну комутацију. Односно, реално кодирање обезбеђује да су једине могуће тачке пресека тачке између вредности координата. Генетски алгоритама оперише на кодираној репрезентацији (генералисаним координатама) NURBS контролних тачака, које су ускладиштене у дводиманзионалној матрици како би се сачувала

тополошка корелација са претходно описаном геометријском репрезентацијом површи. Потребно је нагласити да је дводимензионално кодирање увек повезано са дводимензионалним оператором укрштања.

Генетски оператори који ће се користити су селекција, укрштање и мутација.

Оператор селекције има задатак да обезбеди бољим јединкама већу шансу да преживе, односно да гарантује бољим јединкама сигурно место у наредној генерацији. Детерминистички одабир врши се тако што се свакој јединки гарантује онолико копија колики је очекивани број одабира те јединке у процесу рулет-точак селекције. Дакле, за јединку i бира се $n \frac{f_i}{\sum f_j}$ гарантованих копија (при чему се врши одсецање разломљеног дела). Преостали број јединки се бира по реду од најбољих јединки ка горим. Директним копирањем одређеног броја најбољих јединки у наредну генерацију, требало би да води ка глобалном максимуму и бржој конвергенцији, чиме се побољшавају перформансе генетског алгоритма и поред тога што остављањем места за најбоље јединке (докле год оне то јесу) смањује број места за друге јединке које покушавају да нађу неке друге погодније делова простора претраге.

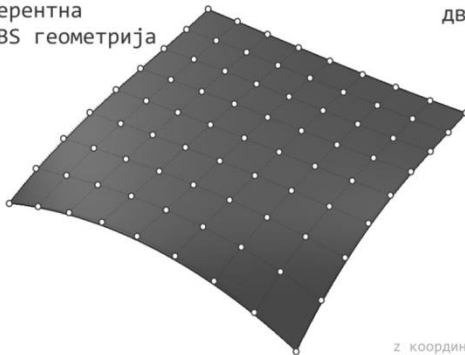
Дводимензионални оператор укрштања (слика 3.2.3) примењује се над реално кодираним дводимензионалних хромозомима из разлога јер обезбеђује могућност да се задрже суседни односи између добрих делова јединке, односно омогућава бољу конструкцију могућег решења. На овај начин се избегава било која врста асиметрије која би могла бити генерисана применом једнодимензионалног оператора укрштања на дводимензионалне варијабле. Дводимензионални оператор укрштања у n -пресечних тачака могуће је развити модификацијом претходно описаног конвенционалног укрштања.

Оператор мутације се примењује у циљу добијања новог квалитета. Међутим имајући у виду да превелика мутација може деградирати перформансе генетског алгоритма (мутирањем добрих јединки) одређује се мали степен мутације који води до брже конвергенција ка локалном максимуму. Примењена техника мутације је инверзија битова, којом се заправо инвертују случајно изабрани битови хромозома.

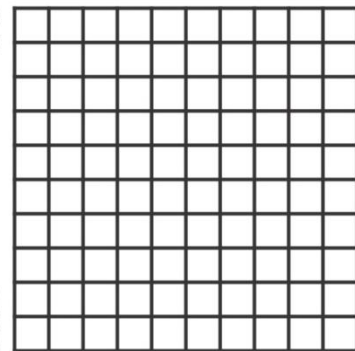
Оптимизација генетског алгоритма спроводи се ограничавањем популације на одређени број јединки (нпр.20), од којих се одређени број најбољих јединки (нпр. 1) у свакој генерацији чувају као елитне, док се преостала боља половина популације користи, у свакој генерацији, како би генерисала нове јединке помоћу додизимензионалног укрштања и операције мутације. Остатак популације добија се додавањем јединки добијених генетским мутацијама најбољих јединки у свакој итерацији. Резултат је генетски алгоритам који једновремено генерише нова могућа решења и врши унапређење најбољих решења у свакој генерацији.

шема репрезентације

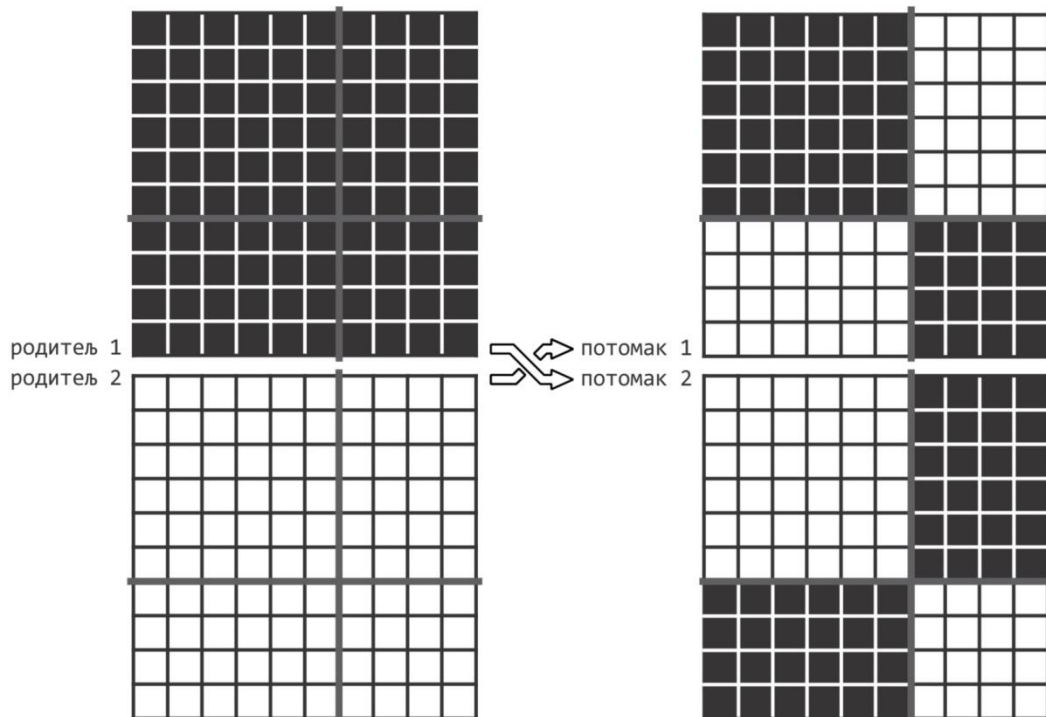
референтна
NURBS геометрија



двoдимензионални
хромозом



двoдимензионално укрштање



Слика 3.2.3 Графички приказ двoдимензионалног хромозома и принципа двoдимензионалног укрштања

3.2.2 Програмска имплементација

У оквирима овог рада алгоритам изогеометријске морфогенезе имплементиран је као програмски код - *MorphoGen*⁸¹. Програмски код је имплементиран у оквир програмског CAD система за 3D моделовање *Rhinoceros*®. Развој рачунарског алата (*plug-in* програма) представља могући правац наставка истраживања с циљем реализације алата за моделовање које ће омогућити интерактивно обликовање конструктивних система.

Комерцијална апликација *Rhinoceros*® одабрана је из неколико разлога. Један од разлога је распрострањена употреба овог софтвера у области архитектуре. Затим јер представља CAD софтвер у чијој основи се поред осталих библиотека налази *openNURBS library* коју су развили *Robert McNeel&Associates*, а која је у потпуности отворена (*open source*). Такође *Rhinoceros* има могућност додавања модула (*plugins*) који проширују његове функције. Заправо политика фирме је да се уместо додавања кодова *Rhinoceros*-у пишу *plugin*-ови у C++ или било ком од језика који подржавају *DotNET* оквир (*VB.NET*, *CSharp*, *Delphi*, *J#*, *IronPython*, итд.). Такође, у *Rhinoceros* су као модули интегрисани класични едитор *RhinoScript*®, који проширује основни *Microsoft Visual Basic* програмски језик на начин да се користе ресурси *Rhinoceros*-а и визуелни програмски језик *Grasshopper*®⁸². Ови модули омогућавају да кодови у њима написани имају приступ *Rhinoceros*-у, библиотекама које су у основи *Rhinoceros*-а и осталим *plugin*-овима.

Иако је првобитно разматрана могућност да се за писање *MorphoGen* кода искористи *RhinoScript*®, све распрострањенија употреба графичког параметрског едитора *Grasshopper*® у области архитектуре, пре свега захваљујући томе што омогућава интуитивна истраживања форме, као и значајна заједница окупљена око овог алата, одредили су да се за код искористи овај приступ. У прилог овој одлуци је и чињеница да је од верзије *Rhinoceros 6.0 Grasshopper* постао стандардни алат.

⁸¹Оригинално морфоген (*morphogen*) представља супстанцу која управља процесима морфогенезе у природи (нпр. образцем развоја или ћелијском диференцијацијом).

⁸²Прва верзија *Grasshopper*-а појавила се 2007. године под називом *Explicit History*. Његова првобитна намена је за производњу генеративних алгоритама у уметностима. Велики број *Grasshopper* компоненти служи за креирање 3D геометрије, међутим програм може садржати и друге типове алгоритама укључујући нумеричке, текстуалне, аудио-визуелне, и др.

3.2.2.1 Прототип програмског модула

Алгоритам предложене процедуре имплементиран је као *Grasshopper* дефиниција у којој еволуциона компонента управља интеракцијом између компонената које дефинишу геометријски модел и компоненте која представља солвер за NURBS засновану IGA којим се врши евалуација структуралног понашања. Манипулацијом параметрима геометријског модела алгоритам производи варијантна формалних решења, чије се структуралне перформансе потом процењују изогеометријском анализом, која је основ за селекцију решења, односно продукцију нове популације помоћу оператора репродукције и мутације. Потребно је нагласити да се делови еволуционог процеса одвијају у окружењу 3D програма за моделовање, као и да су сва решења приказана помоћу *Rhinoceros*®, односно да је пројектанту омогућено да користи познате геометријске алате (CAD). На овај начин је и у смислу имплементација алгоритма обезбеђена интеграција процеса дизајна и анализе.

Имплементација изогеометријске анализе реализована је коришћењем *Grasshopper C#* компоненте. У складу са карактером главног интерфејса, који заправо представља едитор заснован на чворовима (*node-based editor*), IGA компонента има улазне и излазне податке. Улазни подаци IGA компоненте подразумевају информације о NURBS структури, а то су подаци о генералисаним координатама NURBS површи, подаци о материјалу који се дефинишу локално као константе, сопствено оптерећење изражено еквивалентним контролним силама, док је излазни податак вредност померања.

Комплетна NURBS структура се имплементира као структура података која се састоји од скупа елемената са додатним информацијама. Структура података елемента дефинише се тако да садржи геометријску спецификацију површинског елемента заједно са физичким карактеристикама. Структура елемената укључује одговарајуће компоненте глобалног вектора P (контролних тачака и тежина). Суседни елементи ће делити неке генералисане координате. Такође сваком елементу се додељује матрица крутости елемента, а величине неопходне за израчунавање тих матрица укључују се у структуру података елемената.

3.2.2.2 Функционални тестови применом на референтним површима

У циљу провере алгоритма спроведена су три функционална теста. Предмет тестова су структуре чија су геометрије описана помоћу:

- правоизводних билинеарних површи,
- трансляторних површи и
- ротационих површи.

Критеријум евалуације у функционалним тестовима је минимизирање максималног померања целе структуре. Одабрани критеријум омогућава откривање локалних и глобалних слабости, а максимална вертикална померања представљају погодан параметар за процену локалног механичког понашања површинског конструктивног система. Што су мања померања веће је крутост, тј. боље су перформансе облика. Анализа је спроведена изогеометријским елементима љуске.

Параметри материјала усвојени у примерима дати су табелом 3.2.2.

Табела 3.2.2 Примењени параметри материјала у функционалним тестовима

параметар	вредност
Јангов модул еластичности	$E = 3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
Поасонов коефицијент	$\nu = 0.2$
Запреминска маса	$\rho = 2549.29 \text{ kg/m}^3$

Параметри генетског алгоритма коришћени у функционалним тестовима приказани су табелом 3.2.3. Проенти укрштање и мутација преузете су из референтне литературе [Mit98]. Најбољи облик у свакој генерацији сматра се елитном јединком и директно се преузима како би се спречила било каква генетска модификација хромозома. Због времена потребног за извођење прорачуна величина популације је лимитирана.

Табела 3.2.3 Примењени параметри генетског алгоритма у функционалним тестовима

параметар	вредност
број генерација	20
величина популације	20
број елитних јединки	1
дводимензионално укрштање /%/	75
мутација /%/	5
опadaње домена у свакој итерацији /%/	0

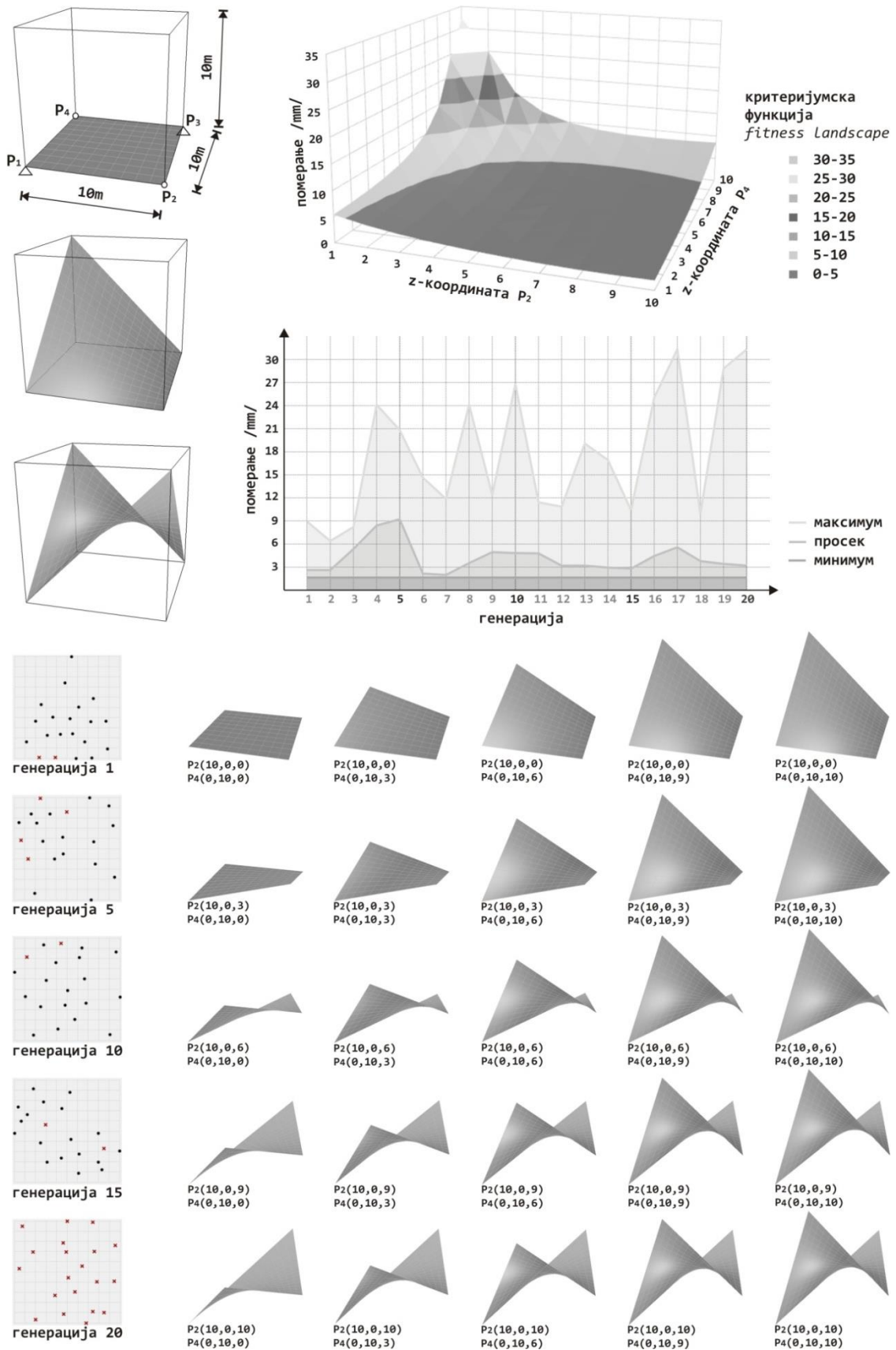
Функционални тест 1 спроведен је на љусци четвороугаоног облика која има квадратну пројекцију основе. Задатак је одређивање вертикалне позиције две међусобно дијагонално постављене крајње интерполационе контролне тачке површи P_2 и P_4 . Циљ је проналажење облика структуре максималне крутости у оквирима задатих ограничења.

Геометрија система репрезентована је помоћу NURBS параметрске површи генерисане помоћу четири крајње интерполационе тачке P_1 , P_2 , P_3 и P_4 . Скуп варијантних форми добија се манипулацијом, померањем тачака P_2 и P_4 у правцу z -координате. Овим манипулацијама могуће је генерисати скуп структура различитих облика, тј. конфигурације између равни и хиперболичног параболоида.

Домен пројектовања (простор претраге) могућих просторних конфигурација представља коцка димензија $10 \times 10 \times 10$ m. Позиција тачака $P_1(0, 0, 0)$ и $P_3(10, 10, 0)$ је дефинисана и фиксирана. Варијабле су z -координате тачака $P_2(10, 0, Z_2)$ и $P_4(0, 10, Z_4)$. Опсег варијабилности вертикалних позиција контролних тачака P_2 и P_4 је од 0 до 10 m. Дакле, простор претраге у случају овог теста је дводимензионалан.

Гранични услови. Љуска је ослоњена у четири крајње тачке P_1 , P_2 , P_3 и P_4 , од којих је вредност z -координате две тачке P_2 и P_4 . Љуска је оптерећена сопственом тежином. Претпостављена дебљина љуске је 10cm.

Резултати су сумирани сликом 3.2.4. На слици су приказани домен, варијабле пројектовања и карактеристичне конфигурације. Затим критеријумска функција (*fitness landscape*) и графикон којим су илустроване минималне, просечне и максималне вредности померања структуре у свакој генерацији. Такође илустрован је и део скупа варијантних формалних решења генерисан променом вредности варијабле у оквиру дефинисаног опсега. Обликовно, варијантна решења су у опсегу између равни и негативно двоструко закривљене површи. Услед једноставности проблема оптимална конфигурација (хиперболични параболоид) пронађена је већ у првој генерацији.



Слика 3.2.4 Резултати функционалног теста 1

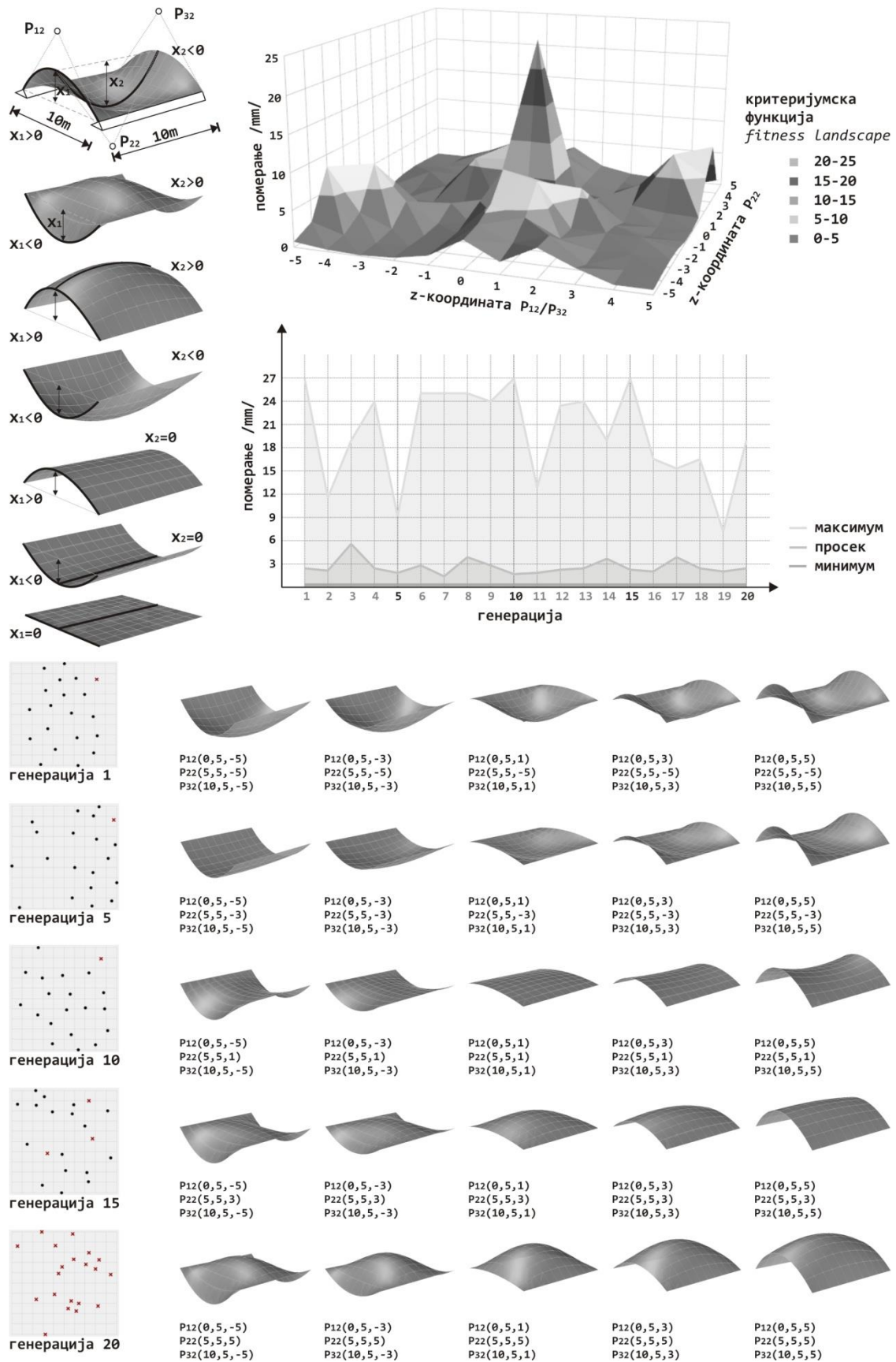
Функционални тест 2 спроведен је на љусци четвороугаоне правоугаоне пројекције основе димензија 10 x 10 m, која је ослоњена дуж две наспрамне праве ивице. Површ је генерисана помоћу две ортогоналне пресечне криве - параболе, а за пројектне варијабле усвојене су контролне тачке P_{12} , P_{32} и P_{22} које утичу на њихове висине x_1 , односно x_2 . Задатак је одређивање оптималног облика.

Геометрија система репрезентована је помоћу NURBS параметрске површи чије су две ивице ослоњене на праве, а друге две ивице параболе. Због оваквих контура висине попречних параболола смањују се од врха ка ивицама. Ивичне параболе и средишња параболола дефинисане су помоћу три контролне тачке, од којих је омогућено варирање z -координате тачака P_{12} и P_{32} , односно P_{22} у опсегу од -5 до +5 m. Варирањем положаја ових контролних тачака могуће је добити следеће карактеристичне конфигурације: потпуно равну површ, позитивно и негативно двоструко закривљену површ и површ нулте закривљености.

Домен пројектовања (простор претраге) дефинисан је у релацији са варијаблима P_{12} , P_{32} и P_{22} . Једна варијабла је z -координата тачака $P_{12}(0, 5, Z_{12})$ и $P_{32}(10, 5, Z_{32})$, $Z_{12} = Z_{32}$, а друга z -координата тачке $P_{22}(5, 5, Z_{22})$. Домен параметра креће се у опсегу од -5m до +5m. Простор претраге у случају овог проблема је дводимензионалан и може се представити као мрежа вредности -5 до +5 у x и y оси (слика 3.2.5).

Гранични услови. Љуска је ослоњена дуж две праве ивице и оптерећена сопственом тежином. Претпостављена дебљина љуске је 10cm.

Резултати су сумирани сликом 3.2.5. На слици су приказани домен, пројектне варијабле и карактеристичне конфигурације. Затим критеријумска функција (*fitness landscape*) и графикон којим су илустроване минималне, просечне и максималне вредности померања структуре у свакој генерацији. Такође илустрован је део скупа варијантних формалних решења генерисан променом вредности варијабле у оквиру дефинисаног опсега. Обликовно, варијантна решења су у опсегу између негативно двоструко закривљене површи, равни, позитивно двоструко закривљене површи. У овакво дефинисаној поставци оптимална конфигурација одговара негативно двоструко закривљеној површи, а услед једноставности проблема пронађена је већ у првој генерацији.



Слика 3.2.5 Резултати функционалног теста 2

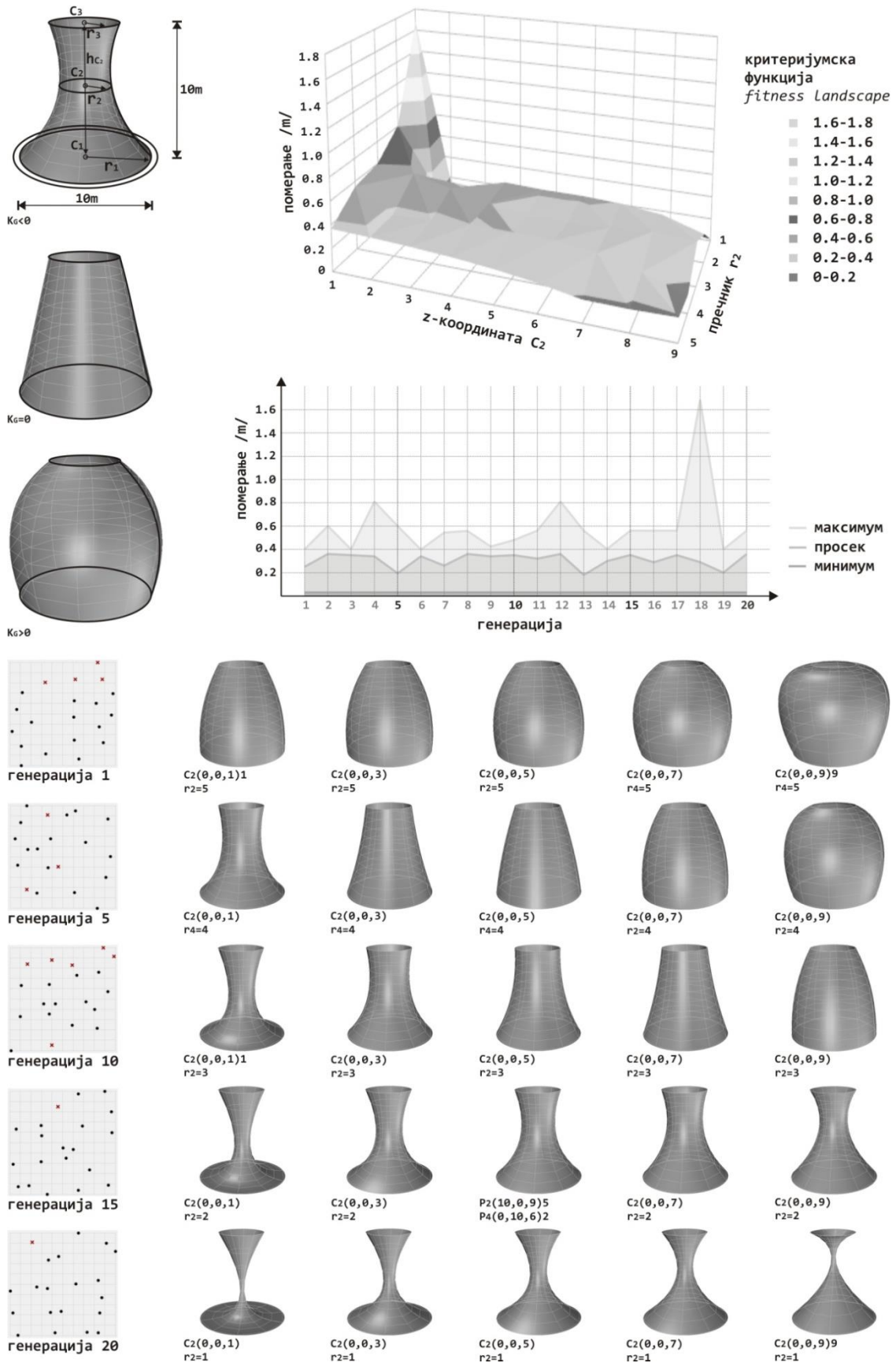
Функционални тест 3 спроведен је на ротационој љусци која има кружну пројекцију основе пречника 10m и висину 10m. Љуска је ослоњена дуж кружне ивице основе. Као пројектне варијабле усвојена су два параметра који контролишу облик површи - центар C_2 и пречник r_2 средње кружнице. Задатак је одређивање оптималне конфигурације површи.

Геометрија система репрезентована је помоћу NURBS параметрске површи генерисане ротацијом генератрисе око z -осе. Површ је дефинисана помоћу три кружнице - кружнице основе чији је центар тачка $C_1(0,0,0)$, а пречник $r_1 = 10m$, горње кружнице чији је центар тачка $C_3(0,0,10)$, а пречник $r_3 = 5m$, и средишње кружнице код које је позиција центра C_2 одређена $x = 0$ и $y = 0$ координатанма док z -координата врира, пречник средишње кружнице r_2 такође варира. Варирањем наведена два параметра, позиције центра и пречника кружнице могуће је добити спектар површи у коме су три карактеристичне конфигурације у зависности од тога да ли су генератрисе криве или праве: негативно двоструко закривљена површ, површ нулте закривљености и позитивно двоструко закривљена површ.

Домен пројектовања (простор претраге) дефинисан је у релацији са варијаблама - центром C_2 и пречником r_2 средње кружнице. Опсег првог параметра C_2 је од 1 до 9, а другог параметра r_2 од 1 до 5. И у овом случају простор претраге је дводимензионалан и може се представити као мрежа вредности од 1 до 9 у x -оси и од 1 до 5 у y -оси.

Гранични услови. Љуска је ослоњена дуж доње, базне кружнице и оптерећена сопственом тежином. Претпостављена дебљина љуске је 10cm.

Резултати су сумирани сликом 3.2.6. Слика су приказани домен, пројектне варијабле и карактеристичне конфигурације. Затим, критеријумска функција (*fitness landscape*) и графикон који илуструје минималне, просечне и максималне вредности померања структуре у свакој генерацији. Такође приказан је део генерисаног скупа варијантних формалних решења. Варијантна решења су у опсегу између негативно двоструко, једноструко и позитивно двоструко закривљене површи. Оптимална кофигурација одговара негативно двоструко закривљеној површи, а пронађена је у првој генерацији.



Слика 3.2.6 Резултати Функционалног теста 3

3.3 Примена

Актуелне генеративне методе које се спроводе употребом дигитални технологија нуде бројне могућности за проналажења различитих типологија структура које отпорност остварују обликом (*shape resistance*). Иако је већина дигиталних алата који се користе за њихово пројектовање превасходно намењена процесу инжењерског пројектовања, захваљујући развоју одређеног броја програма и програмских модула који омогућавају истраживања у раним фазама процеса пројектовања структуралне форме постају све чешће део архитектонског вокабулара. Дигитални алати намењени и прилагођени раним фазама процеса архитектонског пројектовања на изванредан начин представљају екстензију концептуалног размишљања. Без обзира што су резултати који се производе апроксимативни, корист њихове примене је вишеструка, уз напомену да су у фазама развоја пројектних решења неопходна даља унапређења форме и перформанси иницијалних предлога у колаборацији са инжењерима.

Начелно, циљ генеративних процеса је проналажење облика површинског система за одређене функционалне захтеве који испуњавају читав низ услова почевши од граничних услова, услова наметнутих особинама примењених материјала, ограничења напона и померања, услова да се обезбеди хомогено мембранско стање напона, економских и естетских услова, итд. Међусобна опречност одређених услова намеће потребу за компромисима, а упркос ограничењима која управљају процесом пројектовања површинских конструктивних система, постоји довољно слободе за пројектантски израз. Штавише ограничења је могуће инструметализовати у пројектантске потенцијале. У сваком случају јасно дефинисање услова, ограничења и приоритета од велике је важности за процес пројектовања.

Тражење форме насупрот унапређењу форме (*form-finding versus form-improving*) се у оквирима овог рада поставља у релацији са дефинисањем адекватног домена варијабли пројектовања, што је фундаментални и иницијални задатак генеративног процеса. Морфогенетски процес у великој мери зависи од дефиниције домена у оквирима кога се тражи решење односно од дефинисања

опсега променљивости варијабли. Имајући у виду да се ради о неконвенционалном процесу пројектовања, чији су резултат решења настала применом генеративних система, на његовом почетку нема јасне идеје о форми (дефинисаног иницијалног облика), већ се дефинишу ограничења и услови које је потребно да форма задовољи.

Начелно, у проблемима тражења оптималних решења, варијабле су ограничене на опсег са нижим, вишим и средњим вредностима. У основи принципа по коме ради генетског алгорита је чињеница да он имплицитно одабира (*sample*) хиперпростор⁸³. У том смислу се уводи и појам дела хиперпростора - потпростор, партиција или подскуп хиперпростора. У истом значењу се користи и термин хиперраван. Ако је хиперпростор n -димензионалан, онда хиперраван може имати највише $n - 1$ димензија. У општем случају домен представља n -димензионалну хиперкоцку, која у случају када варијабле престављају локацију тачака у тродимензионалном простору постаје коцка у оквиру које се налазе (*bounding box*) могући облици.

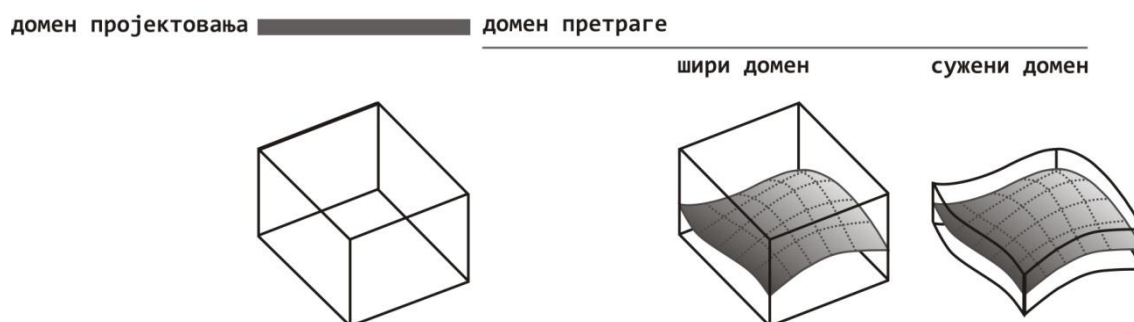
У оквирима овог рада разматраћемо према [Pug09] два могућа случаја:

- широко постављен домен претраге и
- сужен домен.

У првом случају, домен претраге идентичан је домену пројектовања (слика 3.3.1), а генетском алгоритму оставља се могућност да, у постављеним оквирима, генерише форме које нису у релацији са његовим обликом. С обзиром да алгоритам генерише скуп потенцијално интересантних субоптималних решења која се уклапају у задата ограничења, у оваквом процесу има простора за неочекиване резултате, а анализа добијених решења може да допринесе разумевању релација између форме и структуре. Сужавањем домена претраге, тачке дефинисане средњим вредностима формирају средњу површ, која је заправо слична иницијалном облику код оптимизационих процеса, а финални резултат ће бити релативно близак тој конфигурацији (слика 3.3.1). Дакле, усвајањем малог опсега финални облик је детерминисан границама домена и може се сматрати за унапређену верзију првог покушаја која има оптимизовано механичко понашање.

⁸³Хиперпростор је n -димензионални простор.

У овом случају дефиниција домена представља важан део процеса пројектовања, који у том смислу полазећи од задатог домена пројектовања подразумева корак дефинисања суженог домена претраге, на основу резултата грубог процеса тражења форме применом аналогних или дигиталних технологија, и корак унапређења форме.



Слика 3.3.1 Дефиниција домена пројектовања и домена претраге

У наставку рада биће приказана два експериментална пројекта од којих први пројекат илуструје процес проналажења форме (*form-finding*) крутих површинских система - љуски, док се други пројекат обрађа проблему унапређења форме (*form-improving*) у случају мембранских структура. Ова оперативна истраживања - архитектонске студије случаја спроведене су у циљу демонстрације могућности употребе развијене методе и алата у процесу пројектовања.

3.3.1 Прилог концепту тражења форме (*form-finding*)

Прилог концепту тражења форме тестиран је на случају крутог, континуалног површинског, конструктивнх система. Морфогенетска процедура је спроведена за широко постављен домен претраге. У симулацијама је коришћен деформабилни модел NURBS површи. При деформацији средње површи љуске врше се померања појединих делова или целе површи, као и локалне деформације површи, при чему промена кривине средње површи представља њену доминантну деформацију. Деформисањем љуске у оквиру задатог домена омогућило је добијање скупа варијантних формалних решења, чија ефикасност је евалуирана анализом структуралног понашања.

3.3.1.1 Дефиниција генеративне процедуре за тражење форме

Генеративна процедура за тражење форме представља итеративни поступак којим управља посебно развијени генетски алгоритам. Сходно општој дефиницији процедуре изогеометријске морфогенезе датој у поглављу 3.1.1.2, процес започиње задавањем домена, граничних услова пројектног проблема и варијабле, наставља се евалуацијом генерисаних формалних решења, и у зависности од исхода, селекцијом најбољих јединки, генерисањем нове генерације и понављањем поступака евалуације, селекције и генерисања до постизања резултата или задати број пута.

Генеративну процедуру могуће је приказати на следећи начин:

- **Фаза 1.** *Иницијализација* у којој се дефинишу ограничења геометрије, варијабле и њихов опсег и гранични услови, што је услов за генерисање прве популације форми скупа NURBS површи који садржи задати број јединки.
- **Фаза 2.** *Евалуација* подразумева оцену перформанси сваке јединке - материјалне површи (NURBS структуре), а заснована је на изогеометријској анализи. Критеријум евалуације је минимум максималног померања.
- **Фаза 3.** *Генерисање нове популације* реализује се помоћу генетских оператора селекције, укрштања и мутације. Селекцијом се, како је претходно приказано, врши одабир најбољих јединки, а операторима укрштања и мутације врши се размена информација и остварују варијације.

Евалуација, селекција, укрштање и мутација се понављају задати број итерација, а уколико се у оквиру њих не пронађе формално решење које задовољава критеријум поступак се понавља.

Иницијализација представља фазу у којој се конструише домен претрега, односно у којој се параметраски дефинише геометрија, пројектне варијабле, гранични и прелазни услови, оптерећење, параметри материјала и генерише прва популација.

Конструисање домена пројектног решења подразумева дефинисање ограниченог тродимензионалног простора у оквиру кога се искључиво траже могуће решења.

Параметарска дефиниција геометрије подразумева дефиницију контролне мреже NURBS површи димензија $n \times m$ у оквирима задатог домена.

Пројектне веријабле су одређене контролне тачке контролне мреже NURBS површи. Кинематичким манипулацијама које се спроводе на контролној мрежи добијају се варијантне форме.

Дефинисање граничних и прелазних услова подразумева задавање глобалних и локалних геометријских ограничења. Гранични услови подразумевају ослободу, прелазни услови међуослободу, а дефинишу се спречавањем слободе кретања.

Резултат фазе иницијализације је насумично генерисана популација која садржи одређени (задати) број јединки.

Евалуација подразумева спровођење изогеометријске анализе како би се дијагностификовале перформансе генерисаних структура. Анализа се спроводи за задате вредности материјалних параметара.

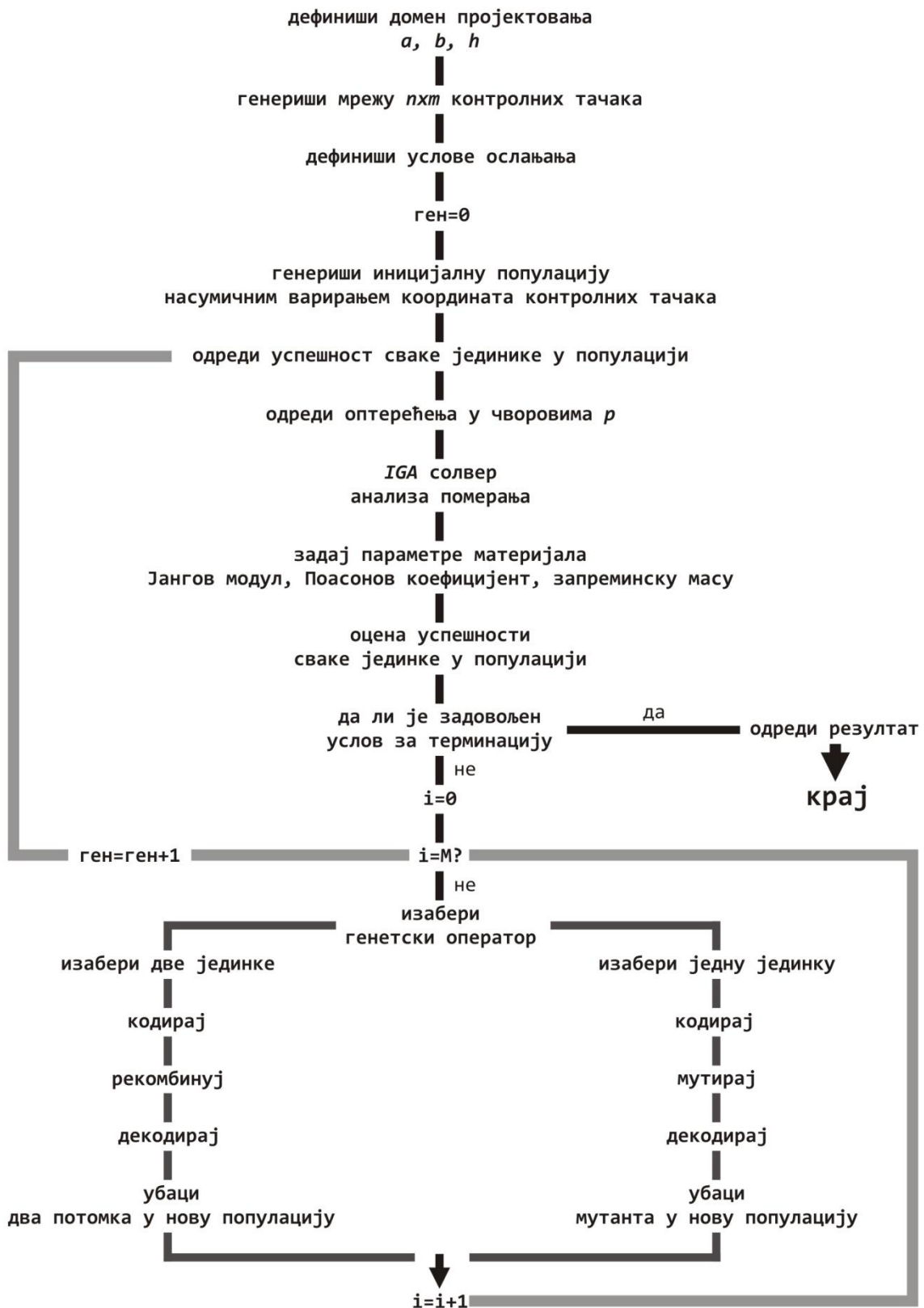
Одређивање (чворног) оптерећења подразумева моделовање сопствене тежине. Друга оптерећења која би начелно могла бити укључени у процес моделовања нису разматрани овим радом. Изогеометријска парадигма и дискретни карактер контролне мреже имплицирао је одабир дискретног моделовања сопственог оптерећења, које се дистрибуира у контролним тачкама као вертикална сила која интензитетом замењује припадајућу површину.

Терминациони критеријум представља проналажење форме која има минимум максималног померања. Уколико постоји јединка која одговара критеријуму алгоритам се прекида, у супротном прелази се на наредну фазу.

Генерисање нове популације врши се помоћу генетских оператора селекције, укрштања и мутације.

Еволуциона процедура, односно селекција, укрштање и мутација понављају се све до постизања одређеног задовољавајућег формалног решења, тј. до приближавања решењу или се заустављају након одређеног ограниченог броја генерација због времена које је потребно.

Дијаграм на слици 3.3.2 описује ток процедуре:

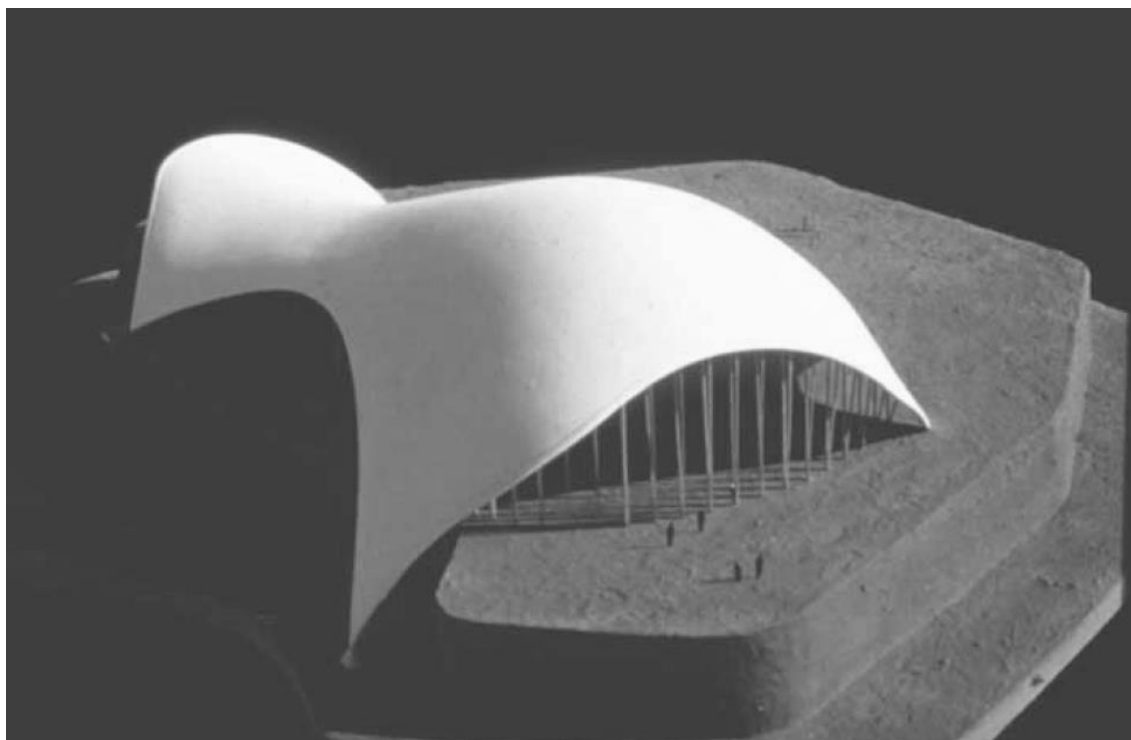


Слика 3.3.2 Дијаграм генеративне процедуре тражења форме

3.3.1.2 Студија случаја: генерисање форме љуске

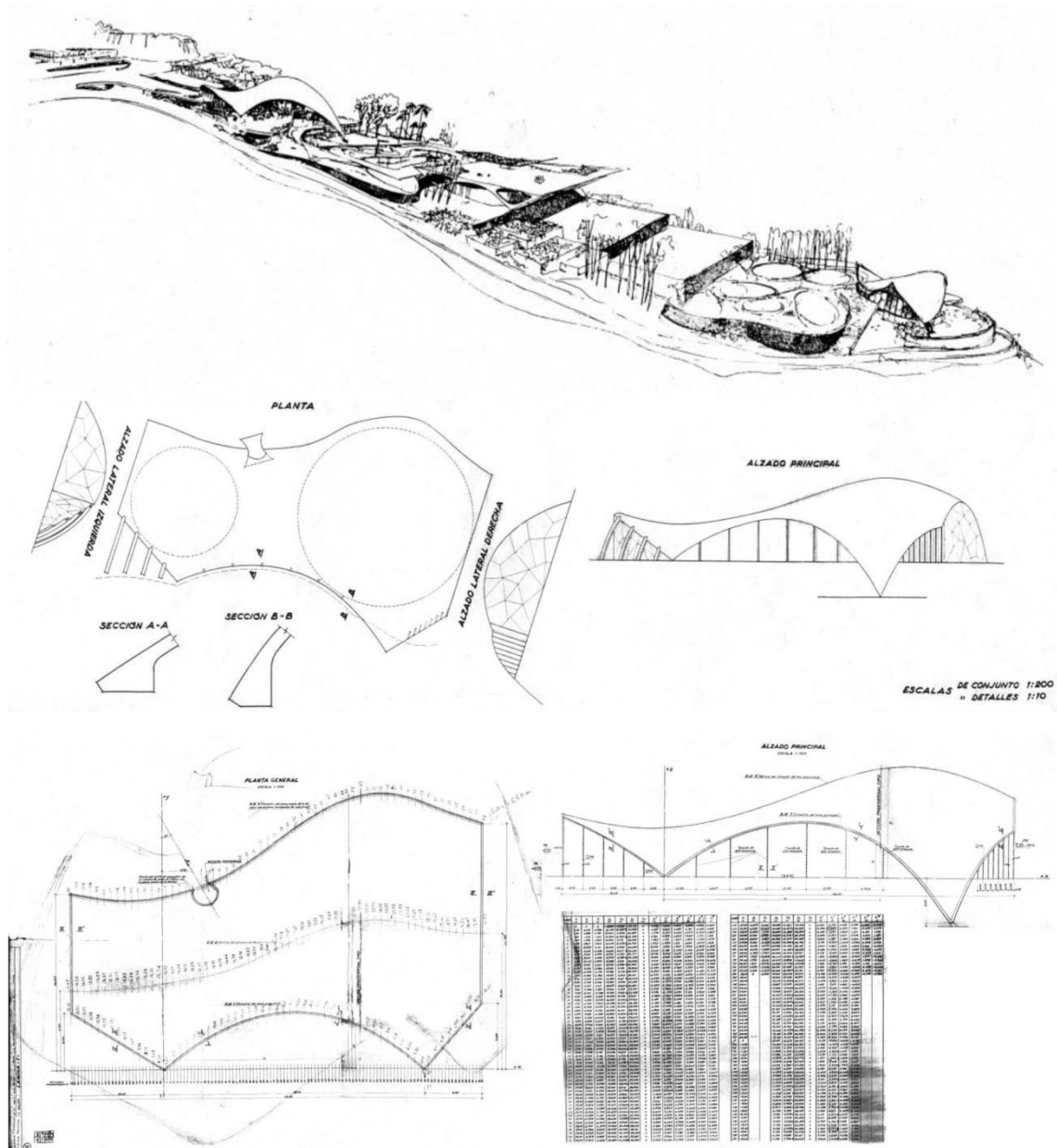
У циљу провере могућности примене алгоритма дефинисаног поглављем 3.3.1.1 у процесу пројектовања, разматрана је могућност генерисања крова неизграђеног објекта спортског клуба *Táchira*, Каракас, Венецуела, из 1957. године (Слика 3.3.3). Кров објекта, који је предмет експеримента, пројектован је као танка армирано бетонска љуска у сарадњи венецуеланског архитекта Виваса (Vivas) и шпанског инжењера Торохе (Торгоја). Карактеристике одабраног објекта чине га репрезентативни за испитивање како изогеометријска морфогенеза може унапредити процес архитектонског пројектовања.

Пројектни задатак је имплементација ИГМ процедуре у поступку генерисања крова слободне форме. У оригиналном пројекту проблем крутости решен је тражењем адекватног формалног решења применом технике изрде физичких модела. У овом случају ИГМ примењена је за тражење оптимлане форме и продукцију варијанатних решења. Просторни концепт објекта заснован је на закривљеном крову слободне форме који сугерише *марамичу која је спуштана или закривљену контуру скулптуре тела* [Esc05]. Кров је ослоњен на терен, а денivelација осланаца последица је конфигурације терена и садржаја.



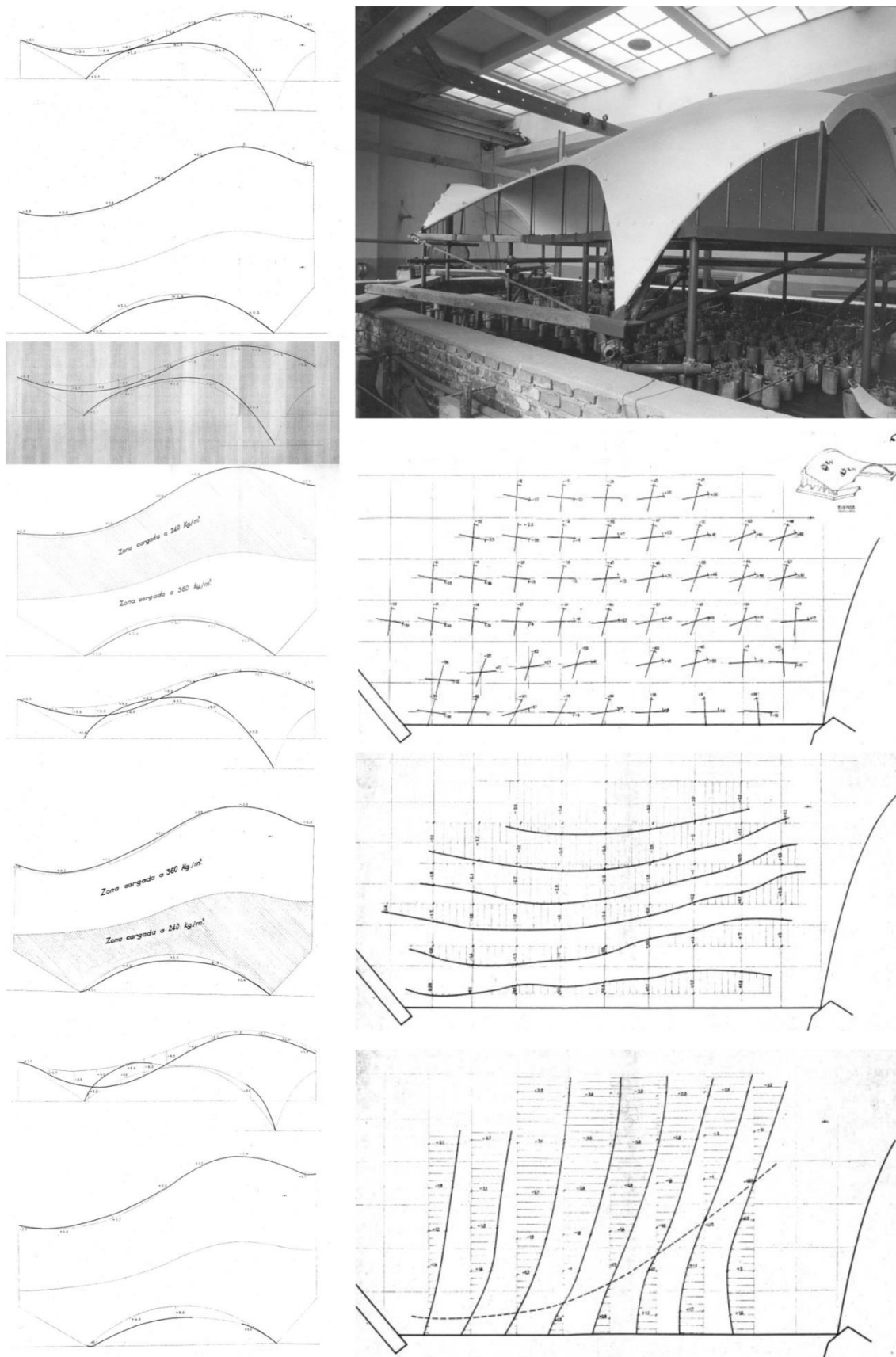
Слика 3.3.3 Макета крова клуба *Táchira*, Каракас, Венецуела, 1957. [Esc05]

Процес пројектовања оригиналног решења, конвенционално, инициран је израдом скица које приказују основну идеју, а затим њеном разрадом, дефинисањем комплексног просторног облика (слика 3.3.4). Предложено пројектно решење резултат је колаборације архитекте и инжењера од иницијације процеса пројектовања која је неопходна у случају оваквог неконвенционалног пројектног задатка.



Слика 3.3.4 Идејна скица комплекса и извод из техничке документације за пројекат предметног објекта спортског клуба *Táchira* [Esc05]

Поступак тражења форме приказан је сликом 3.3.5.

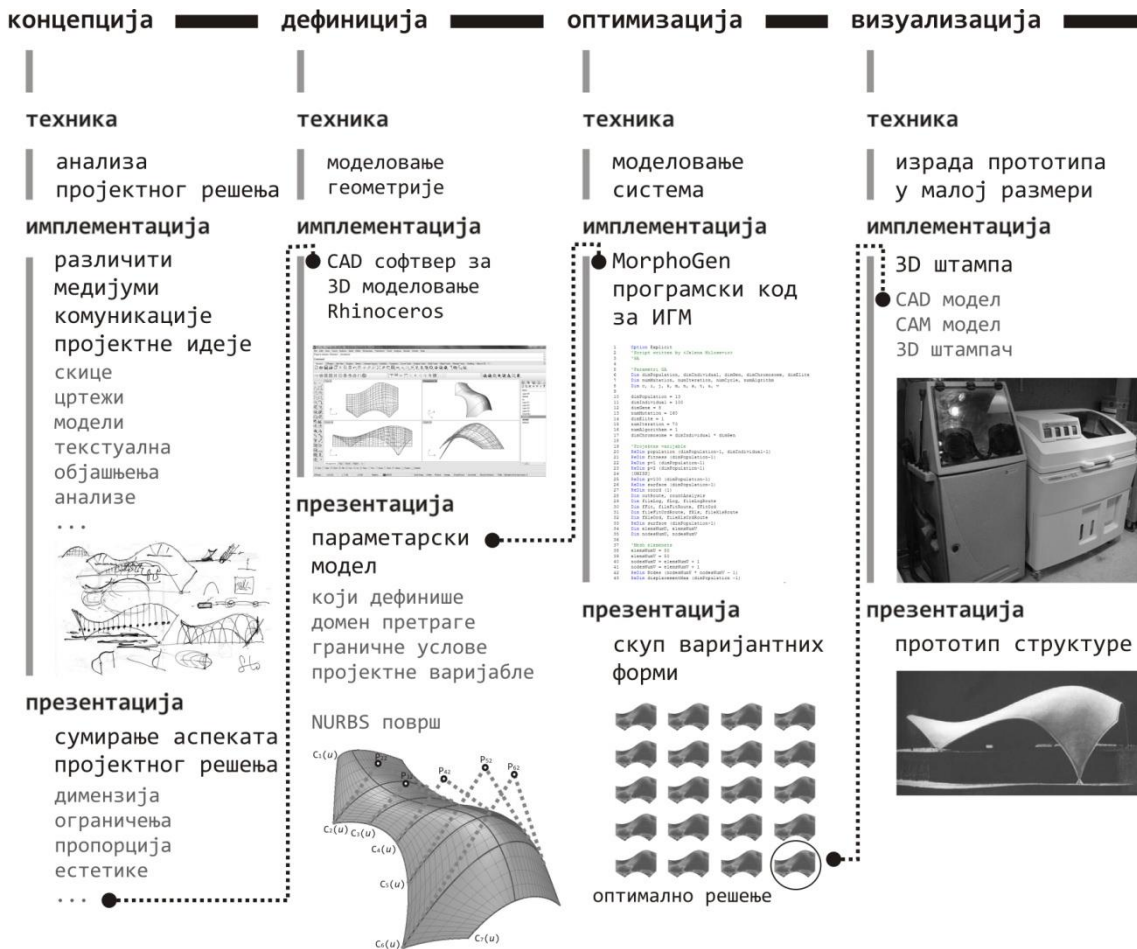


Слика 3.3.5 Процес тражења форме крова клуба *Táchira* који је спровео Тороха [Esc05]

Кров спортског клуба *Táchira* представља љуску слободне форме, дебљине 10cm димензија основе 40 x 60 m. Пројектно решење поседује одређену геометријску правилност. Геометријски кров је одређен кривама директрисом - синусоидном кривом и генератрисама параболичним кривама, што је приказано у [Esc05]. Облик крова резултат је процеса тражења форме. Егзактна моделска испитивања, спроведена су на физичком моделу израђеном од армираног малтера у размери 1:12. Експериментална поставка подразумевала је дефинисање граничних услова (ослонаца) и оптерећење структуре. У том смислу, параболичне криве заправо представљају функцију оптерећења љуске. Резултат је мембрански напрегнута равнотежна форма. Имајући у виду димензије објекта, пројектни задатак и резултујуће решење, кров спортског клуба *Táchira* један је од Торохиних накомплекснијих пројеката.

Задатак овог пројектног експеримента је трежење оптимлане форме коришћењем нових алата, својеврсно реплицирање процеса у функцији тренутно доступне технологије.

Процес пројектовања примењен у овом експерименту састоји се од четири фазе (слика 3.3.6). У првој фази задатак је био анализа референтног пројектног решења, како би се сагледали најзначајнији аспекти који ће бити уграђени у дефиницију - димензије објекта, положај и висине ослонаца, карактеристичан ефекат таласа, итд. Претходни аспекти су у следећој фази инструметализовани у информације за продукцију пројектног решења, тј. за дефинисање домена пројектовања, пројектних варијабли и њиховог опсега, и граничних услова. У овом експерименту дефинисан је шири домен претраге. Након дефиниције релевантних архитектонских аспеката пројектног решења помоћу параметрског модела уследила је фаза развоја решења. У овој фази генетском алгоритму омогућено је тражење варијантних геометријских система, односно продукција скупа облика који еволуирају у правцу дефинисаног критеријума оптимизације структуралних перформенси. Последња фаза подразумева визуелизацију решења израдом прототипа у малој размери. Насупрот оригиналног конвенционалног процеса који се ослањао на коришћење мануалних техника, процес изогеометријске морфогенезе у овом експерименту реализован је коришћењем дигиталних медијума за тражење форме.

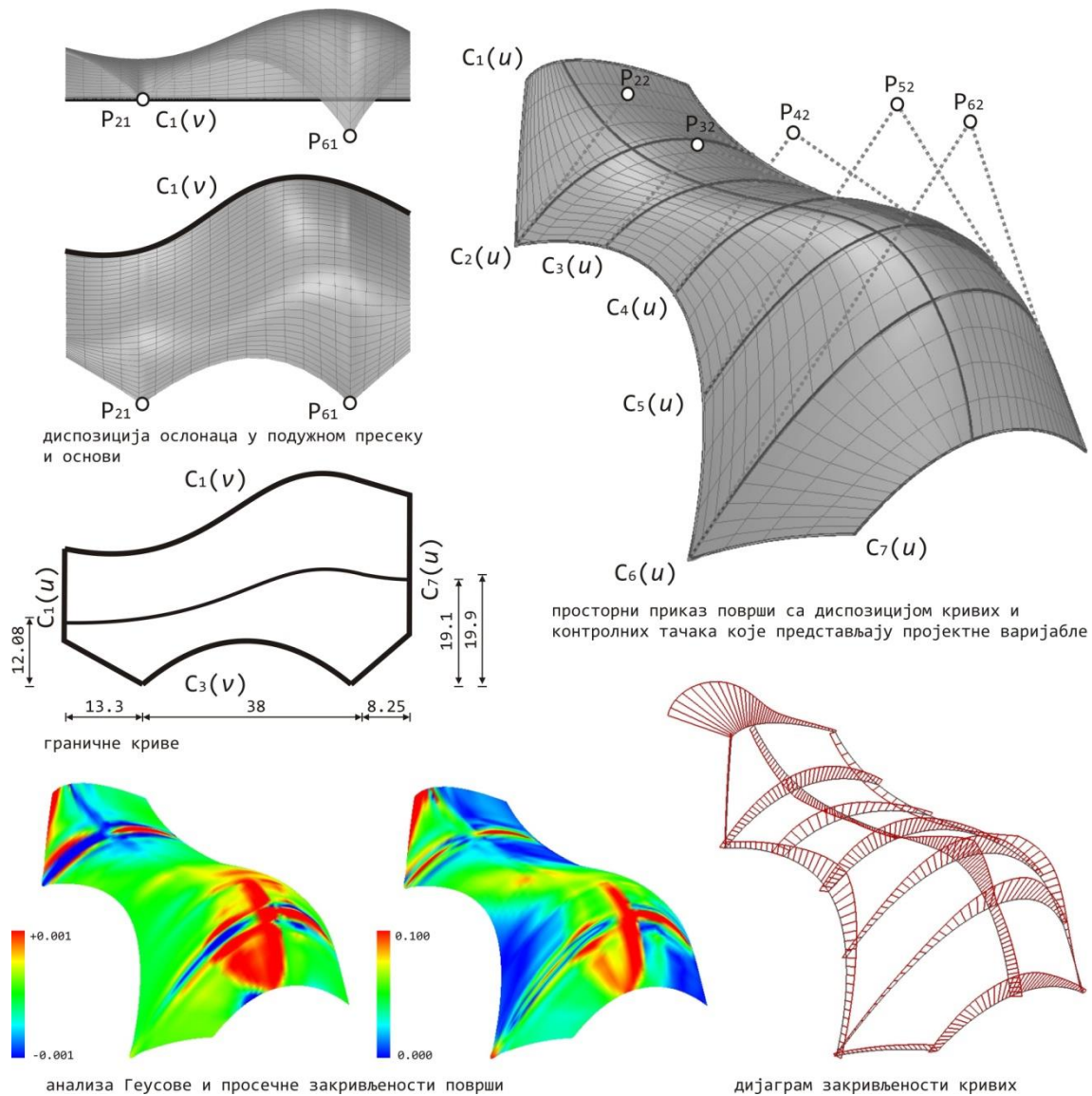


Слика 3.3.6 Дијаграмски приказ процеса проналажења форме љуске

Параметрска дефиниција у случају ове студије, реализована је геометријском репрезентацијом крова спртског центра помоћу NURBS површи трећег степена. Претходно омогућава модификацију облика (продукцију варијантних форми) директним деловањем на контролне тачке. Генерисање двопараметрске NURBS површи реализовано је дефинисањем мреже NURBS кривих, и то шест параболичних кривих у u и три криве слободне форме у v правцу.

Основа објекта неправилног је облика, дефинисана помоћу четири ивичне криве. Геометрија ивичних кривих је непроменљива, тј. представља фиксни параметар у процесу генерисања. С друге стране, облик параболичних кривих је променљив $C_2(u)$, $C_3(u)$, $C_4(u)$, $C_5(u)$ и $C_6(u)$. Вертикалне координате контролних тачака ових кривих представљају степене слободе. С обзиром да смо као варијабле усвојили пет контролних тачака, може се закључити да је домен решења (простора претраге) петодиманзионалан. Усвајањем већег броја варијабли је

могуће, међутим осим повећања времена неопходног за прорачун, потенцијално би узроковало генерисања решења која су удањена од оригиналног концепта. На слици 3.3.7 приказана је геометрија површинског система описана помоћу NURBS површи, као и диспозиција кривих и контролних тачака које представљају ослонце и пројектне варијабле.



Слика 3.3.7 Експериментални пројекат 1 - геометрија површинског система репрезентована помоћу NURBS површи, гранични услови и пројектне варијабле

Дефинисање пројектних варијабли представља круцијални део генеративног процеса. Параболичне криве, које у овој поставци представљају пројектне варијабле $C_2(u)$, $C_3(u)$, $C_4(u)$, $C_5(u)$ и $C_6(u)$, дефинисане су помоћу три контролне тачке, од којих су две крајње интерполационе, док су средишње контролне тачке

неинтерполционе $P_{22}, P_{32}, P_{42}, P_{52}$ и P_{62} (слика 3.3.7). Ове контролне тачке представљају променљиве, прецизније x и y координате контролних тачака су фиксисране док је померање тачака у правцу z -осе омогућено. У том смислу, може се закључити да форма представља функцију z координате средишњих контролних тачака. Како би се спровела процедура тражења форме дефинисан је опсег варијабилности z координате сваке тачке. Потребно је нагласити да је приликом дефинисања домена - опсега варијабилности z координате контролних тачака вођено рачуна о коректности архитектонске пропорције крова.

Домен решења проблема, или простор претраге, садржи све површи које имају дефинисани облик основе (с обзиром да је кретање контролних тачака у хоризонталној равни онемогућено), док је вертикална позиција сваке контролне тачке дефинисана опсегом вредности. Оваква параметраска дефиниција и опсег варијабилности променљивих замњеују иницијални облик и омогућава формална истраживања.

Гранични услови. Објекат је с једне стране ослоњен дуж граничне криве слободне форме $C_1(v)$, а с друге стране у крајњим тачкама кривих $C_2(u)$ и $C_6(u)$, тј. контролним тачкама P_{21} и P_{61} , у овим тачкама спречена су померања у свим правцима. Потребно је напоменити да се у складу са оригиналним пројектним решењем ослонци налазе на различитим висинама.

Дефинисање оптерећења. Разматран је само случај сопственог оптерећења које је моделовано као концентрисано у чворорвима.

Параметри материјала усвојени у пројектном експерименту дати су табелом 3.3.1.

Табела 3.3.1 Пројектни експеримент 1 - примењени параметри материјала

параметар	вредност
Јангов модул еластичности	$E = 3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
Поасонов коефицијент	$\nu = 0.2$
Запреминска маса	$\rho = 2549.29 \text{ kg/m}^3$

Усвојена дебљина љуске је 10cm.

Евалуација структуралних перформанси. Након абстрактне дефиниције скупа потенцијалних решења, одређена је мера структуралних перформанси која управља процесом оптимизације. Дефиниција функције евалуације има два главна аспекта.

Испитивано је понашање структуре услед утицаја сопственог оптерећења, што представља поједностављен случај. Као мере крутости љуске одабрана је деформација изражена померењима. У алгоритму претреге функција евалуације су максимална померања, вектор који је у овом случају потребно минимизирати. Анализа ове величине омогућава детектовање локалних недостатака структуре.

Конструктивни систем је моделован коришћењем изогеометријских елемената љуске без ротације.

Табелом 3.3.2 сумирани су параметри генетског алгоритма примењеног у овом пројектном експерименту. Број генерација у еволуционом процесу је фиксиран. Величина популације лимитирана је на 20 јединки, од којих је прва у свакој генерацији узета као елитна. Оператор укрштања примењен је 75%, док су генетске мутације које једовремено поспешују диверзитет јединки и производе дегенерације ограничене на 5%.

Табела 3.3.2 Пројектни експеримент 1 - примењени параметри генетског алгоритма

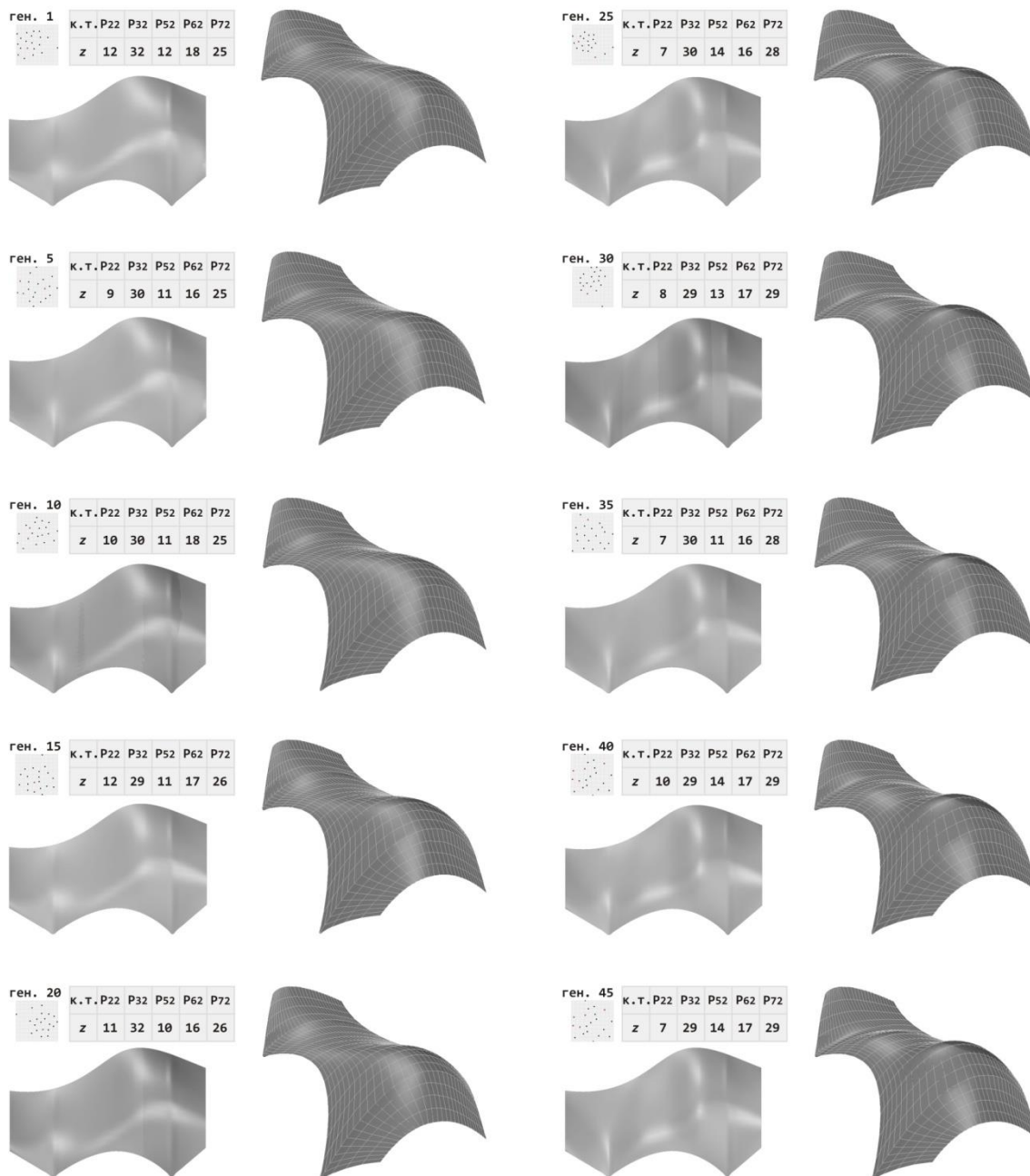
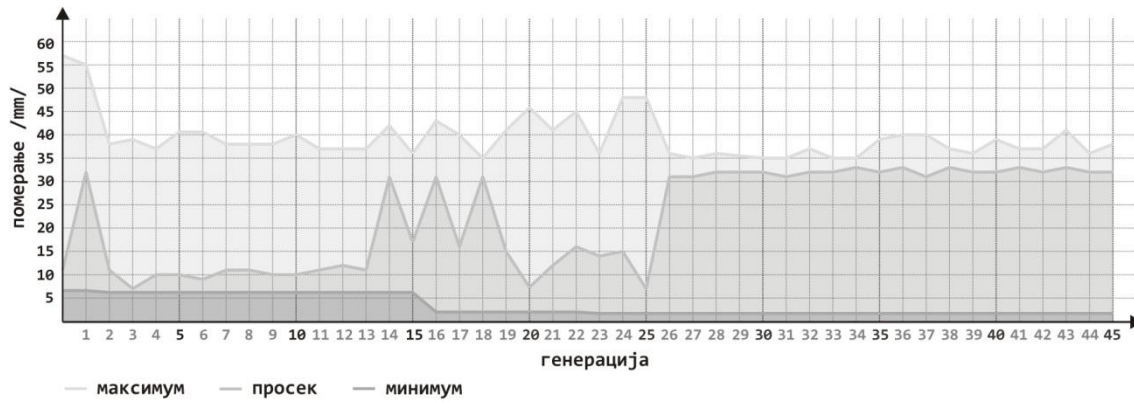
параметар	вредност
број генерација	45
величина популације	20
број елитних јединки	1
укрштање /%/	75
мутација /%/	5
оподање домена у свакој итерацији /%/	0

Имплементација морфогенетске процедуре сумирана је табелом 3.3.3.

Табела 3.3.3 Пројектни експеримент 1 - импламантација процедуре

параметар	спецификација
пројектне варијабле	вертикалне координате мреже контролних тачака
бр. контролних тачака/варијабли	5
домен пројектовања	шири домен
домен решења	Z координате контролне тачке
гранични услови	4 ослонца у крајњим интерполационим тачкама NURBS површи
ограничења	хоризонталне координате NURBS контролних тачака
оптерећење	сопствена тежина
примењени материјал	бетон
критеријум евалуације	минимум максималног померања

Интерпретација резултата. Резултати морфогенетске процедуре сумирани су на слици 3.3.8.



Слика 3.3.8 Експериментални пројекат 1 - приказ резултата процеса морфогенезе

Графиконом су илустроване минималне, просечне и максималне вредности критеријума евалуације у свакој генерацији. Сликама је приказана еволуција структуралне форме помоћу јединки у генерацијама 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 и 45. Овај развој илуструје како се полазећи од облика умерене закривљености у првој генерацији, који карактеришу велика померања долази до површи веће закривљености, односно до постепеног смањења структуралних недостатака. Као што је илустровано сликом 3.3.8, већ од генерације 23 алгоритам конвергира ка једном решењу, унапређујући одређене локалне делове структуре. На крају еволуционог процеса, максимално вертикално померање финалног облика је значајно ниже у односу на померање најбоље јединке у првој генерацији. Конвергенција алгоритма ка субоптималним решењима може се уочити након одређеног броја генерација. Као што је приказано дијаграмом значајно побољшање структуралних перформанси могуће је уочити након одређеног броја генерација. Захваљујући поставци проблема - усвојеним пројектним ограничењима и варијаблама, затим усвојеном рационалном броју варијабли и опсегу варијабилности, решење љуске слободне форме које представља резултат описаног морфогенетског процеса блиско је облику референтног пројекта крова објекта спортског клуба *Táchira*, Каракас, Венецуела, архитекта Виваса и ижењера Торохе.

Визуелизација решења, поред стандардног приступа реализована је и применом технике брзе израде прототипа (*rapid prototyping*- RP). Начелно термин брза израда прототипа користи се да означи адитивни процес, условно речено, брзе производње тродимензионалних физичких објеката, произвољног облика, на основу дигиталног рачунарског модела. Иако је иницијално развијена за област индустријске производње, предности ове технологије и константан развој допринели су њеној распрострањенијој примени у различитим областима. У архитектури се тренутно користи у функцији визуелизације и провере идеја у различитим фазама процеса пројектовања, а претпоставка је да ће у будућности ова технологија имати далеко ширу примену у области грађевинарства [Nes13b].

Начелно свим RP техникама је заједничко да се физички модел конструише прогресивно, додавањем танких слојева материјала (*Layer Manufacturing* - LM) у тзв. процесу адитивне фабрикације (*Additive Fabrication* - AF). Тренутно доступне

технологије се у великој мери разликују у погледу времена потребног за конструкцију прототипа, особина примењених материјала, цене производње, квалитета завршне обраде. У том смислу, избор адекватне технике зависи у првом реду од сврхе израде модела. У случају овог истраживања примењена је техника селективног ласерског сиентровања (*Selective Laser Sintering* - SLS). Разлог одабира ове технологије је у првом реду њена могућност да произведе комплексну геометрију директно на основу података CAD геометријског модела. SLS користи ласер и прах као средства којим синтерује материјал, и креира структуру жељеног просторног облика. У поређењу са традиционалним методама израде макета у архитектури, предност ове технологије је несумњива када су у питању комплексне континуално закривљене форме.

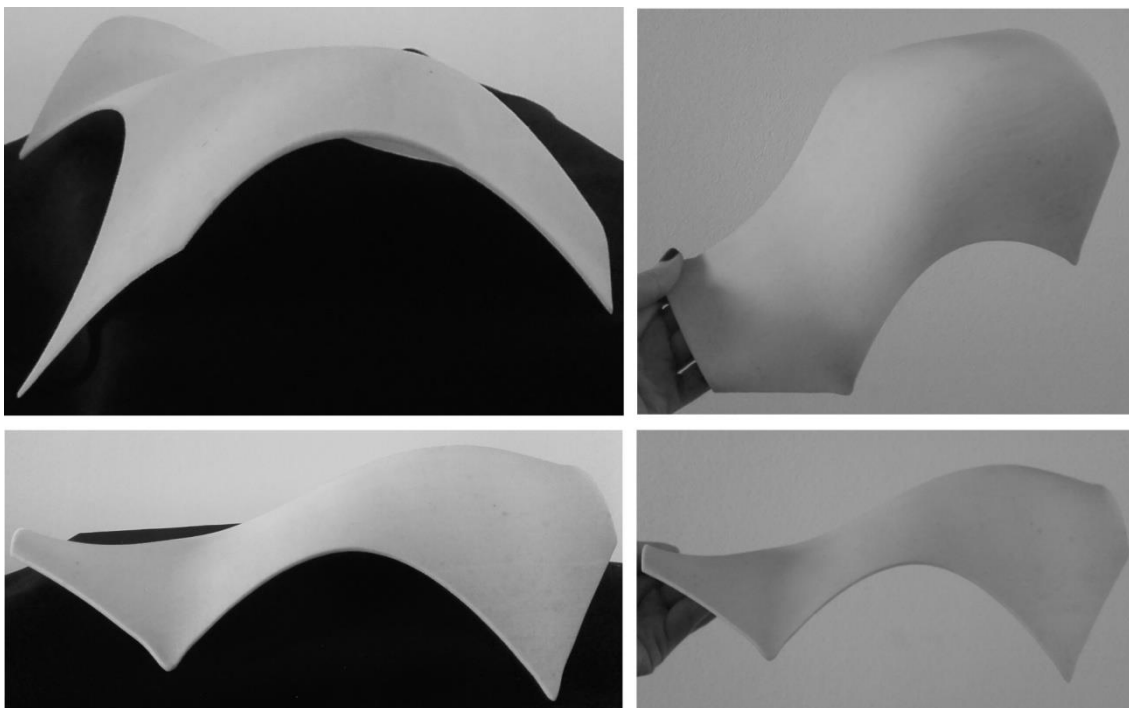
За конструисање прототипа коришћен је уређај *Spectrum ZTM510*, који спада у класу уређаја за производњу функционалних модела високе прецизности. Карактеристике овог уређаја су следеће: (1) брзина израде 2-4 слоја у минути; (2) димензије 254 x 356 x 203 mm; (3) материјал - композит високих перформанси; (4) дебљина једног слоја 0.89-2.03mm; (5) резолуција 600 x 540 dpi. Уређај подржава системски софтвер који подржава геометријске модела у следећим форматима STL, VRML и PLY.

Процес конструкције прототипа одвијао се у следећим фазама:

- Припрема модела, која подразумева конверзију 3D солид модела љуске генерисане помоћу CAD софтвера *Rhinoceros®* у STL фајл формат. Димензије модела су 240 x 140 x 82 mm. Љуски је додељена дебљина од 2mm.
- Подела модела на дводимензионалне паралелне слојеве стандардне дебљине 0.1mm.
- Трансфер модела машини која затим врши прорачуна начина конструисања, тј. одређује најефикаснији начин за штампу модела.
- Трансфер информација о сваком појединачном слоју глави машина, и продукција модела додавањем материјала слој по слој (*layer-by-layer*). Ласер на подлози врши селективно везивање материјала на основу информација тродимензионалног дигиталног модела површи.

- Након што се сваки слој скенира, подлога се спушта за видину једног слоја, а нови слој материјала се полаже преко. Процес се понавља све до завршетка израде модела.

Због особине да се скупља у условима собне температуре и влажности, штампа се модел нешто већих димезија у односу на пројектовани. Током конструкције модел је окружен несинтерованим прахом, због чега нема потребе за додатним ослањањем структуре. Претходно олакшава израду комплексних геометрија попут љуске која је била предмет истраживања (слика 3.3.9).



Слика 3.3.9 Визуелизација резултата

Морфогенетски процес приказан у овом поглављу демонстрира могућности експлоатације генетског алгоритма као експлорационог средства у процесу пројектовања.

Експлорациони капацитети генетског алгоритма искоришћени су за генерисање и разматрање великог броја потенцијалних пројектних решења. У зависности од проблема и његове формулације, једна генерација генетског алгоритма може садржати решење сличних вредности перформанси али потпуно различитих облика. Када се архитектонски концепт преводи у домен потенцијалних облика, сви такви различити облици само имплицитно постоје, док

једном генерисана и предложена помоћу алгоритма, они постају алтернативе, које архитекте могу разматрати. На тај начин могуће је добити једнако валидне опције које су резултат морфогнетеског процеса.

Овај вид истраживања форме омогућава ширу претрагу, истраживање обезбеђује оптимална или решења која су блиска оптимланом. Неки генетски алгоритми имају операторе који гарантују такав диверзитет. Понекад, како би се добиле валидне алтернативе, потребно је поновити алгоритамску процедуру неколико пута са различитим генетским параметрима.

Начелно љуске су веома осетљиве на мале промене геометрије које могу имати значајан утицај на перформансе структуре. Иако приступ изогеометријске морфогенезе служи за иницијална пројектна истраживања, могло би се користити за одређене провере у циљу добијања повратних података о сензитивности одређених решења у односу на друга, као нпр. да двостурка кривина чини површ крућом или да савијање може бити проверено коришћењем једноставле глобалне једначине извијања. Такође два варијантна решења не морају имати значајне разлике у погледу структуралних перформанси, али разлике у погледу аеродинамичких особина, одвођења воде или квалитета осветљења могу бити значајне. Укратко, буквални превод решења добијаног коришћењем изогеометријске морфогенезе није једноставан и захтева пажљиву интерпретацију резултата у фази даље разраде.

3.3.2 Прилог концепту унапређења форме (*form-improving*)

Прилог концепту унапређења форме тестиран је на случају флексибилног, континуалног површинског, конструктивног система - затегнуте мембране. Морфогенетска процедура је спроведена за уско постављен домен претраге. Како би се дефинисао сужен домен претраге, процес пројектовања је започео израдом аналогних модела од текстила. Ова истраживања била су такође основ за дефинисање пројектних варијабли. Након дефинисања домена претраге и варијабли процес тражења пројектног решења настављен је у дигиталном контексту, односно у даљим симулацијама коришћен је деформабилни модел

NURBS површи. За разлику од случаја у коме се решење тражи у оквирима ширег домена претраге, у овом поступку полазиште није непозната форма, односно задатака алгоритма примењеног у овом експерименталном пројекту је ограничен на унапређење структуралних перформанси.

3.3.2.1 Дефиниција генеративне процедуре за унапређење форме

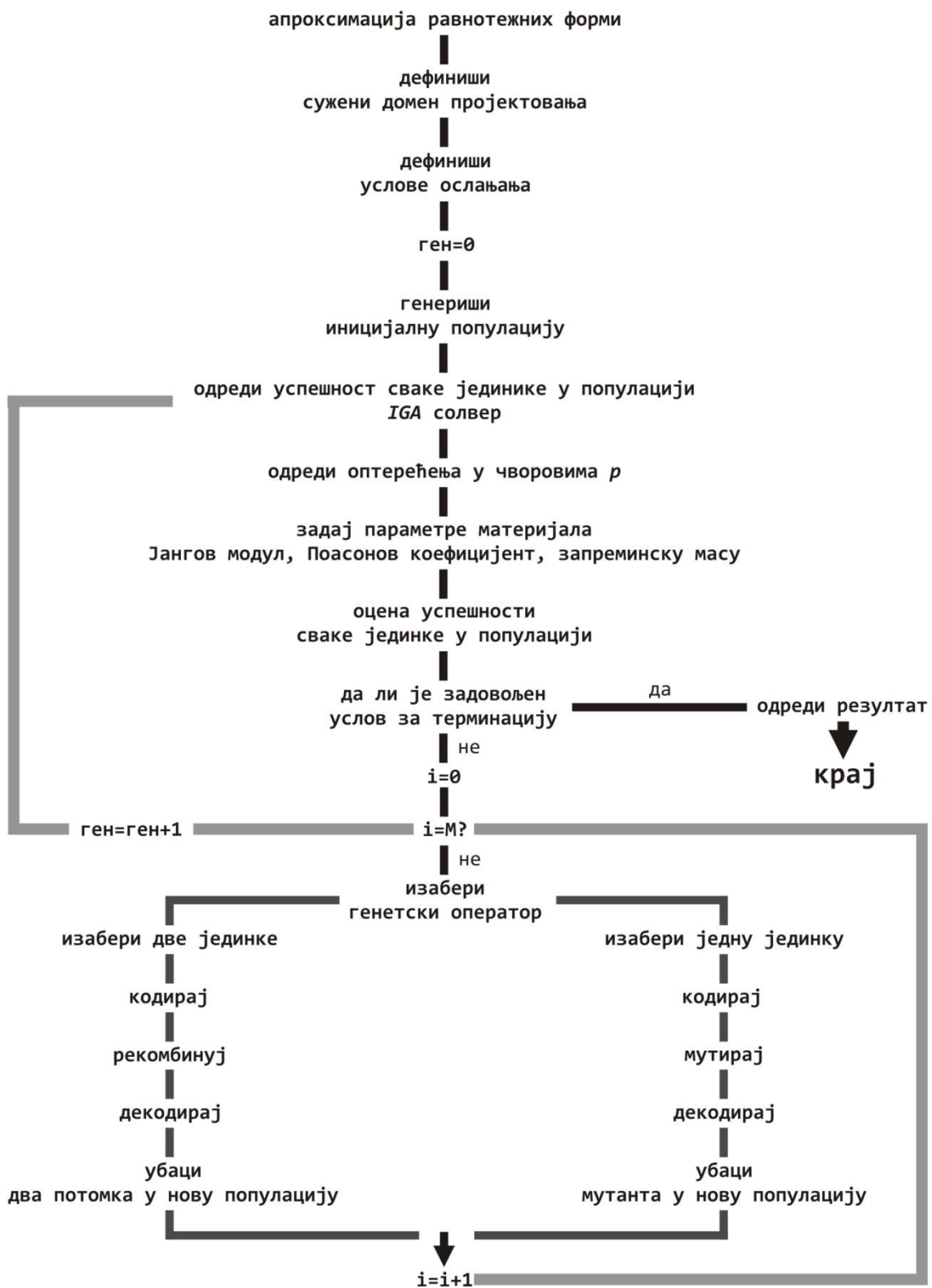
Генеративна процедура је итеративног карактера. У првом кораку дефинише се ограничени домен претраге на основу резултата експеримента са аналогним моделом. Иако у овом случају форма објекта није непозната, с обзиром на карактер алата помоћу кога је репрезентована она није довољно прецизно дефинисана. Ова генеративна процедура подразумева превођење закључака аналогних моделских истраживања у дигитални контекст и наставак процеса тражења решења коришћем софистициранијег алата.

Процедуру изогеометријске морфогенезе могуће је приказати на следећи начин:

- **Фаза 1.** *Иницијализација* у којој се у првом кораку користе аналогне технике тражења форми како би се дефинисали домена претраге, опсег пројектних варијабли и гранични услови.
- **Фаза 1а.** Подразумева наставак процеса иницијализације. Од ове фазе се проблем даље третира у дигиталном контексту. Помоћу тродимензионалног NURBS заснованог софтвера за моделовање, у овој фази, генерише се прва популација форми која садржи задат број јединки.
- **Фаза 2.** *Евалуација* генерисане популације форми у којој се на основу селектованих евалуационих параметара врши изогеометријска анализа просторне конфигурације сваке јединке.
- **Фаза 3.** *Генерисање нове популације* коришћењем генетских оператора селекције, укрштања и мутације. Селекцијом се, како је претходно приказано, врши одабир најбољих јединки које укрштањем дају нове јединке, док се мутацијом производе додатне варијације.

Евалуација, селекција, укрштање и мутација се понављају задати број итерација, односно до пороналажења задовољавајућег формалног решење.

Дијаграм на слици 3.3.10 описује ток процедуре у којој су диференциране следеће секванце:



Слика 3.3.10 Дијаграм генеративне процедуре унапређења форме

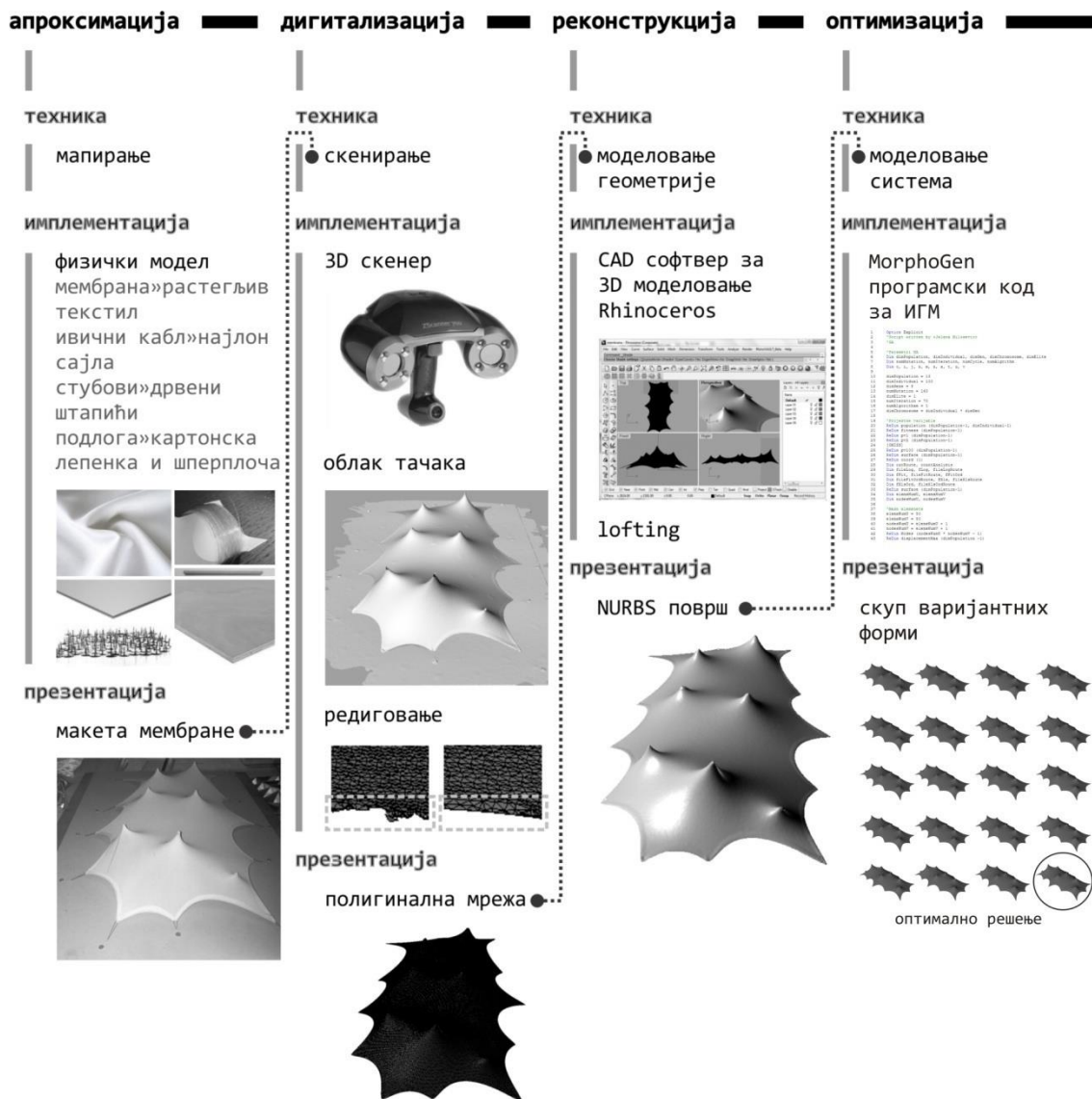
3.3.2.2 Студија случаја: генерисање форме мембране

Студија случаја спроведена је као експеримент примене процеса тражења форме у развоју иновативног пројектног решења, на примеру преднапрегнуте мембранске структуре. Циљ процеса у коме се користи приступ - од физичког ка дигиталном, био је тестирање метода које омогућавају анализу принципа обликовања и конструисања мембранских површинских система. У овом процесу, на основу захтева структуралних перформанси, тражено је естетски прихватљиво пројектно решење. Водећи се овим параметрима, у првом кораку истраживања су спроведена коришћењем технике израде физичког модела - макете. Формално решење изражено и репрезентовано макетом је у наредном кораку дигитализовано како би се истраживања наставила у виртуалном окружењу, у коме су унапређене механичке перформансе иницијалне геометрије задржавањем тополошких одлика почетне замисли.

Пројектни задатак је тестирање ефикасности поступка изогеометријске морфогенезе у случају унапређења форме мембране. Просторни концепт објекта заснован је на закривљеном крову слободне форме. Полазећи од формалних истраживања коришћењем физичког модела од растегљивог текстила предложено је формално решење. У овом случају изогеометријска морфогенеза примењена је за побољшања структуралних перформанси формалног решења.

Процес у коме је начелно могуће диференцирати четири сукцесивне фазе започео је пројектном идејом комуницираном геометријском скицом (слика 3.3.11). Пројектантска намера изражена геометријском скицом, стилизоване, слободне просторне композиције, лаке мембранске конструкције слободне форме, без функционалних или конструктивних ограничења репрезентује чисту идеју о геометријској форми. Ова геометријска артикулација пројектне идеје успоставила је платформу за евалуацију резултата наредних фаза истраживања која су укључивала ограничења, она је представљала репер за тестирање свих каснијих пројектних варијанти. Хронолошки следећа секвенца била је тражење форме помоћу технике израде физичког модела од растегљивог текстила у размери 1:200. Формално решење апроксимирано макетом је затим дигитализовано помоћу 3D ласерског скенера *ZScanner® 700*. Резултат скенирања, дигитални

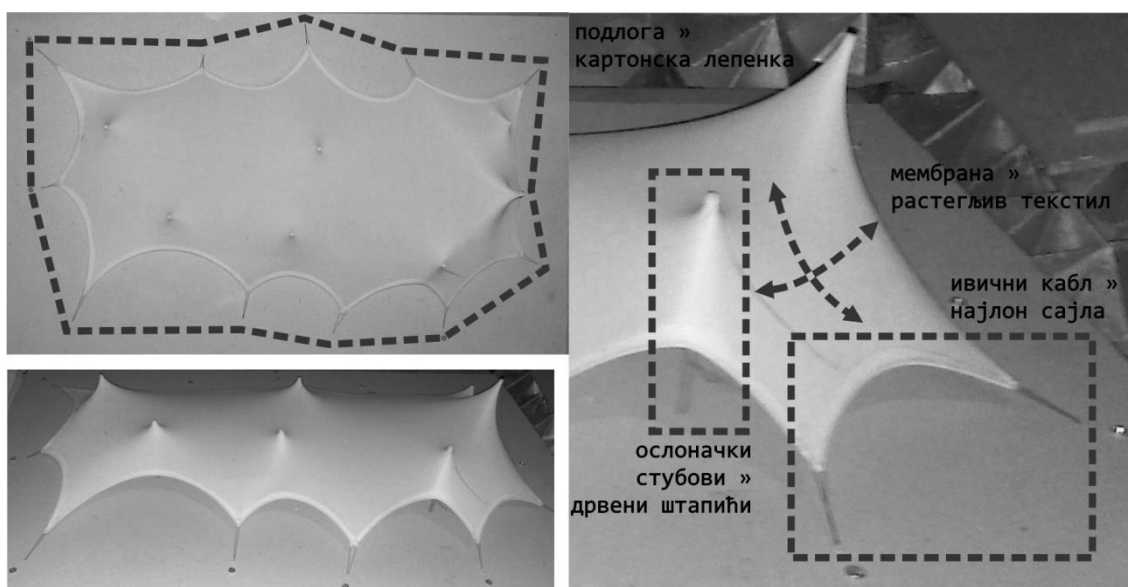
геометријски модел површи апроксимиране триангулисаном мрежом, реконструисан је применом техника за моделовање површи у оквиру NURBS заснованог програма за тродимензионално моделовање *Rhinceros*®. Резултујућа параметрска NURBS површ представљала је објекат процеса рачунарског унапређења структуралних особина форме. Главна улога креираног параметрског модела је обједињавање решења спроведених структуралних евалуација, а флексибилност контролисане геометрије омогућила је подешавања у итеративном процесу унапређења структуралних перформанси.



Слика 3.3.11 Дијаграмски приказ процеса проналажења форме мембранске структуре

Апроксимација мембранске структуре реализована је израдом физичког модела претходно приказаног на слици 2.1.9. Сам процес тражења форме помоћу

физичког модела био је корисан за идентификовање принципа конструисања и обликовања мембранских структура који ће бити коришћени и у фази рачунарског моделовања. Ова техника искоришћена је на почетку процеса као медијум који омогућава брзу артикулацију идеје. Како би макета представљала што вернију реплику реалне конструкције било је неопходно што прецизније симулирати конструктивне елементе и граничне услове. У том смислу елементи реалног система мапирани су на следећи начин: преднапрегнута површ мембране апроксимирана је помоћу растегљивог текстила, елементи ослањања - ивични каблови помоћу најлон сајли анкерованих (причвршћених) за подлогу, а ослоначки стубови помоћу дрвених штапића (слика 3.3.12).



Слика 3.3.12 Апроксимација форме мембранске конструкције израдом физичког модела

Процес израде физичког модела започео је маркирањем позиција ослоначких елемената на плочи подлоге чија површина је већа од пројекције основе мембранске структуре. Затим је извршено постављање пилона на начин да се не фиксирају чиме је омогућено подешавање углова и висина у процесу тражења најстабилнијег облика. Преко овако постављених ослонаца пребачена је тканина која је потом уједначено затегнута како би се генерисало преднапрезање у њеној површи и привремено причвршћена за основу. Кроз неколико итерација подешавања формирана је затегнута закривљена текстилна површ на којој су обележене позиције ослоначких каблова, а затим је текстил исечен и сашивени су рубови кроз које су провучене најлонске струне које симулирају ивичне каблове.

Пре анкеровања за основу струне су затегнуте уз вођење рачуна да њихово напрезање буде такво да омогући очување облика преднапрегнуте тканине. Напрезање ивичних каблова заправо замењује ефекат континуалног преднапрезања тканине. На овај начин добијена равотежна форма мембранске структуре представља врсту визуелног закључка и основу за прецизније дефинисање структуре коришћењем рачунарских технологија.

Дигитализација физичког модела спроведена након што је артикулисана форма мембранске структуре имала је за циљ формирање дигиталног тродимензионалног геометријског CAD модела на коме су вршена даља истраживања. С обзиром да је макетом заправо репрезентована генерална природа форме, екстремна прецизност није била императив.

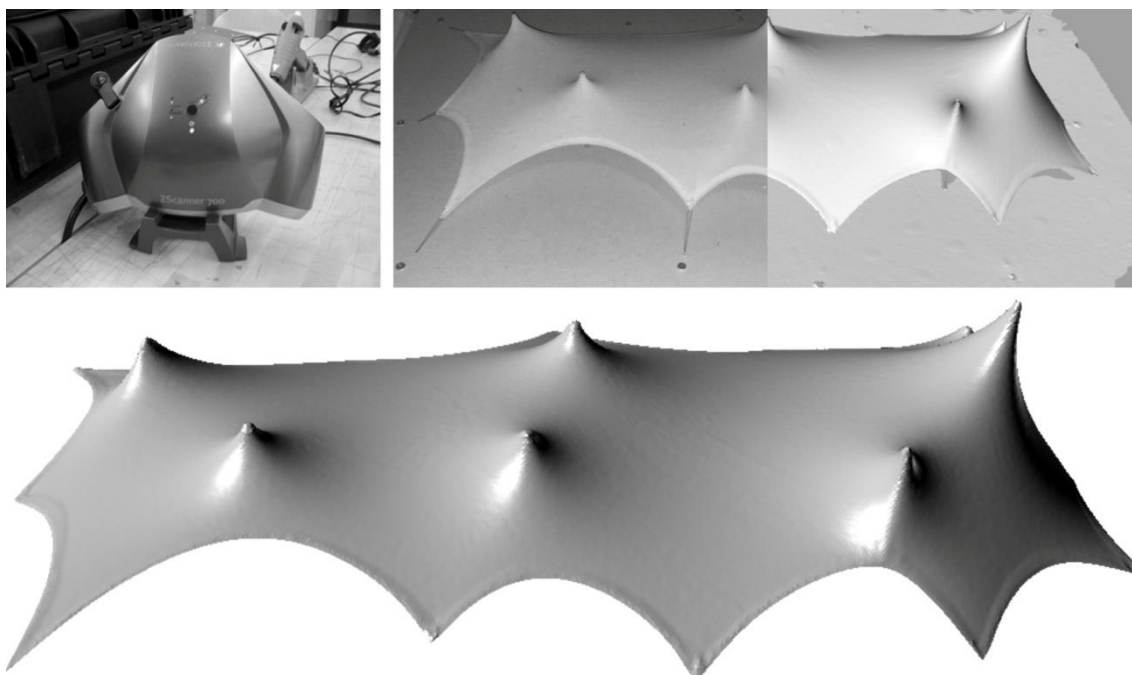
Овде је потребно направити дигресију која има за циљ да илуструје да су поступци добијања података о геометрији из физичког модела одувек представљали осетљиву фазу процеса проналажења форме, подједнако када су у питању традиционлни поступци мануелног мерења⁸⁴, односно мерења помоћу мерних столова (*measuring tables*) опремљених уређајима за прецизна мерења које су кроистили Тороха, Ислер, Ото и др. [Вес08]. Тренутно је уобичајена употреба контактних и безконтактних техника метрологије. У случају контактних техника мерења се спроводе помоћу машина за мерење координата (*coordinate measuring machines* - CMMs) које снимају координате тачака приликом контакта са објектом коришћењем различитих сонди (*probes*). Безконтактне технике подразумевају фотограметрију (*photogrammetry*) и ласерско скенирање (*laser-scanning*). Такође технике метрологије су тренутно нераскидиво повезане са компјутерском контролом и техникама евалуације, чинећи на тај начин систем који омогућава директан трансфер измерених података у дигитално окружење пројектовања у коме се даље одвија рад, тј. предузимају корекције неправилности модела, мерење грешака, структурана анализа, итд.

У оквирима ове студије примењена је брза, ефикасна и прецизна техника ласерског скенирања, којом је добијен прилично тачан дигитални модел. Принцип

⁸⁴Традиционални поступци мерења подразумевају постављање безне тачке у оквирима или изван модела, а затим коришћење инструмената за мерење (метра, шестара, и сл.) висине и релативне дистанце између тачака. Повезивањем појединачних мерења добија се систем тачака са координатама.

рада уређаја за ласерско скенирање заснован је на емитовању ласерских зрака на објекат и снимању њихове рефлексије у реалном времену помоћу дигиталног видео уређаја. С обзиром да су у скенеру ласер и видео уређај постављени на одређеној удаљености, координате сваке скениране тачке реконструишу се на основу познате вредности те дистанце.

У конкретном случају за скенирање је коришћен преносиви ручни ласерски 3D скенер *ZScanner® 700*, који је повезан са рачунаром (лаптопом) и подржан специјализованим софтвером *ZScan Software* [ZCo09]. Након калибрације уређаја, поступак је подразумевао постављање рефлектујућих маркера (тзв. *таргета*) на макету, који заправо представљају референтне тачке за спајање *скенова* из различитих углова у јединствену геометрију, а затим само скенирање током ког се милиони тачака физичког модела снимају у кратком временском периоду формирајући тзв. *облак тачака* (*point cloud*) (слика 3.3.13).



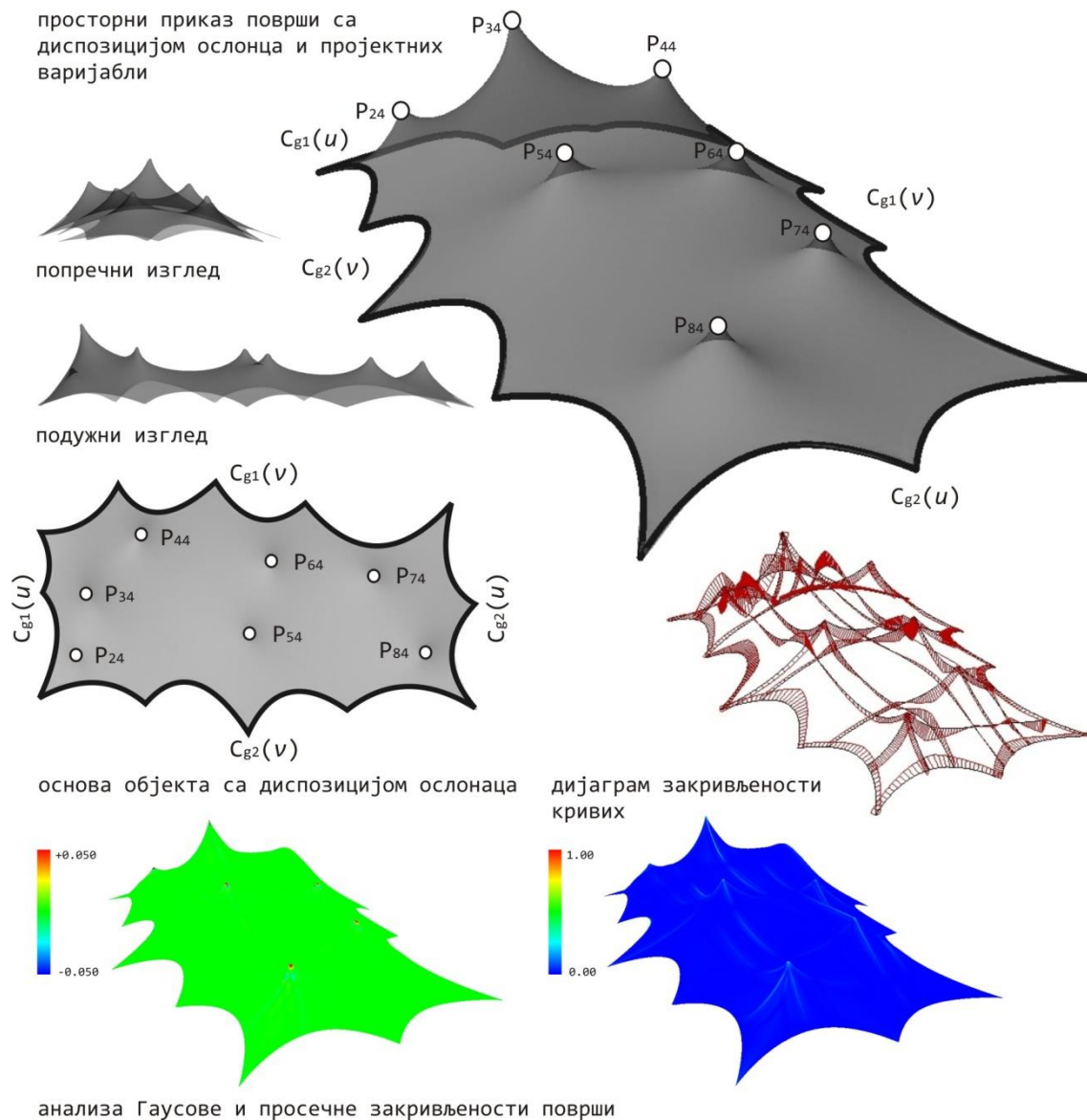
Слика 3.3.13 Дигитализација макете коришћењем технике ласерског 3D скенирања помоћу уређаја *ZScanner 700* /горе лево/, упоредни приказ макете и облака тачака /горе десно/, финална геометрија полигонална мрежа /доле/

Помоћу специјализованих софтверских апликација координате тих тачака спајају се у тродиманзионалну полигоналну мрежу која предсатвља дигиталну тродимензионалну репрезентацију скенираног објекта, а коју је могуће експортирати у различите излазне формате фајлова, попут *.DAE*, *.FBX*, *.MA*, *.OBJ*,

.PLY, .STL, .TXT, .WRL, .X3D, .X3DZ, .ZPR, у случају коришћеног уређаја, и даље користити у дигиталном CAD окружењу. Ограничење технике ласерског скенирања у случају предметног модела дошло је до изражаја у случају сајли услед њихове мале дебљине као и делова пилона који су били скривени од ласерских зрака. С обзиром да је примарни циљ био скенирање комплексне геометрије површи претходна ограничења су занемарена.

Након скенирања макете уследило је редиговање модела, а скенирани подаци су прво анализирани како би се откриле и отклониле грешке. Софтверска апликација која подржава скенер има специјалне функције које омогућавају чишћење сирових података мерења. Техника чишћења сканираног модела заснована је на интреполационом алгоритму који у суштини пореди групе суседних координата како би се увидела било каква локална девијација коју је потребно кориговати. Полигонална мрежа која се састоји од великог броја троугаоних полигона (*triangulated faces*) представља финалну репрезентацију измерених података. Ова мрежа аутоматски је генерисана из облака тачака и омогућава визуелну детекцију грешака. У овом случају полигонална мрежа је прилично добро апроксимирала површ тако да није било већих потребе за корекцијама коришћењем неке од техника галчања (*smoothing techniques*), изузетак представљају ивице код којих је глачање изведено пажљиво како би се избегла дисторзија скенираног облика. Очигледне грешке су били и недостаци полигона на позицијама пилона - рупе у дигиталном моделу, које су попуњене конструисањем полигона.

Реконструкција дигиталног геометријског модела спроведена је помоћу NURBS заснованог софтвера *Rhinoceros*® у који је импортован скенирани модел. Полигонална површ је била основа за моделовање закривљене NURBS површи коришћењем стандардних техника моделовања, с обзиром да у овом случају није било могуће моделовати површ конвертовањем темена мреже у контролне тачке. У том смислу прво је било потребно исцртати NURBS линије преко полигоналне мреже које су искоришћене за моделовање површи. Како би се обезбедило добро слагање између геометрија полигоналне мреже и NURBS површи коришћен је велики број темена мреже. Након моделовања кривих креирана је површ (слика 3.3.14).



Слика 3.3.14 Експериментални пројекат 2 - геометрија површинског система репрезентована помоћу NURBS површи, гранични услови и пројектне варијабли

Затим је извршена компарација слагања између моделоване NURBS површи и полигоналне мреже, као у основи две различите дескрипције исте апроксимације модел облика. Поравнање је изведено коришћењем четвороугаом плоче основе као референтног објекта који се појављује у оба дигитална модела. Након завршетка моделовања површ је скалирана до пуне размере и уследио је процес рачунарског унапређења форме.

Дефинисање пројектних варијабли. Полазећи од генерисаног модела фиксирана је геомтрија четири граничне NURBS криве слободне форме

$C_{g1}(u)$, $C_{g2}(u)$, $C_{g1}(v)$ и $C_{g2}(v)$, које дефинишу облик основе. Варијабле у овом експерименталном пројекту су z координате интерполционих контролних тачака P_{24} , P_{34} , P_{44} , P_{54} , P_{64} , P_{74} и P_{84} које су на позицији високих ослонаца. Односно, x и y координате ових контролних тачака су фиксисране док је померање тачака у правцу z -осе могуће. С обзиром на број варијабли може се констатовати да у случају овог пројектног експеримента проблем седмодимензионала. И у овом случају, форма представља функцију z координате контролних тачака. Како би се спровела процедура тражења форме дефинисан је опсег варијабилности z координате за сваку тачку. Приликом дефинисања опсега превасходно је вођено рачуна о пропорцији и односима истраженим у процесу израде физичког модела. Дакле, усвојени ужи домен дефинисан је узимајући у обзир резултате физичког експеримента.

Домен решења проблема, или простор претраге, садржи све површи које имају дефинисани облик основе (с обзиром да је кретање контролних тачака у хоризонталној равни онемогућено). Параметраска дефиниција и ужи опсег варијабилности променљивих омогућила је ефикасна формална истраживања и проналажење форме унапређених структуралних перформанси.

Гранични услови су ивични каблови репрезентовани кривама $C_{g1}(u)$, $C_{g2}(u)$, $C_{g1}(v)$ и $C_{g2}(v)$, анкеровани у 11 тачака и 7 високих ослонаца репрезентовани контролним тачкама P_{24} , P_{34} , P_{44} , P_{54} , P_{64} , P_{74} и P_{84} .

Параметри материјала усвојени у примерима дати су табелом 3.3.4.

Табела 3.3.4 Пројектни експеримент 2 - примењени параметри материјала

параметар	вредност
Јангов модул еластичности	$E = 10000000 \text{ Pa}$
Поасонов коефицијент	$\nu = 0.48$
Запреминска маса	$\rho = 927.94175 \text{ kg/m}^3$

Евалуација структуралних перформанси. Након абстрактне дефиниције скупа потенцијалних решења, одређена је мера структуралних перформанси која води процес оптимизације. Као мере крутости система одабрана је минимална деформација изражена померењима. Структура је моделована коришћењем изогеометријских елементата мембране. Могућност примене изогеометријских елемената у процесу пројектовања мембрана претходно је разматрана у [Phi14].

Таблом 3.3.5 дати су параметри примењеног генетског алгоритма. Број итерација еволуционог процеса је ограничен. Величина популације је лимитирана на 20 јединки, од којих је прва у свакој генерацији узета као елитна. Оператор укрштања примењен је 75%, док су генетске мутације ограничене на 5%.

Табела 3.3.5 Пројектни експеримент 2 - примењени параметри генетског алгоритма

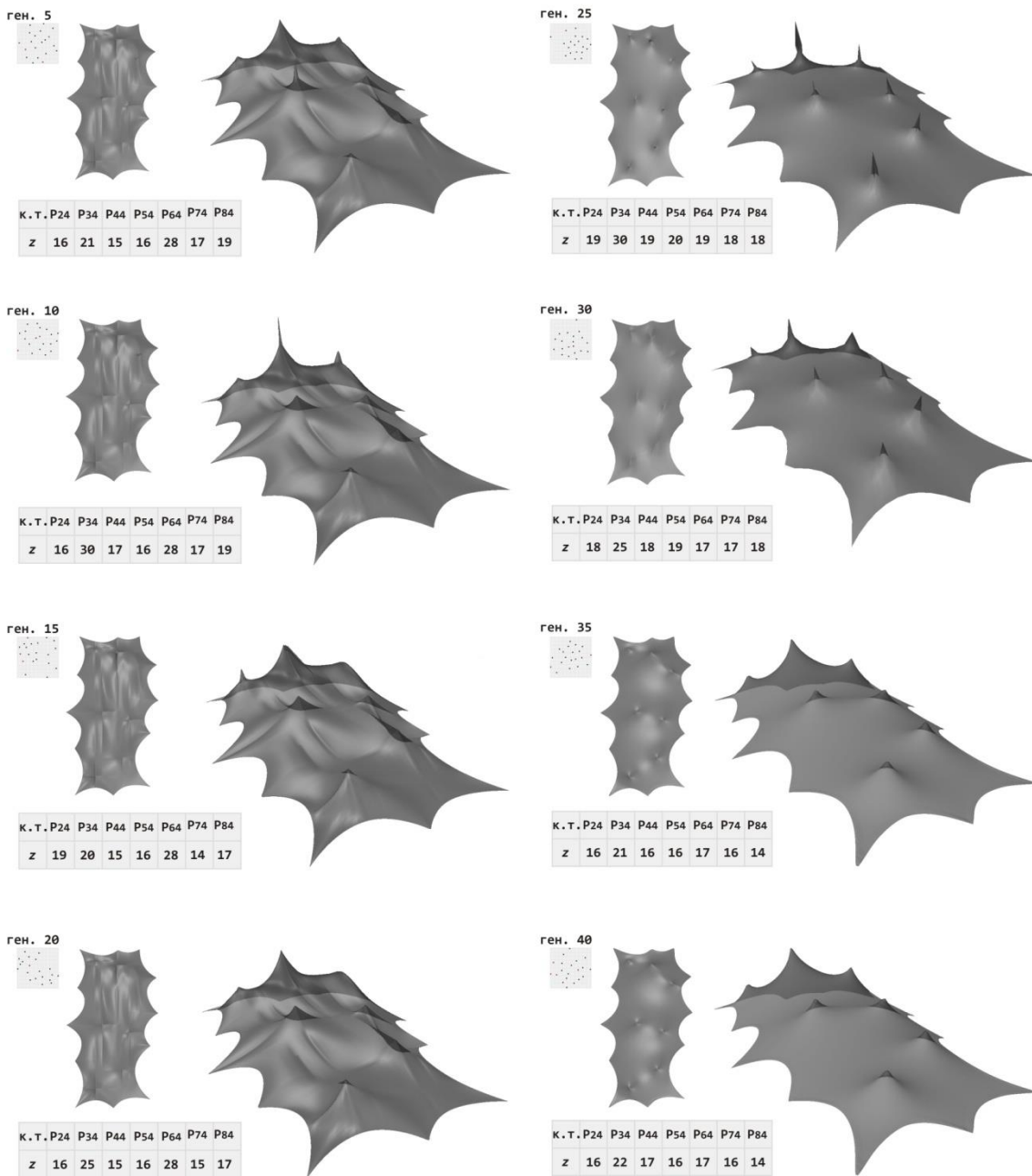
параметар	вредност
број генерација	40
величина популације	20
број елитних јединки	1
дводимензионално укрштање /%/	75
мутација /%/	5
оподање домена у свакој итерацији /%/	0

Имплементација морфогенетске процедуре сумирана је табелом 3.3.6.

Табела 3.3.6 Пројектни експеримент 2 - импламентација процедуре

параметар	спецификација
пројектне варијабле	вертикалне координате мреже контролних тачака
бр. контролних тачака/варијабли	7
домен пројектовања	ужи домен
гранични услови	Ивични каблови анкеровани у 11 тачака и 7 високих ослоња-пилона
ограничења	хоризонталне координате NURBS контролних тачака
примењени материјал	ETFE
критеријум евалуације	минимум максималног померања

Интерпретација резултата. Резултати су илустровани сликом 3.3.15. Минималне, просечне и максималне вредности критеријума евалуације у свакој генерацији илустроване су графиканом. Еволуција структуралне форме илустрована је јединкама из генерације 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 и 40. Развој илуструје како се полазећи од изражено закривљеног неправилног облика, структура постепено релаксира у правцу површи мембране пожељних механичких перформанси. Од генерације 35 алгоритам конвергира ка једном решењу, унапређујући одређене локалне делове структуре. На крају еволуционог процеса, максимално вертикално померање финалног облика је значајно ниже у односу на померање најбоље јединке у првој генерацији, а значајно побољшање структуралних перформанси могуће је уочити након одређеног броја генерација.



Слика 3.3.15 Експериментални пројекат 2 - приказ резултата процеса морфогенезе

Дефиниција проблема и усвајање ужег домена пројектних варијабли резултовало формом мембране која је обликовно блиска решењу добијеног кроз израду физичког модела.

Потребно је нагласити да је овом студијом случаја приказан поступак проналажења форме мембранске структуре коришћењем аналогних и дигиталних техника. Овај поступак је подразумевао превођења закривљене површи од растегљивог текстила у дигитални параметрски модел који је представљао основу за даља истраживања. У овом специфичном случају материјали у апроксимацији нису се користили у циљу реализма репрезентације већ као рационални са аспекта реплицирања перформанси реалне конструкције. Макета је била брз и економичан медијум комуникације пројектне идеје. На овај начин било је могуће изразити одређена естетска ограничења. Анализом модела и суперпонирањем различитих аналитичких процена, омогућено је поређење алтернатива, извођење закључака који су постали основ за дефинисање наредних корака процеса пројектовања. У том смислу, претходно предложена геометрија, постала је предмет трансформација у дигиталном контексту у циљу оптимизовања структуралних перформанси. Осим тестирања приступа пројектовања мембранских структура заснованог на структуралним перформансама, задатак ове студије била је и провера потенцијала укључивања различитих технологија у процес пројектовања, формалних истраживања, унапређења процеса проналажења форме и креирање пројектног решења у синергији између различитих приступа, метода и техника.

3.4 Резиме

Форма наспрам перформанси⁸⁵

У релацијама између форме и перформанси [Oxm09] информационе технологије имају регулаторну улогу. Како би се извршила евалуација улоге компјутерских прорачуна (*computation*) у контексту перформанси генеративног система примењеног у процесу пројектовања и сумирале намере, уводе се појмови уграђености (*embedding*), интеграције (*integrating*) и повезивања (*linking*).

Уграђеност се у овом контексту односи на уметање структуре означене као уграђени систем (*embedded system*) у оквир процеса пројектовања. Начелно, уграђени систем не представља алат опште намене већ има специфични задатак. Морфоген средство за генерисање површинских конструктивних система (*design driver*), предложен овим радом, пример је уграђеног система, који у оквирима процеса пројектовања као ширег система, има функцију управљања продукцијом структуралних форми на основу обраде специфицираних информација.

Употреба алата за параметрско пројектовање и симулације доприноси реторици аутономије процеса архитектонског пројектовања. Став једног броја аутора је да се увођењем објективних екстерних информација, под покровитељством тражења форме (*form-finding*), одређују вредности које се користе за генерисање пројектних решења и мења дефиниција пројектовања. С друге стране, заузимањем става да те технологије не треба да функционишу као самостални алати (*stand-alone devices*), ограничава се њихова улога на врсту подсистема јасно одређене функције, чије операције доприносе функционалности ширег система продукције пројектног решења.

Иако представља изазов наметање одозго на горе (*bottom-up*) објективности процесу пројектовања није у потпуности адекватан приступ. Комплексна природа пројектних проблема спречава њихову једноставну алгоритамску формулацију, а универзални солвер за њихово решавање још увек је недостижан циљ. Чак и у

⁸⁵Текста овог поглавља представља модификовано поглавље *Form vs. performance* које је аутор објавио у оквиру рада под називом *Computational Morphogenesis: Performance-Oriented Architectural Design Concept* у зборнику интернационалне конференције и изложбе *On Architecture 2013* [Mil13c].

добро дефинисаним компјутерски имплементираним процесима проналажења форме пројектанту остаје велики број избора и одлука. Уместо тога продукција компјутерских алата који обављају специфичне задатке у оквиру процеса пројектовања представљају адекватан и реалистични приступ.

На послетку, можда целокупан процес пројектовања и није могуће редуковати на алгоритам, али алгоритми могу контролисати одређене секвенце или изводити партикуларне задатке. У овом хибридном приступу прорачун (*computation*) представља врсту рационалног језгра унутар сложеног процеса пројектовања, који има могућност да усмерава пројектантова размишљања и одлуке. Идеја је да се сачувају предности комплексне природе процеса пројектовања док се користе потенцијали које нуде компјутерски алати.

У овој поставци, креирање генеративног система и алата представља интегрални део процеса пројектовања. Задатак пројектанта је да идентификује проблем, успостави логички систем, и креира алат специјализован за његово решавање. Креирање таквих посебно направљених (*custom-made*) пројектних алата има неколико предности, оптимизовано је за решавање специфицираног задатка у смислу редукције времена и повећања перформанси.

У овом делимично аутоматизованом (*semi-automated*) вишефазном процесу комбинује се рачунарска аутоматизација са ревизијом, модификацијама, корекцијама и унапређењима које врши пројектант. Док је аутоматизацијом омогућено тражење решења кроз продукцију алтернатива и постепена подешавања, деловање пројектанта усмерено је на елиминацију ограничења аутоматизованог процеса изражену у ситуацијама које није могуће егзактно дефинисати. У овој поставци архитектонске форме резултат су интеракције пројектант-компјутер.

Унапређење процеса пројектовања искључиво кроз увођење уграђених система представља редукционистички приступ, који нуди виђење архитектонске форме као ентитета пасивно обликованог техничким и енвјорменталним ограничењима. Архитектура је изнад таквих схватања. Чак и у процесима пројектовања заснованим на структуралним перформансама који су подређени

физици, степен перформанси архитектонских објеката функција су интеграције бројних аспеката.

Интеграција обезбеђује повезивање различитих параметара пројекта, аспеката и продукционаих алата и представља преферирани приступ у комплексном процесу пројектовања. Интеграција се тренутно охрабрује и практикује у различитим доменима. У покушају да остане конкурентна са областима науке, културе и производње архитектура следи ту праксу, надмеће се са њиховим унапређеним окружењима, прихвата нове парадигме и начине деловања. Импликација је ревизија конвенционалних релација између архитектуре, њених утицајних фактора и продукционих алата.

Интегрисање различитих параметара пројекта води ка концепту *интегрисаног модела*. Повезивање и инкорпоирање свих различитих аспеката реалности, као што су социјални, културни, политички, економски, технички, итд., вазују се за концепт креирања тзв. *иделаних модела* [Gro12]. С друге стране, форме се уобичајено производе помоћу *селективних модела*. Захвљајући напретку рачунарских технологија, селективни модели су постали ефикасни у интеграцији различитих информација, на тај начин генеришући милтидимензионални информациони систем, који се приближава концепту иделаних модела.

Идеја интегрисаног пројектовања реализована је увођењем нових техника и алата и реинтеграцијом фаза продукције и активности учесника у процесу пројектовања. У овом концепту пројектовани објекат сматра се рационалном, органском структуром која настаје помирењем различитих захтева.

Еволуциони процеси, системи засновани на агентима (*agent-based systems*), алати за анализу перформанси (*performance-based analytical tools*) попут алата за симулацију напона и деформације структура или динамике флуида, чија је примена довођена у везу са *modus operandi* који интензивира формални аспект сада држе корак са осталим пројектантским процедурама. Иако су прво перципиране као методе које интензивирају форму, интеграција је везана за постизање другачијег циља: померање од форма ка преформансама.

Уграђеност и интеграција информација су два параметра које регулишу предложени модел. Међутим узимањем у обзир само те две компоненте имплицира третман архитектуре као затвореног система интеракција.

Повезивање је концепт који омогућава измештање архитектуре из својих традиционалних оквира према неограниченој платформи *фузије знања (fused knowledge)* [Gro12]. Развој информационих мрежа узроковао је да архитектура постане отворени извор (*open source*). Иако је архитектура одувек била вектор који описује интеракцију хетерогених енвајормента и у некој врсти симбиотичке релације са бројним доменима људских активности, појава информационих мрежа интензивирала је стање у коме су архитектонске форме све мање аутономне, а све више зависне од мултидимензионалних извора знања.

У овој поставци пројектовање представља кооперативни процес у коме су наглашени правци организације остварени комбинацијом и интеракцијом информација. Премошћавање различитости дисциплина остварује се ослањањем на суштинске, заједничке принципе пројектовања. Такође, делокализација процеса пројектовања преко милтидимензионале мреже знања захтева методе које ће једновремено обезбедити очување његових вредности, природе деловања, продукције и отворити могућност експериментима.

Закључна разматрања

Генеартивни приступ пројектовању површинских конструктивних система, разматран истраживањем, тестиран је предлогом поступка изогеометријске морфогенезе, интегративне методе засноване на аналогiji природних процеса, физички заснованом моделовању и изогеометријском концепту. Имплементација овог поступка подразумевала је формулацију процедуре, програмску импаламантацију и евалуацију кроз пројекте. Захваљујући симулацијама интеракције облика и маханичких перформанси које су у основи процедуре, омогућено је истраживање потенцијала структуралних ограничења у процесу пројектовања. Радом су приказане могућности примене развијеног приступа и алата у процесу пројектовања површинских конструктивних система. Развој нових материјала (композитних, рециклираних, паметних, итд.) и техника произвођење заснованих на примени аутоматизованих дигиталних алата утиче на то да тема површинских конструктивних система добије на актуелности, подстиче размишљања о реализацији објеката слободних форми, али и преиспитивање конвенционалних приступа и размишљања о потреби да се различите технике генерисања оптималних форми укључе у иницијалну фазу пројектовања. У том смислу, предлог и имплементације метода за контролисање софистицираних, закривљених, комплексних форми представља изазов.

4.1. Сумирање резултата

У оквиру овог поглавља дискутоваће се три аспекта резултата овога рада:

- дефинисање поступка,
- развој алата - програмска имплементација и
- прилог пројектовању површинских система.

Дефинисање поступка за пројектовање површинских конструктивних система био је један од задатака истраживања. У том смислу дисертацијом је предложена изогеометријска морфогенеза (ИГМ) рачунарска метода за формална истраживања просторних површинских структура. Метода омогућава проналажење површинских топологија оптималних структуралних преформанси у оквирима дефинисаног простора претраге и за дефинисане граничне услове, коришћењем изогеометријског концепта и еволуционе методе претраге.

Приступ заступан тезом начелно припада дискурсу пројектовања заснованог на перформансама, односно области рачунарске морфогенезе. Морфогенетски процес у области пројектовања конструктивних система у основи су оптимизациони, односно засновани на примени одређене методе претраге. У том смислу, у предложеној методи коришћен је еволуциони приступ за продукцију, евалуацију и проналажење оптималних решења и њихових варијанти. Критеријум селекције решења су структуралне перформансе чија се евалуација врши применом методе нумеричке анализе.

Кључна разлика између изогеометријске морфогенезе и сличних метода које примењују класичну методу коначних елемената је у имплементацији изогеометријског концепта. Изогеометријска морфогенеза може се сматрати варијантом метода за генерисање форме заснованих на структуралној анализи, која користи предности изогеометријског концепта, којим се предлаже конзервација геометријске репрезентације, што је посебно битно за поступак у коме се врше узастопне анализе и производи опсег варијантних решења површинских структура. На овај начин се оптимизује и сам процес претраге, односно потврђена је хипотеза о оптимизацији процеса пројектовања.

Симулације понашања површинских конструктивних система реализоване су применом NURBS структура. Додељивањем физичких карактеристика геометријском субстрату добијене су структурално информисане деформабилне површи. Постављањем услова и ограничења које намеће специфични пројектни задатак иницира се процес претраге за најповољнијим формалним решењем(има). Ограничења која се постављају у овом поступку су простор решења (домен пројектовања), тј. оквир у коме се траже решења, контурни услови и топологија

NURBS контролне мреже, а пројектне варијавле су положаји одређених контролних тачака.

Развој алата - програмска имплементација дефинисане процедуре представљала је следећи задатак истраживања. Полазећи од теоријског и концептуалног оквира развијен је оригинални алгоритамско-програмски код који је имплементиран у оквир CAD система заснованог на NURBS геометријској репрезентацији, а који омогућава аутоматско генерисање форми оптималних у погледу структуралних перформанси. Програмски код представља алат за истраживања форми површинских конструктивних система, а функционалним тестовима на референтним површима потврђена је његова ефикасност и флексибилност. Како би вршио функцију алата за пројектовање површинских конструктивних система код има могућности да:

- генерише опсег варијантних решења и проналази најбоље решење у оквиру задатог домена пројектовања, независно од њихове геометријске комплексности;
- симулира понашање система, карактер оптерећења површинских конструктивних система;
- визуелизује форме површинских система;
- врши евалуацију и компарацију различита решења у складу са задатим критеријумом структуралне оптимизације;
- се геометрија структуре добија директно из CAD софтвера за моделовање без абстракције и симплификације.

Прилог пројектовању површинских конструктивних система подразумева могућност непосредне примене изогеометријске морфогенезе као методе у процесу пројектовања. Изогеометријска морфогенеза представља методу која користи и проширује предности моделовања занованог на деформацији с обзиром да је генеративна. Наведене карактеристике и имплементирани концепти чине ову методу довољно флексибилном за коришћење у контексту архитектонског пројектовања. Осим што омогућава увођење структуралне рационалности у процес архитектонског пројектовања, ова метода редефинише границе између равнотежних форми и објекта слободне форме, што имплицира богатство неконвенционалних облика.

4.2 Смернице за будућа истраживања

Могући правци даљег развоја концепта изогеометријске морфогенеза предложеног овим радом су:

- развој процедуре;
- развој алата;
- имплементација процедуре у унапређена окружења симулације.

Развој процедуре је могуће реализовати на више начина применом других технологија представљања геометрије у првом реду *T-Spline*, *Subdivision surfaces* [Baj02], *Gordon patches* [Gor69], *Gregory patches* [Gre83], *S-patches* [Loo89], *A-patches* [Baj95], *Coons patch* [Pro09], а претпоставља се и да би коришћење технологија репрезентације 3D тела попут *Ricci flows* или *polycube splines* [GuX08] такође могло дати резултате.

Интерактивно обликовање засновано на физици омогућава манипулацију индивидуалним степенима слободе коришћењем конвенционалних геометријских метода, али и коришћењем поља сила у процесу обликовања. Приступ заснован на физици идеалан је за интерактивно обликовање површи с обзиром да омогућава директну манипулацију, модификацију и рафинирање њихових облика применом интерактивних алата за обликовање. У том смислу, морфогенетски процес се може унапредити увођењем других случајева оптерећења поред сопственог.

Као будући правац развоја овог истраживања морфогенетски процес се може унапредити усвајањем мултикритеријумских техника евалуације перформанси. Додатна ограничења која се односе на материјал, производњу, изградњу, цену и естетику могу бити укључени у комплекснији мултикритеријумски оптимизациони проблем. Такође, може се разматрати примена концепта и на друге системе.

Развој алата на основу предложеног програмског кода, као прототипа програмског модула је такође могући правац будућих деловања. Изогеометријска морфогенеза има потенцијал да постане алат за пројектовање и истраживања структуралних форми. С обзиром да изогеометријска морфогенеза представља методу која би у првом реду требало да нађе примену у раној фази процеса

пројектовања, даљим развојем алата неопходно је обезбедити графички интуитивно представљање, као и могућност интерактивних истраживања. Овим радом су развијене методологија и процедура решавања проблема али нису у потпуности имплементирани у интерактивно окружење.

Питање које се намеће је да ли алат треба даље развијати као зависну платформу имплементирану у одређени софтвер или засебну апликацију. Иако је независност алата од комерцијалних лиценци значајна предност, развој целокупног корисничког 3D окружења, које би било потребно реализовати у том случају, не представља једноставан задатак, а његова оправданост је дискутабилна имајући у виду постојеће алате и системе за моделовање. Оно што би се сматрало корисно у случају таквог сценарија је развој опције експортовања геометрије и могућност њене манипулације у комерцијалним CAD софтверским пакетима.

Приступ развоја програмског модула за постојеће CAD окружење је друга, вероватнија опција. Посебно имајући у виду да је тај приступ примењен у реализацији овог истраживања. Програм, како је тренутно имплементиран, користи предности *Rhineoceros*® система, и проширује његову функционалност. Софтвер *Rhineoceros*® показао се као добар избор због распрострањеног коришћења, активног развојног тима, *open-source* става, додатних функција које се реализују коришћењем скриптинга и различитих модула и велике *on-line* заједнице корисника чији чланови активно деле и размењују знања, искуства и препоруке.

Имплементација процедуре у унапређења окружења симулације у релацији је са развојем технологија за моделовање у виртуалним окружењима и окружењима дигиталне продукције (*virtual prototyping*). Коришћење техника виртуелне реалности (*virtual reality* - VR) и проширене реалности (*augmented reality* - AR) могућ је следећи корак унапређења симулација, у правцу интензивније интеракција са моделима. Друга могућност је коришћење дигиталних поступака конструисања применом техника брзе израде прототипова (RP), којим би се симулације/експерименти превели из виртуалног у реалан физички контекст и на тај начин омогућила веродостојнија истраживање, визуелизација и валидација решења.

4.3 Финална размишљања

Ка генеративној конвергенцији у пројектовању површинских конструктивних система⁸⁶

Разматрања приказана претходним поглављима воде у правцу теме *генеративне конвергенције* и потребе сагледавања њених импликација. Асимилације дигиталних технологија, трансмисија знања и апропријација процеса и процедура других дисциплина обележавају актуелни архитектонски дискурс. Трансфер технологија, где се под технологијом не подразумева искључиво хардвер, већ форма системског размишљања, подразумева улагање напора у њихову интеграцију и адаптацију, како би на адекватан начин одговорили специфичним потребама и условима процеса пројектовања. Предложеним поступком за генерисање површинских структура заснованих на приоритетима механичких перформанси, који је централна тема рада, разматран је концепт процеса пројектовања као продукционог система који омогућава примену различитих стратегија и конвергенцију различитих система у јединствен метасистем. Циљеви оваквог приступа су ефикасно коришћење ресурса.

Конвергентна окружења пројектовања подржавају филозофију интеграције. Претпоставка је да се продукциони алати и процеси менталне и материјалне креације неће фундаментално разликовати између различитих производних категорија. Суочене са оваквим размишљањима, неопходно је да се савремена архитектонска теорија и пракса баве темом генеративне конвергенције и њеним консеквенцама.

Брзи развој технологија и драматичан пораст комплексности међу окружење архитектонског инжењерства. Суочени смо са изазовима пролиферације CAD/CAM/CAE система и аутоматизованих процеса производње. Ове технологије омогућавају експерименте засноване на компјутерском генерисању и дигиталној производњи структура неконвенционалних по својој форми, типологији и естетици. Иновативне форме структура подржане су променама креативног

⁸⁶Текст овог поглавља представља прилагођен текст рад под називом *Towards Generative Convergence in Design of Architectural Structures* који је аутор објевео у Зборнику интернационалне конференције *Places and Technologies 2014* [Mil14].

процеса у правцу *дигиталног континуума* [Kol05], колаборативног приступа у коме се дизајн, анализа, презентација и продукција реализују применом дигиталних технологија.

Унапређене могућности рачунара омогућавају пројектовање у конвергентном окружењу у коме архитектура и различите области знања и експертности континуално укрштају, размењују, анализирају и производе разне врсте информација. Пример израза оваквог стања је трансформација пројектног студија у пројектну лабораторију у којој се оперише са терминима и дискурсима позајмљеним од других дисциплина [Hen04], [Hen06], [Sil06], [Cru08], [Hen08], [Hen09], [Sry09], [Vin09], [Lal09], [Leg11], [Spi11], [Men12]. Оваквим експериментима се често сједињују уметност и наука, помирују инжењерство и естетика. Како се границе пројектантске праксе све више преиспитују и померају, развој и примена различитих технологија и образаца, постају есенцијално средства за тражење и вредновање пројектних решења. У том смислу, разматране су позиција, релевантност и одрживост концепта генеративне конвергенције.

Конструкт генеративне конвергенције. Дефиниција конвергенције значајно варира у зависности од контекста. Док у технолошком контексту може бити дефинисана као тенденција различитих технолошких система да еволуирају у правцу извођења сличних задатака, дигитална конвергенција може се односити на интеракцију и синергетско деловање претходно одвојених технологија. Област дизајна карактерише константна потрага за новим начинима којим би се срушиле баријере и унапредиле методе производње. Према Вроблевском (Wróblewski) конвергентни дизајн представља методу оптимизације укрштањем производа, процеса и садржаја [Wro04]. Иако архитектура још увек није у могућности да следи интегрисани модел продукције карактеристичан за индустријски дизајн, напредне дигиталне технологије, како алудира Коларевић омогућавају појаву савремене врсте информационих неимара (*informational master-builders*) [Kol05].

Конвергентна култура, односно ток садржаја коришћењем различитих медијских платформи и кооперација различитих врста медија [Jen06], утицала је на наш начин интеракције са информацијама. *Медиаморфоза* (*Mediamorphosis*),

или конвергенција дигиталних медија [Fid97] као резултат пораста коришћења дигиталних комуникација од краја XX века, произвела је тренутно вишеслојно конвергентно медијско окружење у коме сви модели комуникације и информација континуално модификују форму како би се адаптирали константним технолошким променама, мењајући између осталог модусе креативног процеса, едукације и међусобних интеракција. Конвергенција је у овој инстанци реализована повезивањем компјутерских и осталих информационих технологија, медијских садржаја и комуникационих мрежа, насталих као резултат еволуције и популаризације интернета, као и активности, производа и сервиса који настају у дигиталном простору.

Утицај социјалних покрета у виртуалном простору и културе партиципације (*participatory culture*) могуће је идентификовати у области архитектуре кроз оснивање и деловање група попут *open source architecture*, *open source programming*, *openly-shared computation* и сл.⁸⁷ Други пример интеграције представљају технолошки кластери (*technology clusters*).⁸⁸ Имплементацијом ових за конвенционалну архитектонску праксу нестандартних приступа, метода, поступака и алата модификује се процес пројектовања. Начелно овакав приступ подразумева полидисциплинарност, проширена интересовања и прихватање другачијих улога⁸⁹.

У пројектовању површинских конструктивних система генеративна конвергенција може се користити као колаборативна платформа чија се ефикасност реализује кроз интегрисан, мултидисциплинарни и рационалан приступ. Док су интеграција и мултидисциплинарност делимично подстакнути специфичним карактером области, рационалност се у овом случају односи на узимање у обзир захтева структуралних перформанси у фази конципирања пројектног решења.

Изазови које поставља конвергенција захтевају да се пројектовању комплексних решења приступи на начин којим се прихвата идеја пројектног

⁸⁷ Деловање ових група засновано је на концепту отворене размене рачунарских алата.

⁸⁸ Нпр. кластер 3D технологија који повезује - 3D дигитализацију/скенирање, мерење, облика, диманзионисање и контролу деформације, 3D рачунарске технологије и 3D производне технологије.

⁸⁹ Нпр. архитекта који користи програмирање у процесу пројектовања.

ланца у коме су уклоњене ограде између пројектовања, анализе и изградње. Конвергенција захтева рушење баријера између:

- пројектанта и пројектантских алата,
- различитих медија за концепцију и комуникацију пројектних идеја и
- концепта и његове материјализације.

Хипотетички, препреке могу бити превазиђене коришћењем традиционалних метода, али су те методе недовољно ефикасне у контексту пројектовања комплексних структура слободних форми. Претпоставке је да ће у будућности пројектовање ових структура бити виртуално немогуће без уклањања баријера унутар и између три идентификована домена на нивоима концепције, комуникације и конструкције. У том смислу, идентификованим доменима могуће је конфронтирати три главне области конвергенције: пројектант-компјутер/алат, виртуално-физичко и материјално-нематријално.

Конвергенција пројектант-компјутер подстакнута је развојем информационих технологија и достигнућима у области вештачке интелигенције и кибернетике, који проналазе интерпретацију у пројектовању архитектонских система. Упркос покушајима дефинисања аутономних дизајн машина [Sti81] компјутерско пројектовање се и даље у највећој мери ослања на интеракцију пројектанта и рачунара. Примена компјутерских технологија и обрада информација је *modus operandi* који прати добро дефинисан модел изражен као алгоритам или протокол. Односно, генеративно пројектовање је засновано на самоорганизацији или другим унапред детерминисаним аутономним процесима, а његов ток у оквирима је граничних услова који могу да контролишу али не детерминишу резултате. Правила, инструкције или програм могу бити дефинисани различитим језицима, механизмима или обрасцима, међутим рачунарски програми представљају медијум који се тренутно доминантно користи у процесу генеративног пројектовања архитектонских структура.

У генеративним процесима пројектовања примењују се различите методе које симулирају или интерпретирају процесе из природе. Овакви генеративни системи повезани су са концептом синтезе који је заступљен у природним системима. Природа је развила специфичне методе синтезе контролисане, али не и детерминисане физичким информацијама кодираним у ДНК и биохемијским

процесима. Диверзитет и адаптивност организама демонстрирају потенцијале примене ових техника у решавању комплексних пројектних проблема и генерисању иновативних решења и њихових варијација коришћењем простих јединица [Str10]. Као што је приказано, у контексту пројектовања архитектонских структура деривацију оптималних форми могуће је реализовати различитим еволуционим рачунарским стратегијама, а морфогенетске технике, проширују иницијални карактер и циљеве поступака и алата за тражење форме имплицирајући могућности нових начина њихове примене.

Интерфејс дизајн који се ослања на интеракцији пројектант- комјутер користи методе које нуде обећавајући начин за концептуализацију решења. Насупрот традиционалном процесу пројектовања за који је карактеристична директна релација између пројектанта и објекта пројектовања, решење добијено коришћењем генеративних метода резултат је аутономних процеса. У овој поставци, дигитални медији који се користе за продукцију форме имају критични генеративни капацитет, замењујући на тај начин пасивну улогу алата, активном улогом у процесу тражења решења. Дефиниција и имплементација нових система, алата и апликација представља интегрални део генеративног процеса пројектовања.

Развој субрутина и функција прилагођених потребама решавања специфичних проблема, не само да трансформише улогу пројектанта из корисника у оног ко развија рачунарски програм, већ и интензивира интеракцију између пројектанта и рачунара. Употреба компјутерских алгоритама превазилази традиционалне САД парадигме, с обзиром да се на овај начин ефикасније користе потенцијали рачунара у процесу генерисања пројектних решења на интерактивним основама, стварањем аутоматизованих система који антиципирају стања и одговарају на њихове захтеве. Оптимално архитектонско решење резултат је одговарајуће комбинације параметара. У оваквој поставци задатак пројектанта, позициониран између формалне прецизности, меке контроле (*soft-control*) и менаџмента, је да дефинише низ параметрских релација, не само у циљу продукције цртежа, већ у циљу пројектовања кроз цртеж. Резултат је пројектно решење које је блиско фигурацији и које гради различите екосистеме смештене у оквирима социјалног или природног контекста.

Данас генеративни алгоритми различитих дисциплина налазе своју примену у процесу пројектовања. Овакав вид апропријације има за циљ пре свега да унапреди концептуално размишљање, с обзиром да разумевање природе одређене технологије отвара могућност њене адекватније и иновативне примене.

Један број алата поменутих и коришћених у оквирима овог рада производ су отворених заједница програмера и корисника који међусобно размењују и надограђују кодове. Оваква пракса подразумева да је аутор омогућио да изворни код (*source cod*) програма буде јавно доступан корисницима, као и да они имају могућност да га отворе, тестирају, модификују. Предност слободне размене кодова је у могућности унапређења на основу повратних инфомација, сугестија и запажања корисника. С друге стране, корисницима је омогућен приступ компонентама од којих могу да граде алате који одговарају специфичним задацима и на тај начин дају сопствени допринос заједници окупљеној око одређеног проблема.

Концепт *ad hoc* дигиталних алата стран је конвенционалној архитектонској пракси која још увек није сагледала у правом смислу потенцијале овог ресурса. Међутим, ови алати се убрзано развијају и проналазе све већу примену у академској средини и сфери концептуалних истраживања. Преглед тренутно доступних алата индицира да архитекте могу експериментисати њиховом употребом при решавању различитих пројектних задатака. Иако неки од ових алата имају изузетне перформансе, отворене су могућности за даља унапређења у погледу манипулације и контроле модела у циљу омогућавања још веће флексибилности у истраживањима, као и развоја нових алата који ће одговорити потребама решавања најразличитијих проблема.

Конвергенција виртуално-физичко, повезана је са чињеницом да се концепција и комуникација пројектних идеја ослања на читаву мрежу геометријских и негеометријских, аналогних и дигиталних дескрипција. У процесу истраживања, евалуације и комуникације идеја, у циљу што верније репрезентације проблема, користе се различите технике симулације и моделовања, од физичких модела (жичаних модела, модела од такстила или сапунице), преко дигиталних рачунарских техника развијаних од 1970-тих (DR,

PS, FDM, FEA), до актуелне примене технологија дигиталног пројектовања, симулације, анализе и производње (CAD/CAM/CEA, CNC, *Rapid Prototyping*, оптичког мерења, реверзног инжењерства, VR/AR). Дакле, технике физички заснованог моделовања прошле су кроз трансформацију, а њихов развој константно је у правцу елиминисања ограничења чиме се отварају нове могућности њихове употреба у контексту истраживања и праксе.

Дигиталне технологије омогућавају креирање конвергентних окружења заснованих на предностима виртуелих простора моделовања у које се уносе физичке законитости. На овај начин се у процес пројектовања уводе рационалност и реална ограничења. Критично за примену оваквог приступа је развој технологија симулације физичких перформанси које обезбеђују интеграцију, односно очување дизајн-анализа циклуса, попут разматраног изогеометријског концепта. Следећи ниво представља *performative prototyping* приступ који подразумева симулације коришћењем технологија виртуелне реалности (*Virtual Reality* - VR) и проширене реалности (*Augmented Reality* - AR), тј. израду виртуалних прототипова, коришћење дигиталних технологија за брзу продукцију прототипова (*Rapid Prototyping* - RP) за производњу функционалних физичких модела и дигиталних метода мерења у дијагностици понашања структура⁹⁰.

Док коришћење VR/AR окружења представља логичан следећи корак компјутерских симулација, којим се обезбеђује повећана интеракција пројектанта са контекстом симулације, RP технологије нуде различите могућности продукције 3D физичких модела/прототипова у смислу тачности, квалитета материјализације и брзине продукције. Ове конвергентне технологије чији је развој у експанзији, производе моделе који се могу користити за визуелизацију, затим естетске, просторне и структуралне евалуације, као и у различитим врстама функционалних тестова који у случају неконвенционалних површинских система могу представљати неопходан корак који предходи њиховој реализацији. Даље, могућност да се пројектна решења комплексних топологија производе директно

⁹⁰Иако експерименти са физичким моделима за мерење деформација, померања, напона, савијања и лома захваљујући стандардима који су поставиле рачунарске симулације у погледу брзине, тачности и могућности тестирања већег броја опција и случајева оптерећења, имају умањену примену последњих година, напредак RP технологија и дигиталних оптичких техника мерења нуде изузетне могућности.

из дигиталних модела коришћењем 3D штампача свакако ће утицати на процес пројектовања у смислу креирања високо координираних финалних решења.

Конвергенција материјално-нематеријално повезана је са природом архитектуре која своју потребу за ефикасношћу остварује позиционирана између дихотомије материјално и нематеријално, што је изражено и Витрувијевим тројством - чврстоћа (*firmitas*), корисност (*utilitas*), лепота (*venustas*). Иако архитектура представља везу између материјалног обликовања (*fabrica*) и рационалног резновања (*ratiocination*), неконзистентност процеса пројектовања приликом транзиције идеје (нематеријалног) у објекат (материјално), идентификована је као један од кључних проблема комплексних пројеката слободне форме. Неконзистентност је последица праксе да се архитектонска форма дефинише у раној фази пројектовања, без разматрања структураних или других перформанси и укључивања креативних потенцијала које могу поседовати ова ограничења у прве покушаје просторне конфигурације објекта. Овакв приступ окарактерисан високим степеном слободе у концептуланој (креативној) фази често за резултат има пројектна решења произвољне геометрије и захтева доста компромиса и напора у фазама разраде и реализације.

Примена техника за дигиталну производњу све више ослобађа процес пројектовања ограничења наметнутих захтевима изградње. Релација између фаза концепције и продукције редефинисана је успостављањем директне везе, увођењем тзв. *file-to-factory* процедура и CNC производних технологија. Реализација обликовно комплексних пројектних решења постаје све мање питање изводљивости, а све је више у функцији могућности њиховог компјутерског генерисања и нових алата потребних за дигиталну производњу. Технике за брзу производњу прототипова (*rapid prototyping*) омогућавају производњу компликованих типологија директно из компјутерских модела. Техника слична 3D штамп *Counter Crafting* развијена је за потребе аутоматизоване конструкције читавог објекта [Kho04]. Ова или сличне врсте производних техника могле би у будућности наћи примену у реализацији неконвенционалних геометријски комплексних архитектонских пројеката.

Претпоставка је да ће у будућности дигиталне производне технологије имати далеко ширу примену у архитектури, што ће имплицирати бројне позитивне консеквенце попут превазилажења потребе за ригидном стандардизованом производњом у корист масовног прилагођавања (*mass-customization*) које неће утицати на економичност и ефикасност производње. За сада је извесно да унапређене могућности разматраних технологија, које превазилазе њихове иницијалне намене, могу наћи примену као алати за проналажење форме у концептуалној фази архитектонског пројектовања.

Константан развој CAD/CAM/CEA система и аутоматизованих процеса производње постављају изазов архитектонској струци да унапреди сопствена средства продукције у технолошком смислу. Начелно, аутоматизовано пројектовање и производња зависе од три аспекта:

- развоја генеративних система који омогућава истраживање пројектантских концепција,
- примене софтвера који конвертују дигитални модел у серију инструкција и
- унапређења производних машина које извршавају те инструкције материјализујући их у конкретне производе.

Тежиште овог истраживања у оквирима је првог аспекта - развоју и имплементацији генеративног система и ограничено је на домен површинских конструктивних система. Реализација таквог задатка у првом реду захтевала је конвергентан концептуални приступ у смислу повезивања идеја из области инжењерства и архитектуре у јединствен логички систем. Затим конвергентан операциони приступ којим је било потребно обезбедити једноставну аутоматизовану интеракцију алата за дизајн и структуралну анализу у процесу пројектовања. И конвергентан приступ реализацији применом рачунарских технологија. Имплементација овако постављеног система омогућава конципирање површинских структура на рационалним основама, што имплицира већи степен конзистентности и оптимизацију целог процеса њихове продукције.

Преглед акронима

2D, 3D		Дводимензионално, тродимензионално
AR	<i>Augmented Reality</i>	Проширена реалност
BESO	<i>Bi-directional Evolutionary Structural Optimization</i>	Бидирекциона еволуциона структурална оптимизација
CAAD	<i>Computer Aided Architectural Design</i>	
CAD	<i>Computer Aided Design</i>	
CAE	<i>Computer Aided Engineering</i>	
CAGD	<i>Computer Aided Geometric Design</i>	
CAM	<i>Computer Aided Manufacturing</i>	
CASA	<i>Computer Aided Structural Design</i>	
CNC	<i>Computer Numerically Controlled</i>	
DR	<i>Dynamic Relaxation</i>	Динамичка релаксација
EA	<i>Evolutionary Algorithm</i>	Еволуциони алгоритам
ESO	<i>Evolutinary Structural Optimization</i>	Еволуциона структурална оптимизација
FDM	<i>Force Densisty Method</i>	Метод густине сила
FEA	<i>Finite Element Analysis</i>	Анализа методом коначних елемената
GA	<i>Genetic Algorithm</i>	Генетски алгоритам
GUT	<i>Great Unification Theory</i>	
IDE	<i>Integrated Development Environment</i>	Интегрисано развојно окружење
IGA	<i>Isogeometric Analysis</i>	Изогеометријска анализа
L-System	<i>Lyndermayer System</i>	
NURBS	<i>Non-Uniform Rational B-Spline</i>	Неравномерни рационални базни сплајн
PS	<i>Particle Spring</i>	Метода честица ланац/опруга
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>	
TNA	<i>Trust Network Analysis</i>	Анализа мрежа штапова
VJ		
VR	<i>Virtual Reality</i>	Виртуална реалност
ДНК		Дезоксирибонуклеинска киселина
ТРИЗ	<i>Теория решения изобретательских задач</i>	

Преглед ознака

\mathbb{R}^d	d -димензионални простор
X, Y, Z	систем глобалних координата
x, y, z	систем локалних координата
u, v, w	систем параметрских координата
T, N, B	систем локалних координата - Френеов рам који образују јединични вектори тангенте, нормале и бинормале
U, V	чворни вектори
$C(u)$	параметарска крива
$S(u, v)$	параметарска површ
$S_u(u, v), S_v(u, v)$	парцијални изводи површи
C^n	параметрски континуитет
G^n	геометријски континуитет
$B_{i,n}(u)$	Бернштајн базне функције
$B_{i,n}(u)B_{j,m}(u)$	тензорски производ Бернштајн базних функција
$R_{i,n}(u)$	рационалне Бернштајн базне функције
$R_{i,n}(u)R_{j,m}(v)$ $= R_{i,j}(u, v)$	тензорски производ рационалних Bernstein базних функција
$N_{i,p}(u)$	B-Spline базне функције
$N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)$	тензорски производ B-Spline базних функција
$R_{i,p}(u)$	рационалне B-Spline базне функције
$R_{i,p}(u)R_{i,q}(v)$ $= R_{i,j}(u, v)$	тензорски производ рационалних B-Spline базних функција
P_i	контролне тачке
$P_{i,j}$	мрежа контролних тачака
K_1, K_2	прва и друга главна кривина у тачки на површи
K_G	Гаусова кривина
K_M	просечна кривина
$P(u)$	профилна крива - генератриса
$T(v)$	трајекторија - директриса
$M(v)$	матрица која инкорпорира ротацију и неуниформно скалирање
$A(v)$	Глобална матрица трансформације $\{O, X, Y, Z\}$ у $\{o(v), x(v), y(v), z(v)\}$
$B(v)$	функција орјентације
C_0	референтна конфигурација
C_t	просторна конфигурација

X_i	референтне базне координате
x_i	просторне базне координате
θ^i	систем криволинијских конвективних координата средње површи $\theta^1 \equiv u$; $\theta^2 \equiv v$; $\theta^3 \equiv w$
G_i, g_i	коваријантни базни вектор референтне и просторне конфигурације
G^i, g^i	контраваријантни базни вектор референтне и просторне конфигурације
G_{ij}, g_{ij}	коваријантни метрички коефицијенти у референтној и просторној конфигурацији
G^{ij}, g^{ij}	контраваријантни метрички коефицијенти у референтној и просторној конфигурацији
G_3, g_3	нормала на површ у референтној и просторној конфигурацији
G	метрички тензор
δ_i^j	Кронекер делта
u	кинематичко поље померања
$\varphi_{i,j}$	контролна померања
φ_i	задата померања
F	градијент деформације
E	Грин-Лагранжов тензор деформације
A	Ојлер-Алмансијев тензор деформације
S	други Пиола-Кирхофов напон
P	Пиола-Кирхофов напон прве врсте
σ	Кошијев тензор напона
C	материјални тензор четвртог реда
μ, λ	Ламеове константе
E	Јангов модул еластичности
ν	Поасонов коефицијент
ρ	густина
b	запреминске силе
Γ_u	Дирихлеов гранични услов
Γ_t	Нојманов гранични услов
w	тест функције
Ω_x	референтни домен
$\mathcal{V}_{\hat{u}}, \mathcal{V}$	простори тест функција
$H^1(\Omega_x)$	Собољев простор
W	виртуални рад
W_{int}	унутрашњи виртуални рад
W_{ext}	спољашњи виртуални рад
Γ	граница домена у референтној конфигурацији

T	вектор граничних сила
h	дебљина љуске
dA	диференцијална површина средње површи
V	запремина љуске
$a_\alpha, a_\beta, g_\alpha$	базни вектори средње површи
$a_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}$	метрички коефицијенти
$B_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}$	коефицијенти кривине средње површи у референтној и просторној конфигурацији
$K_{\alpha\beta}$	промена кривине средње површи
$\varepsilon_{\alpha\beta}$	мембранске деформација
$E_{\alpha\beta}$	коефицијенти деформације
N	нормалне силе
M	моменти савијања
D	матрица материјала
D^{iso}	матрица изотропног материјала
D^{ort}	матрица ортотропног материјала
K	матрица крутости
K^{int}	унутрашња матрица крутости
K^{ext}	спољашња матрица крутости
K_L	матрица крутости контролног елемента
B_L	матрица трансформације линеарне деформације
L	оператор деформације
e	вектор прираштаја деформације
η	оператор нелинеарне деформације облика
p	вектор расподељеног оптерећења
$Q_{i,j}$	вектор еквивалентних сила i, j -те контролне тачке
R	вектор генералисаних/равнотежних сила
n	величина популације
$f(s, u)$	функција евалуације
s	пројектна варијабла
u	варијабла стања
g_i	услови неједнакости
h_i	услови једнакости
s_l и s_u	најнижа и највиша вредност пројектне варијабле
p_c	вероватноћа укрштања (<i>crossover rate</i>)
p_m	вероватноћом мутације
g	генерацијски јаз (<i>gap</i>)

Преглед илустрација

Слика 1.3.1	Дијаграмски приказ концепције рада.....	24
Слика 2.1.1	Примена методе тродимензионалне графостатике, реализована коришћењем нацртне геометрије у поступку одређивања облика штапасте структуре. Скица преузета из [För92].....	42
Слика 2.1.2	Дијаграмски приказ лука/ланчанице која заузима положај услед утицаја оптерећења /лево/; исти принцип примењен за случај кабловске мреже /десно/.....	45
Слика 2.1.3	Колонија Гуеља, аутор Гауди - формална истраживања применом жичаног модела /лево и у средини/; фотографија модела са насликаним приказом ентеријера пример потраге за алтернативним медијумом репрезентације /десно/. Колаж од форографија преузетих из [Tom89].....	47
Слика 2.1.4	Истраживање форме применом текстилног модела које је спровео Ислер /лево/; финални изглед модела /десно/. Колаж од фотографија преузетих из [Bil11].....	48
Слика 2.1.5	Истраживања форме применом термопластичне фолије ослоњене у угловима и оптерећене равномерноподељеним оптерећењем које је спровео Ислер /лево и десно горе/; финални изглед модела /десно доле/. Колаж од фототографија преузетих из [Вес08]	49
Слика 2.1.6	Истраживања форме применом пнеуматског модела које је спровео Ислер - пнеуматска мембрана у огледном раму /лево/; пнеуматска форма /десно/. Колаж од фотографија преузетих из [Ram11]	50
Слика 2.1.7	Истраживања форме применом екструдиране полиуретанске пене које је спровео Ислер - концепт /лево/; изглед калупа и модела /десно/. Колаж од скице аутора и фотографија преузетих из [Ram11]	51
Слика 2.1.8	Експерименти са моделима од сапунице на Институту за лаке структуре (IL) у Штудгарту спровођени под руководством Ота - модел у форми балона /лево/ модел образован између закривљених ивица /десно/ Колаж од фотографија преузетих са [ILE06]	52
Слика 2.1.9	Истраживања форме преднапрегнутих мембранских система применом модела од растељивог текстила - рад студената Архитектонског факултета Универзитета у Београду. Фотографија Јелена Милошевић	53
Слика 2.1.10	Студије случаја објеката слободних форми генерисаних принципом графостатике у програму <i>eQUILIBIRUM</i> : решетка <i>Waterloo Station</i> , Лондон, 1994. пројектанти архитектуре: Гримшо архитекти (<i>Grimshaw Architects</i>), конструкције: Хант (Hunt) /лево/;	

	решетка <i>Hauptbahnhof</i> , Берлин, 2006. пројектанти архитектуре: Геркан, Марг и партнери (<i>Gerkan, Marg and Partners</i>), конструкције: Азер (<i>Azer</i>) /средина/; скакаоница <i>Bergisel</i> , 2002. пројекатнт Хаидид (<i>Hadid</i>) /десно/. Колаж од фотографија преузетих са [Blo12]55	55
Слика 2.1.11	Резултати генерисање форме применом TNA - <i>RhinoVault</i> програмског модула.....58	58
Слика 2.1.12	Резултати генерисање форме применом методе густине сила - <i>RhinoMembrane</i> програмског модула63	63
Слика 2.1.13	Пример примене динамичке релаксације - кров дворишта Британског музеја, аутор Фостер и партнери (<i>Foster and Partners</i>), конструкција Вилијамс (<i>Williams</i>) из фирме Бјуро Хаполд (<i>Buro Happold</i>): просторни приказ мреже /горе/; приказ мреже пре и после релаксације /доле лево/; еволуција мрежа /доле десно/. Колаж од фотографија преузетих из [Wil14].....65	65
Слика 2.1.14	Структура добијена коришћењем програма <i>CADenary</i> : приказ развоја решење у процесу проналажења форме. Модел преузет из [Kil06]68	68
Слика 2.1.15	Резултати генерисање форме применом маса-ланац система71	71
Слика 2.1.16	Приказ варијантних форми добијених применом принципа обрнутих померања.....80	80
Слика 2.1.17	Био-интерфејс концепт: приказ варијација структуре99	99
Слика 2.1.18	Пројакат <i>Hylomorphic</i> , аутора <i>Open Source Architecture</i> реализован коришћењем програма <i>EifForm</i> - приказ итерација генеративног процеса. Модел преузет из [Ore06].....95	95
Слика 2.1.19	Студија случаја примена <i>ESO</i> методе за реконструкцију фасаде Саграда Фамилије у Барселони, пројектанта Гаудија: део сачуване фотографије Гаудијевих оригиналних цртежа фасаде /лево/; еволуција фасаде. Колаж од прилога преузетих из [Hua 10]98	98
Слика 2.1.20	Еволуциона оптимизација структуре двоструко укљештене греде оптерећене концентрисаном силом на средини распона100	100
Слика 2.2.1	Таксономија метода оптимизације109	109
Слика 2.2.2	Дијаграм конвенционалног генетског алгорита (GA).....115	115
Слика 2.2.3	Пример кодирања тачке.....117	117
Слика 2.2.4	Графички приказ генерација и етапа једне итерације119	119
Слика 2.2.5	Графички приказ рулет-точек селекције119	119
Слика 2.2.6	Графички приказ принципа укрштања у једној и две тачке, униформног и преплетеног укрштања123	123
Слика 2.2.7	Графички приказ принципа интермедијарне и линеарне рекомбинације124	124
Слика 2.2.8	Графички приказ принципа мутације126	126
Слика 2.2.9	Графички приказ примене стратегије елитизма у етапи једне итерације127	127

Слика 2.2.10	Проналажење оптималне форме применом генетског алгоритма	129
Слика 2.3.1	Параметраска крива $C(u)$ /лево/; параметарска површ $S(u, v)$ /десно/.....	137
Слика 2.3.2	Проналажење тачке на криви коришћењем De Casteljau алгоритма	138
Слика 2.3.3	Круг у \mathbb{R}^2 конструисан пројективном трансформацијом квадратне B-Spline криве из \mathbb{R}^3 према [Cot09]: пројективна трансформација полигона контролних тачака P_i^w у контролне тачке P_i /лево/; пројективна трансформације B-Spline криве $C^w(u)$ у NURBS криву $C(u)$ /десно/	139
Слика 2.3.4	Крива формирана спајањем пет сегмената	140
Слика 2.3.5	Класификација параметраских кривих и површи	140
Слика 2.3.6	Bézier кубна крива $n = 3$ /лево/; Bézier 3×3 површ /десно/	141
Слика 2.3.7	Рационална Bézier квадратна крива - кружни лук /лево/; рационална Bézier површ - цилиндрична површ /десно/	142
Слика 2.3.8	B-Spline криве: за исти контролни полигон од 8 контролних тачака означених са \circ различите криве добијене су варирањем степена p , \blacksquare је ознака за чворов	143
Слика 2.3.9	B-Spline површи: за исти контролну мрежу 6×6 контролних тачака приказ квадратне површи /лево/ и кубне површи /десно/	144
Слика 2.3.10	NURBS криве трећег степена, чије су контролне тачке означена са \circ , добијене варирањем тежинског фактора w чворне тачке P_5	145
Слика 2.3.11	NURBS површи: за исту контролну мрежу приказ квадратне површи /лево/ и површи настале варирањем тежинског фактора $w_{2,2} = 10.0$ означене контролне тачке $P_{2,2}$ /десно/	146
Слика 2.3.12	Приказ примена основних геометријских алгоритама инсертовања и уклањања тачака, елевације и редукције степена на криви и површи	151
Слика 2.3.13	Класификација површи према техникама моделовања.....	153
Слика 2.3.14	Општа ротациона површ генерисана ротацијом и скалирањем генератрисе $C_G(u)$ криве око z-осе и директрисе $C_D(v)$	154
Слика 2.3.15	Ротациона површ генерисана ротацијом NURBS криве за 360° око z-осе.....	155
Слика 2.3.16	Swept површ генерисана коришћењем директрисе-трајекторије $C_D(v)$ и генератрисе $C_G(u)$ која се транслира дуж трајекторије: 1/ случај када крива транслира паралелно сама себи и 2/ случај када је пресечна крива управна на трајекторију	156
Слика 2.3.17	Skinned површ генерисана коришћењем скупа пресечних кривих $C_k(u)$ у поступку <i>skinning (lofting)</i>	158
Слика 2.3.18	Skinned површ генерисана коришћењем криве водиље (<i>spine curve</i>) $C_s(u)$ и пресечних крива (<i>section curves</i>) $C_k(v)$	159

Слика 2.3.19	Интерполациона бидирекциона мрежа генерисана коришћењем два скупа кривих $C_k(u)$ и $C_l(v)$	160
Слика 2.3.20	Кунсова површ генерисана коришћењем четири граничне криве $C_k(u)$ и $C_l(v)$	161
Слика 2.3.21	Геометрија и кинематика материјалних површи	172
Слика 2.3.22	Кирховљева танка еластична љуска - илустрација хипотезе о равним пресецима	179
Слика 2.3.23	Кирховљева танка еластична љуска - силе у пресецима	181
Слика 3.1.1	Дијаграм концепта изогеометријске морфогенезе.....	196
Слика 3.1.2	Дијаграм процедуре изогеометријске морфогенезе	198
Слика 3.1.3	Кирхоф-Лав коначни/контролни елемент љуске	205
Слика 3.2.1	Графички приказ прилагођавања функције евалуације	212
Слика 3.2.2	Графички приказ скалирања функције	213
Слика 3.2.3	Графички приказ дводиманзионалног хромозома и принципа дводимензионалног укрштања	216
Слика 3.2.4	Резултати функционалног теста 1	221
Слика 3.2.5	Резултати функционалног теста 2	223
Слика 3.2.6	Резултати функционалног теста 3	225
Слика 3.3.1	Дефиниција домена пројектовања и домена претраге	228
Слика 3.3.2	Дијаграм генеративне процедуре тражења форме.....	231
Слика 3.3.3	Макета крова клуба <i>Táchira</i> , Каракас, Венецуела, 1957. Фотографија преузета из [Esc05].....	232
Слика 3.3.4	Идејна скица комплекса и извоф из техничке документације за пројекат предметног објекта спортског клуба клуба <i>Táchira</i> . Колаж од прилога преузетих из [Esc05].....	233
Слика 3.3.5	Процес тражења форме крова клуба <i>Táchira</i> који је спровео Тороха. Колаж од прилога преузетих из [Esc05]	234
Слика 3.3.6	Дијаграмски приказ процеса проналажења форме љуске.....	236
Слика 3.3.7	Експериментални пројекат 1 - геометрија површинског система репрезентована помоћу NURBS површи, гранични услови и пројектне варијабле.....	237
Слика 3.3.8	Експериментални пројекат 1 - приказ резултата морфогенезе.....	240
Слика 3.3.9	Визуелизација резултата - модел форме добјене као резултата процеса ИГМ конструисан техником 3D штампе	243
Слика 3.3.10	Дијаграм генеративне процедуре унапређења форме	246
Слика 3.3.11	Дијаграмски приказ процеса проналажења форме мембранске структуре.....	248
Слика 3.3.12	Апроксимација форме мембранске конструкције израдом физичког модела.....	249

Слика 3.3.13	Дигитализација макете коришћењем технике ласерског <i>3D</i> скенирања помоћу уређаја <i>ZScanner 700</i> /горе лево/, упоредни приказ макате и облака тачака /горе десно/, финална геометрија - полигонална мрежа /доле/251
Слика 3.3.14	Експериментални пројекат 2 - геометрија површинског система репрезентована помоћу NURBS површи, гранични услови и пројектне варијабле.....253
Слика 3.3.15	Експериментални пројекат 2 - приказ резултата процеса морфогенезе.....256

Преглед табела

Табела 2.2.1	Номенклатура генетског алгорита	112
Табела 2.2.2	Псеудо-код генетског алгорита	114
Табела 2.3.1	Особине базних функција параметраских кривих и површи	147
Табела 2.3.2	Класификација површи према врсти Гаусове кривине	152
Табела 2.3.3	NURBS у изогеометријској анализи на основу [Cot09]	167
Табела 2.3.4	Компарација FEA и NURBS засноване IGA на основу [Cot09] ...	169
Табела 3.2.1	Опције имплементације ИГМ процедуре	209
Табела 3.2.2	Примењени параметри материјала у функционалним тестовима	219
Табела 3.2.3	Примењени параметри генетског алгорита у функционалним тестовима	220
Табела 3.3.1	Пројектни експеримент 1 - примењени параметри материјала	238
Табела 3.3.2	Пројектни експеримент 1 - примењени параметри генетског алгорита	239
Табела 3.3.3	Пројектни експеримент 1 - имплементација процедуре	239
Табела 3.3.4	Пројектни експеримент 2 - примењени параметри материјала	254
Табела 3.3.5	Пројектни експеримент 2 - примењени параметри генетског алгорита	255
Табела 3.3.6	Пројектни експеримент 2 - имплементација процедуре	255

Референце

- [Adr14] Adriaenssens, S., Block, P., Veenendaal, D., & Williams, C. (ed.). (2014). *Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization*. London and New York:Routledge.
- [Ale64] Alexander, C. (1964). *Notes on the Synthesis of Form*. Cambridge, Massachusetts:Harvard University Press.
- [All10] Allen, E., Z., W., & Group, B. S. (2010). *Form and Forces: Designing Efficient and Expressive Structures*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.
- [ALF15]ALFA group (n.d.). *The ALFA group: Anyscale Learning For All*. Retrieved maj 27, 2015, from ALAFA: Computer Science and Artificial Intelligence Laboratory, MIT:<http://groups.csail.mit.edu/EVO-DesignOpt/groupWebSite/>
- [Arg72]Argyris, J. H., & Scharpf, D. W. (1972). Large Deflection Analysis of Prestressed Networks. *J. Struct. Div. (Proc. ASCE)* (98), 633-654.
- [Arg74]Argyris, J., Angelopoulos, J., & Bichat, B. (1974). A General Method for the Shape Finding of Lightweight Tension Structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (3), 135-149.
- [Arg68]Argyris, J., Fried, I., & Scharpf, D. (1968). The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. *The Aeronautical Journal of the Royal Aeronautical Society* , 72, pp.701–709.
- [Arr04] Arora, J.S. (2004). *Introduction to Optimum Design*. Elsevier Academic Press.
- [Arr07] Arora, J.S. (2007). *Oprimization of Structural and Mechanical Systems*. World Scientific Pub. Co Inc.
- [Aut11]Autodesk. (2011). *Nucleus*. Retrieved Avgust 4, 2013, from Autodesk Research:<http://www.autodeskresearch.com/projects/nucleus>
- [Aut111]Autodesk, Inc. (2011). *Autodesk Acquires T-Splines Modeling Technology Assets*. Retrieved from Autodesk:
<http://news.autodesk.com/news/autodesk/20111222005259/en/Autodesk-Acquires-T-Splines-Modeling-Technology-Assets>
- [Baj95] Bajaj, C., Chen, J., & Xu, G. (1995). Modeling with cubic A-patches. *ACM Transactions on Graphics* , 14, pp.103–133.
- [Baj02] Bajaj, C., Schaefer, S., Warren, J., & Xu, G. (2002). A subdivision scheme for hexahedral meshes. *Visual Computer* , 18, pp.343–356.
- [Bar77] Barne, M. R. (1977). *Form-Finding and Analysis of Tension Space Structures by Dynamic Relaxation. Ph.D thesis*. London: City University.

- [Bar99] Barnes, M. R. (1999). Form-finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation. *International Journal of Space Structures* , 14(2), pp.89-104.
- [Bas11] Basso, P. D. (2011). Form-finding methods for structural frameworks: a review. *Proceedings of the International Association of Shells and Spatial Structures*.
- [Bat95] Bathe, K.-J. (1995). *Finite Element Procedures* (2nd Edition ed.). Prentice Hall.
- [Baz06] Bazilevs, Y., Beirao de Veiga, L., Cottrell, J., Hughes, T., & Sangalli, G. (2006). Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* , 16, pp.1031–1090.
- [Baz09] Bazilevs, Y., Calo, V., Cottrell, J.A., E. J., Hughes, T., Lipton, S., et al. (2009). Isogeometric analysis using T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [Baz08] Bazilevs, Y., V.M. Calo, V., Cottrell, J., Evans, J., Hughes, T., Lipton, S., et al. (2008). Isogeometric Analysis using T-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , Preprint submitted to Elsevier.
- [Bec08] Bechthold, M. (2008). *Innovative Surface Structures: Technologies and Applications*. New York & Oxon: Taylor & Francis.
- [Bel69] Bell, K. (1969). A refined triangular plate bending element. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* , 1, pp.101–122.
- [Bel00] Belytschko, T., Liu, W., & Moran, B. (2000). *Nonlinear Finite Element Analysis for Continua and Structures*. JohnWiley and Sons.
- [Ben89] Bendsøe, M. P. (1989). Optimal shped design as a metrial distribution problem. *Structural Optimization* , 1, pp.193-202.
- [Ben10] Benson, D., Bazilevs, Y., Hsu, M.-C., & Hughes, T. (2010). *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , Volume 199 (Issue 5-8), pp.276-289.
- [Bes07] Besson, S., & Debrégeas, G. (2007). Statics and dynamics of adhesion between two soap bubbles. *Eur. Phys. J. E 24* , pp.109-117 (PDF).
- [Béz72] Bézier, P. E. (1972). *Numerical Control: Mathematics and Applications*. New York: John Willey.
- [Bil80] Billington, D. P. (1980). *Heinz Isler as Structural Artist*. Princeton: The Art Museum, Princeton University.
- [Bil11] Billington, D. P. (2011). Heinz Isler: From Delft to Princeton and Beyond. *Journal of the IASS* , 52 (3), pp. 135-141.
- [Bil83] Billington, D. (1983). *The Tower and the Bridge*. New York: Basic Books.
- [Ble11] Bletzinger, K.-U. (2011). Form Finding and Morphogenesis. In Mungan, I & Abel, J. (eds.), *Fifty Years of Progress for Shell and Spatial Structures, 50th Anniversary Jubilee of the IASS (1959-2009)*. IASS Publ.

- [Ble99] Bletzinger, K.-U. (1999). A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy. *International* , 14, pp.131–145.
- [Blo09] Block, P. (2009). *Thrust Network Analysis: Exploring Three-dimensional Equilibrium*. PhD Dissertation. Massachusetts Institute of Technology.
- [Blo90] Bloor, M., & Wilson, M. (1990). Representing PDE surfaces in terms of B-splines. *Computer-Aided Design* , 22 (6), pp.324-331.
- [Blo12] Block Research Group (2009-2012). *eQUILIBRIUM: an interactive, graphic statics-based learning platform for structural design*. Retrieved januar 25, 2014, from BLOCK Research Group: <http://block.arch.ethz.ch/equilibrium/>
- [Bod10] Boden, M. A., & Edmonds, E. (2010). What is Generative Art? *Digital Creativity* , 20 (1-2), 21-46.
- [Bre94] Brenner, S., & Scott, L. (1994). *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer Verlag.
- [Bro08] Bronstein, A., Bronstein, M., & Kimmel, R. (2008). *Numerical Geometry of Non-rigid Shapes*. Springer-Verlag.
- [Bur05] Burry, J., Felicetti, P., Burry, M. C., & Xie, Y. M. (2005). Dynamic Structure Modeling - a Collaborative Design Exploration. *Inter. J. Arch. Comput.* , 3 (1), 27-42.
- [Cat78] Catmull, E., & Clark, J. (1978). Recursively Generated B-spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes. *Computer-Aided Design* , 10 (6), pp.350-355.
- [Cec10] Ceccato, C., Hesselgren, L., Pauly, M., Pottmann, H., & Wallner, J. (2010). *Advances in Architectural Geometry 2010*. Vienna: Springer – Verlag.
- [Cel91] Celniker, G., & Gossard, D. (1991). Deformable curve and surface finite-element for free-form shape design. *Computer Graphics* , Vol.25 (4), pp.257-266.
- [Cel92] Celniker, G., & Welch, W. (1992). Linear constraints for deformable B-spline surfaces. *Proceedings of Symposium on Interactive 3D Graphics*, (pp.165-170).
- [Cha74] Chakin, G. (1974). An Algorithm for High Speed Curve Generation. *Computer Graphics and Image Processing* , 10 (6), pp. 350-355.
- [Chu03] Chui, C., Ohmori, H., & Sasaki, M. (2003). Computational Morphogenesis of 3D structures by extended ESO Method. *J. Inter. Assoc. Shell Spatial Structures* , 44 (1), pp.51-61.
- [Cir00] Cirak, F., Ortiz, M., & Schroder, P. (2000). Subdivision surfaces: a new paradigm for thin shell analysis. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* , 47, pp.2039–2072.
- [Cla88] Clauser, H. R. (1988). Towards a Dynamic, Generative Computer Art. *Leonardo* , 21 (2), pp.115-122.

- [Clo65] Clough, R., & Tocher, J. (1965). Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. *Proceedings of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Wright-Patterson A.F.B.
- [Coa99] Coates, P., Broughton, T., & Jackson, H. (1999). Three-Dimensional Design Worlds using Lindenmayer system and Genetic Programming. In P. J. Bentley, *Evolutionary Design by Computers* (p. Chapter 14). London, Uk: Morgan kaufmann.
- [Coe06] Coenders, J. B. (2006). Computational tools for design and engineering of complex geometrical structures: From a theoretical and a practical point of view. In K. F. Osterhuis, *Game Set And Match II. On Computer Games, Advanced Geometries, and Digital Technologies* (pp.006). Episode Publishers.
- [Coh01] Cohen, E., Reisenfeld, R. F., & Elber, F. (2001). *Geometric Modeling With Splines: An Introduction*. A. K. Petrs, Ltd.
- [Col10] Colletti, M. (2010). Exuberance: New Virtuosity in Contemporary Architecture. *Architectural Design*, 80 (2).
- [Coo67] Coons, S. A. (1967). *Surfaces for Computer Aided Design of Space Form*. MIT Project MAC, AUC-TR-41.
- [Cot09] Cottrell, J. A., Hughes, T. J., & Bazilevs, Y. (2009). *Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA*. UK: John Wiley & Sons.
- [Cot07] Cottrell, J., Hughes, T., & Reali, A. (2007). Studies of refinement and continuity in isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, pp.4160–4183.
- [Cot06] Cottrell, J., Reali, A., Bazilevs, Y., & Hughes, T. (2006). Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, pp.5257–5296.
- [Cow68] Cowper, G., Kosko, E., Lindberg, G., & Olson, M. (1968). Formulation of a new triangular plate bending element. *CASI Transaction – Canadian Aeronautics and Space Institute*, 1, pp. 86–90.
- [Cox72] Cox, M. G. (1972). The Numerical Evaluation of B-Splines. *J. Inst. Mathematics and Applications*, 10, pp. 134-149.
- [Cre90] Cremona, L. (1890). *Graphical Statics: Two Treatises on the Graphical Calculus and Reciprocal Figures in Graphical Statics*. Translated by Thomas Hudson Beare. Oxford: Clarendon Press.
- [Cre79] Cremona, L. (1879). *Le Figure Reciproche nella Statica Grafica*. Milano: Ulrico Hoepli.
- [Cru08] Cruz, M., & Pike, S. (g.ed.). (2008). Neoplastic Design. *Architectural Design*, 78 (6).
- [Cul66] Culmann, C. (1864/1866). *Die graphische Statik*. Zurich: Verlag von Meyer & Zeller.

- [Day69]Day, A. S., & Bunce, J. (1969). The Analysis of Hanging Rooves. *Arup Journal*, 9.
- [DeB72]De Boor, C. (1972). On Calculation with B-Splines. *J. Approximation Theory*, 6 (1), pp.50-62.
- [DeV68]De Veubeke, B. (1968). An equilibrium model for plate bending. *International Journal of Solids and Structures*, 4, pp. 447–468.
- [Dem08]Demkowicz, L., Kurtz, J., Pardo, D., Paszynski, M., Rachowicz, W., & Zdunek, A. (2008). *Computing with hp-Adaptive Finite Elements, Vol 2: Frontiers: Three Dimensional Elliptic and Maxwell Problems with Applications*. Chapman & Hall/CRC.
- [Dim06]Dimitrov, D., Schreve, K., & de Beer, N. (2006). Advances in three dimensional printing - state of art and future perspectives. *Rapid Prototyping*, 12 (3), pp.136-147.
- [Doo78]Doo, D. (1978). A Subdivision Algorithm for Smoothing Down Irregularly Shaped Polyhedrons. *Proceedings on Interactive Techniques in Computer Aided Design*, (pp.157-165).
- [Dor08]Dorfel, M., Juttler, B., & Simeon, B. (2008). Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with t-Splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Published online. doi:10.1016/j.cma.2008.07.012.
- [Eng02]Engel, G., Garikipati, K., Hughes, T., Larson, M., & Mazzei, L. (2002). Continuous/discontinuous finite element approximations of fourth-order elliptic problems in structural and continuum mechanics with applications to thin beams and plates, and strain gradient elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, pp.3669–3750.
- [Esc90]Eschenhauer, H., Koski, J., & Osyczka, A. (1990). *Multicriteria Design Optimization, Procedures and Application*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- [Esc05]Escrig, F., & Sánchez, J. (2005). La bóveda de hormigón del Club Táchira en Caracas. *Informes de la Construcción*, Vol.57 (499-500), pp.133-144.
- [Fra99]Farin, G. E. (1999). *Curves and Surfaces for CAGD, A Practical Guide, Fifth Edition*. Morgan Kaufmann Publishers.
- [Fra99a]Farin, G. E. (1999). *NURBS Curves and Surfaces: From Projective Geometry to Practical Use, 2nd Edition*. A. K. Peters, Ltd.
- [Fid97]Fidler, R. (1997). *Mediamorphosis: Understanding New Media*. SAGE Publications, Inc.
- [Fir10]Firl, M. (2010). *Optimal Shape Design of Shell Structures. Doctoral Dissertation*. Lehrstuhl für Statik der Technischen Universität München.
- [Fiv13]Fivet, C., & Zastavni, D. (2013). Constraint-Based Graphic Statics: New Paradigms of Computer-Aided Structural Equilibrium Design. *Journal of the IASS*, 54 (4), pp.271-280.

- [Fle12] *FlexGP Project*. (2012). Preuzeto 16.05.2012. sa The FlexGP Project:
<http://flexgp.csail.mit.edu/index.php>
- [Föp92] Föppl, A. (1892). *Das Fachwerk im Raume*. Leipzig: Verlag von B.G. Teubner.
- [For72] Forrest, A. R. (1972). Interactive Interpolation and Approximation by Bezier Polynomials. *Comp J.*, 15, pp.71-79.
- [Fra89] Franke, H. W. (1989). Mathematics As an Artistic-Generative Principle. *Leonardo* (Supplemental Issue).
- [Fra95] Frazer, J. (1995). *An Evolutionary Architecture*. London: Architectural Association.
- [Gal03] Galanter, P. (2003). *What is Generative Art? Complexity Theory as a Context for Art Theory*. Preuzeto 20.03.2014, sa Philip Galanter:
http://philipgalanter.com/downloads/ga2003_what_is_genart.pdf
- [Gal62] Gallagher, R., Padlog, J., & Bijlaard, P. (1962). Stress analysis of heated complex shapes. *American Rocket*, 32, pp.700–707.
- [Gar09] Garber, R. (g.ed.). (2009). Closing the Gap: Information Models in Contemporary Design Practice. *Architectural Design*, 79 (2).
- [Geo15] GeoGebra, International Institute. (2015). *Geogebra: Dynamic mathematics for learning and teaching*.
Preuzeto 06.05.2015. sa <https://www.geogebra.org/>
- [Gol89] Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass.
- [Gom08] Gomez, H., Calo, V., Bazilevs, Y., & Hughes, T. (2008). Isogeometric analysis of the Cahn-Hilliard phase-field model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, pp.4333–4352.
- [Gor69] Gordon, W. (1969). Spline-blended surface interpolation through curve networks. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 18, pp.931–952.
- [Gra86] Grafe, R. (1986). On the Form Development of Arches and Vaults (in German). *History of Architecture*, 50-67.
- [Gra14] Gramazio, F., & Kohler, M. (2014). Made by Robots: Challenging Architecture at a Larger Scale. *Architectural Design*, 84 (3).
- [Gre03] Greenwold, S., Allen, E., & Zalewski, W. (2003). *Active Statics*. Retrieved januar 20, 2013, from acg.media.mit.edu/people/simong/statics/data/index.html
- [Gre83] Gregory, J. (1983). n-sided surface patches. In J. Gregory (Ed.), *Mathematics of Surfaces* (pp. pp.217–232). Clarendon Press.
- [Gro02] Groat, L., & Wang, D. (2002). *Architectural Research Methods*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- [Gro12] Grobman, Y. J., & Neuman, E. (2012). *Performativizam: Form and Performance in Digital Architecture*. New York: Routledge.

- [Gru11] Gruber, P. (2011). *Biomimetics in Architecture - Architecture of Life and Buildings*. Wien and New York: Springer-Verlag.
- [Gru00] Grundig, L., Moncrie, E., Singer, P., & Strobel, D. (2000). A history of the principal developments and applications of the force density method in Germany 1970-1999. In E. Papadrakakis (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures, IASS-IACM 2000*, (p.-). Chania-Crete, Greece.
- [GuX08] Gu, X., & Yau, S.-T. (2008). *Computational Conformal Geometry*. International Press.
- [Hab82] Haber, R. A. (1982). Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part I – Formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics* , 30, pp.263–284.
- [Ham13] Hambleton, D. (n.d.). *SPM Vector Components*. Preuzeto 20.06.2013. sa Food4rhino: <http://www.food4rhino.com/projects/spm>
- [Hem09] Hemberg, M. (2009). *Gener8: A surface design tool*. Preuzeto 06.06.2011. sa from Gener8: <http://projects.csail.mit.edu/emergentDesign/genr8/>.
- [Hen09] Hensel, M., & Menges, A. (2009). Patterns in Performance - Oriented Design: An Approach Towards Pattern Recognition, Generation, and Instrumentalisation. *Architectural Design* , 79 (6), pp 88-93.
- [Hen08] Hensel, M., & Menges, A. (2008). Versatility and Vicissitude: Performance in Morpho-Ecological Design. *Architectural Design* , 78 (2).
- [Hen04] Hensel, M., Menges, A., & Weinstock, M. (g.ed.). (2004). Emergence: Morphogenetic Design Strategies. *Architectural Design* , 74 (3).
- [Hen06] Hensel, M., Menges, A., & Weinstock, M. (g.ed.). (2006). Techniques and Technologies in Morphogenetic Design. *Architectural Design* , 76 (2).
- [Hol75] Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial intelligence*. The Univeristy of Michigan Press.
- [Hol00] Holzapfel, G. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics*. Chichester: John Wiley & Sons.
- [Hua10] Huang, H., & Xie, Y. M. (2010). *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd.
- [Hug10] Hughes, T. J., & Evans, J. A. (2010). *Isogeometric analysis. ICES REPORT 10- 18*. The Institute for Computational Engineering and Sciences. Austin: The University of Texas.
- [Hug05] Hughes, T. J., Cottrell, J. A., & Bazilevs, Y. (2005). Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering* , 194, pp.4136-4195.

- [Hug00] Hughes, T. (2000). *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications.
- [ILE06] ILEK, Stuttgart. Preuzeto 07.11.2006.
sa <http://www.uni-stuttgart.de/ilek/Fotoarchiv/Fotoarchiv.html>
- [Ing93] Ingber, D. E. (1993). Cellular Tensegrity: Defining New Rules of Biological Design That Govern the Cytoskeleton. *Journal of Cell Sci.*, 104, pp.613-627.
- [Ing85] Ingber, D. E., & Jameison, J. D. (1985). Cells as a Tensegrity Structures: Architectural Regulation of Histodifferentiation by Physical Forces Transduced Over Basement Membrane. In L. C. Anderson, G. C. Gahmberg, & P. Ekblom, *Gene Expression During Normal and Malignant Differentiation* (pp.13-32). Orlando: Academic Press.
- [Iro66] Irons, B. (1966). Engineering application of numerical integration in stiffness method. *Journal of the American*, 14, pp.2035–2037.
- [Isl80] Isler, H. (1980). New Shapes for Shells – Twenty Years After, World Congress on Shell and Spatial Structures: 20th Anniversary of IASS. *Bulletin of the IASS* (71/72), pp.9-26.
- [Isl59] Isler, H. (1959). New Shapes for Shells, IASS Colloquium on Non-traditional Construction Processes of Shell Structures. *Bulletin of the International Association for Shell Structures*, n. 8, 1961, (p. 5+5 pages). Madrid.
- [IxR14] ixR. (2014). *RhinomeMbrane: Form-Finder plug-in for Rhinoceros*. Retrieved januar 15, 2014, from ixCube: <http://www.ixforten.com/rhinomembrane.htm>
- [Jen06] Jenkins, H. (2006). *Convergence Culture: Where Old and New Media Collide*. New York: NYU Press.
- [Jua00] Juarez, A. (2000). Topology and Organicism in the Work of Louis I. Kahn. Notes on the City Tower. *Perspecta*, Juarez, A., "Topology and Organicism in the Work of Louis I. Kahn. Notes on the CiVol.31, Reading Structures, 70-80.
- [Kag98] Kagan, P., Fischer, A., & Bar-Yoseph, P. Z. (1998). New B-spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 41, pp.435–458.
- [Kem04] Kemmler, R. (2004). *Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie und Formoptimierung*. PhD thesis. Institut für Baustatik, Uni Stuttgart.
- [Kho04] Khoshnevis, B. (2004). Automated Construction by Contour Crafting - Related Robotics and Information Technology. *J. of Automation in Construction*, 13 (1), pp.5-19.
- [Kil06] Kilian, A. (2006). *Design Exploration through Bidirectional Modeling of Constraints*. PhD dissertation. Cambridge, MA: MIT.
- [Kil06a] Kilian, A. (2006). *Hanging modeler: CADenary tool v.2 [Computer software]*. Preuzeto 25.05.2013. sa <http://www.designexplorer.net/newscreens/cadenarytool/cadenarytool.html>.

- [Kol05] Kolarevic, B. (2005). *The Architecture in Digital Age*. New York and London: Spon Press.
- [Kol90] Kolleger, J., & Mehlhorn, G. (1990). Analysis of a Free-Formed Reinforced Concrete Model Shell. *Proc. 2nd Int. Conf. Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*. Swansea, UK: Pineridge Press.
- [Kov06] Kovačević, D. (2006). *MKE modeliranje u analizi konstrukcija*. Beograd: Građevinska knjiga a.d.
- [Kri13] Krish, S. (n.d.). *Generative Design*. Retrieved jun 21, 2013, from Sivam Krish: <http://www.sivamkrish.com>
- [Lal09] Lally, S. (g.ed.). (2009). Energies: New Material Boundaries. *Architectural Design*, 79 (3).
- [Law80] Lawson, B. (1980). *How Designers Think*. London: Architectural Press Ltd.
- [Lea09] Leach, N. (2009). Digital Morphogenesis. *Architectural Design*, 79 (1), pp.32-37.
- [Lee81] Lee, E. T. (1981). *A Treatment of Conics in Parametric Rational Bezier Form, Boeing documents*. Seattle, Wash.: Boeing.
- [Leg11] Legendre, G. (2011). Mathematics of Space. *Architectural Design*, 81 (4).
- [Lew03] Lewis, W. (2003). *Tension structures. Form and Behaviour*. London: Thomas Telford.
- [Lin76] Linkwitz, K. (1976). Combined use of computation techniques and models for the process of form finding for prestressed nets, grid shells and membranes. *Proceedings of Internationalen Symposium Weitgespannte Flächentragwerke*.
- [Loo89] Loop, C., & DeRose, T. (1989). A multisided generalization of B'ezier surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 8, pp.204–234.
- [Man98] Maneski, T. (1998). *Kompjutersko modeliranje i proračun struktura*. Beograd: Mašinski fakultet Univerzitetu u Beogradu.
- [Mar76] March, L. (1976). *The Architecture of Form*. Cambridge University Press.
- [Mar03] Martin, R. (2003). *The Organizational Complex: Architecture, Media and Corporate Space*. Camb. Mass.: MIT Press.
- [Mau98] Maurin, B., & Motro, R. (1998). The Surface Stress Density Method as a Form-Finding Tool for Tensile Membranes. *Engineering Structures*, 20 (8), pp.712-719.
- [McL11] McLean, A. (2011). *Artist-Programmers and Programming Languages for the Arts, PhD Thesis*. Goldsmith, Univeristy of London.
- [Men12] Menges, A. (g.ed.). (2012). Material Computation: Higher Integration in Morphogenetic Design. *Architectural Design*, 82 (2).
- [Men10] Menges, A. (2010). Material Information: Integrating Material Characteristics and Behavior in Computation Design for Performative Wood Construction.

- Proceedings of the 30th Annual Conference of the Association for Computer Aided Design in Architecture (ACADIA)*, (pp.151-158). New York.
- [Mic04]Michell, A. (1904). The limits of economy of material in frame-structures. *Philosophical Magazine* , 8(47), pp.589-597.
- [Mić90]Mićunović, M. (1990). *Primenjena mehanika kontinuuma*. Beograd: Naučna knjiga.
- [Mit98] Mitchell, M. (1998). *An introduction to Genetic Algorithms*. Cambridge: The MIT Press.
- [Mit90] Mitchell, W. J. (1990). *The Logic of Architecture - Design, Computation, and Cognition*. MIT Press.
- [Mol68]Moles, A. (1968). *Information Theory and Easthetic Perception*. (J. E. Cohen, Trans.) University of Illinois Press.
- [MPa12]MPanel. (n.d.). *MPanel*. Preuzeto 15.12.2012. sa MPanel: all about tension structures: <http://www.meliar.com/>
- [Mun95]Munjiza, A., Owen, D., & Bicanic, N. (1995). A combined finite-discrete element method in transient dynamics of fracturing solids. *Engineering Computations* , 12, pp.145–174.
- [Nay92]Nayroles, B., Touzot, G., & Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method: diffuse approximations and diffuse elements. *Computational Mechanics* , 10, pp.307–318.
- [Neg70]Negroponte, N. (1970). *The Architecture Machine: Towards a More Human Environment* . Cambrige, Mass: MIT Press.
- [Ner05]Nerdinger, W. (2005). *Frei Otto Complete Works: Lightweight Construction, Natural Design*. Basel: Birkhauser - Publishers for Architecture.
- [Nes00]Nestorović, M. (2000). *Konstruktivni sistemi - principi oblikovanja i konstruisanja*. Beograd: Arhitektonski fakultet Univerziteta u Beogradu.
- [Ona00]Onate, E., & Zarate, F. (2000). Rotation-free triangular plate and shell elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* , 47, pp.557–603.
- [Ope06]Open Source Architecture, L. A. (2006). The Hylomorphic Project - Open Source Architecture's participation at The GenHome Project. cmm.cenart.gob.mx/delonda/textos/hylo.pdf . Los Angeles.
- [ORe01]O'Reilly, U.-M. (2001). *Agency-GP: A Spatial Exploration Tool for Architects Based on Evolutionary and Agent Computation*. Preuzeto 15.04.2012. sa Agency-GP: <http://www.ai.mit.edu/projects/emergentDesign/agency-gp/>
- [ORe08]O'Reilly, U.-M. (2001-2008). *Software Projects of the Emergent Design Group: at the MIT Artificial Intelligence Lab*. Preuzeto 16.04.2012. sa <http://www.ai.mit.edu/projects/emergentDesign/>
- [ORe12]O'Reilly, U.-M. (n.d.). Preuzeto 16.05.2012. sa <http://people.csail.mit.edu/unamay/>

- [Ott94] Otto, F., & Rasch, B. (1995). *Finding Form: Towards an Architecture of the Minimal*. Stuttgart.
- [Oxm11] Oxman, N. (2011). Proto-Design: Architecture's Primordial Soup and the Quest for Units of Synthetic Life. *Architectural Design*, 81 (2), pp.100-105.
- [Oxm09] Oxman, R. (2009). Performative design: a performance-based model of digital architectural design. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 36, pp.1026-1037.
- [Oxm10] Oxman, R., & Oxman, R. (g.ed.). (2010). The New Structuralism: Design, Engineering and Architectural Technologies. *Architectural Design*, 80 (4).
- [Pan14] Panagiotis, M. & Sawako, K. (2014). *Millipede*. Retrieved decembar 12, 2014, from Sawapan: <http://www.sawapan.eu/>
- [Pau08] Pauletti, R. P. (2008). The natural force density method for the shape finding of taut structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, pp.4419–4428.
- [Pea96] Pearce, M., & Spiller, N. (g.ed.). (1996). Architects in Cyberspace. *Architectural Design*, 65 (11/12).
- [Pet13] Peters, B., & De Kestelier, X. (2013). Computation Works: The Building of Algorithmic Thought. *Architectural Design*, 83 (2).
- [Pha92] Phaal, R., & Calladine, C. R. (1992). A simple class of finite-elements for plate and shell problems: 1. Elements for beams and thin flat plates. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 35, pp.955–977.
- [Phi14] Philipp, B., Breitenberger, M., Wüchner, R., & Bletzinger, K.-U. (2014). Design of architectural membranes with isogeometric elements. In E. Oñate, J. Oliver, & A. Huerta (Ed.), *Proceedings of WCCM XI, ECCM V, ECFD VI*.
- [Pia13] Piacentino, G. (2006-2013). *Weaverbird – Topological Mesh Editor*. Preuzeto 5.08.2014. sa <http://www.giuliopiacentino.com/weaverbird/>
- [Pie91] Piegl, L. (1991). On NURBS: A Survey. *IEEE Comput. Graph. and Apl.*, 10 (1), pp. 55-71.
- [Pie97] Piegl, L., & Tiller, W. (1997). *The NURBS Book. 2nd Edition*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag.
- [Pik12] Piker, D. (2012). *Kangaroo*. Preuzeto 17.05.2014. sa Grasshopper: Algorithmic modeling for Rhino: <http://kangaroo3d.com/>
- [Pot07] Pottman, H., Asprel, A., Hofer, M., & Kilian, A. (2007). *Architectural Geometry*. Bently Press.
- [Pro09] Provatidis, C. (2009). Integration-free Coons macroelements for the solution of 2D Poisson problems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 77, pp.536–557.
- [Pru04] Prusinkiewicz, P., & Lindenmayer, A. (2004). *The Algorithmic Beauty of Plants*. New York: Electronic version of the book that was published by Springer-Verlag in 1990. and reprinted in 1996.

- [Pug09]Pugnale, A. (2009). *Engineering Architecture Advances of a Technological Practice*. Torino: Politecnico di Torino.
- [Que98]Querin, O. M., Steven, G. P., & Xie, Y. M. (1998). Evolutionary Structural Optimization (ESO) using bidirectional algorithm. *Engineering Computations*, 15 (8), pp.1031-1048.
- [Rad14]Radenković, G. (2014). *Izogeometrijska teorija nosača*. Beograd: Univerzitet u Beogradu, Arhitektonski fakultet.
- [Ram91]Ramaswamy, G. S., & Rajasekaran, S. (March 1991). *Computer-Aided Form Generation of Funicular Shells*. Boston: ACI-Sping Convention.
- [Ram11]Ramm, E. (2011). Heinz Isler Shells – The Priority of Form. *Journal of the IASS* (52), pp.143-154.
- [Ram04]Ramm, E. (2004). Shape Finding of Concrete Shell Roofs. *Journal of the IASS*, 45, pp.29-39.
- [Ram91a]Ramm, E., & Mehlhorn, G. (1991). On Shape Finding Methods and Ultimate Load Analysis of Reinforced Concrete Shells. *Engineering Structures* (13), 178-198.
- [Rav77]Raviart, P., & Thomas, J. (1977). Primal hybrid finite element methods for 2nd-order elliptic equations. *Mathematics of Computation*, 31, pp.391–413.
- [Rea07]Reas, C., & Fry, B. (2007). *Processing: A Programming Handbook for Visual Designers and Artists*. Cambridge: The MIT Press.
- [Rip12]Rippmann, M., Lachauer, L., & Block, P. (2012). *RhinoVAULT: Designing Funicular Form with Rhino*. Preuzeto 26.06.2013. sa Block Research Group: <http://www.block.arch.ethz.ch/tools/rhinovault>
- [Rob15]Robert McNeel & Associates (2015). *Rhinoceros*. Preuzeto 27.05.2015. sa <https://www.rhino3d.com/>
- [Rob93]Robin, B. (1993). *Designing the Future - The Computer Transformation of Reality*. London: Thames and Hudson.
- [Roc03]Rocha, L. M. (2003). *Complex Systems Modeling: Using Metaphors From Nature in Simulation and Scientific Models*. *Zasnovano na Rocha, L. M. (1999). BITS: Computer and Communication News. Computing, Information and Communication Division. Los Alamos Laboratory. November 1999*. Preuzeto 21.06.2013. sa <http://informatics.indiana.edu/rocha/complex/csm.html>
- [Rod14]Rodrigues, E. (2014). *Automated Floor Plan Design: Generation, Simulation, and Optimization*. Preuzeto 18.05.2015. sa Automated Floor Plan Design: Generation, Simulation, and Optimization: https://www.academia.edu/7768759/Automated_Floor_Plan_Design_Generation_Simulation_and_Optimization
- [Rog01]Rogers, D. F. (2001). *An Introduction to NURBS: With Historical Perspective*. Academic Press.

- [Roi14] Roithmayr, R. (2014). *Formfinder*. Preuzeto 27.04.2014. sa Formfinder Software GmbH© : Software to assist the design of Lightweight Membrane Structures.: <http://www.formfinder.at/>
- [Ros96] Rosenman, M., & Gero, J. S. (1996). Modelling multiple views of design objects in a collaborative CAD environment. *Computer-Aided Design* , 28.3, pp.193-205.
- [Rut13] Rutten, D. (n.d.). *Galapagos - Grasshopper*. Preuzeto 20.06.2013. sa Grasshopper 3d: <http://www.grasshopper3d.com/group/galapagos>
- [Rut15] Rutten, D. (2015). *Grasshopper: Algorithmic modeling for Rhion*. Preuzeto 15.05.2010. sa <http://www.grasshopper3d.com/>
- [Sán07] Sánchez, J. S. (2007). A multi-step force-density method and surface-fitting approach for the preliminary shape design of tensile structures. *Engineering Structures* , 29, pp.1966–1976.
- [Sas13] Sasaki Associates, i. (n.d.). *SASAKI*. Retrieved jun 17, 2013, from <http://www.sasaki.com/>
- [Sch74] Schek, H.-J. (1974). The force density method for form finding and computation of. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 3, pp.115–134.
- [Sch46] Schoenberg, I. J. (1946). Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions, Part A: On the Problem of Smoothing or Graduation, a First Class of Analytic Approximation Formulas. *Quart. Appl. Math.* 4 , pp.45-99.
- [Sch07] Schumaker, L. L. (2007). *Spline Functions: Basic Theory 3rd edition*. UK: Cambridge University Press.
- [Sch95] Schwefel, H. (1995). *Evolution and Optimum Seeking*. JohnWiley&Sons, Inc.
- [Sed03] Sederberg, T. W., Zheng, J., Bakenov, A., & Nasri, A. (2003). T-Splines and T-NURCCs. *ACM Transactions on Graphics* , 22 (3), pp. 477-484.
- [Ser06] Serebryakova, Y. (2006). *Von der natur gefangen.Frei Otto, Architekt*. Preuzeto 24.07.2013. sa <http://www.uni-stuttgart.de/impulse/imp/alles.php?id=6>.
- [She00] Shea, K. (2000). EifForm: a Generative Structural Design System. *Proceedings, ACSA Technology Conference*. Cambridge, Massachusetts: MIT.
- [She02] Shelden, D. (2002). *Digital Surface Representation and the Constructability of Gehry's Architecture, PhD Thesis*. Cambridge, Massachusetts: MIT.
- [She83] Sheridan, S. L. (1983). Generative Systems versus Copy Art: A Clarification of Terms and Ideas. *Leonardo* , 16 (2), 103-108.
- [Sig94] Sigmund, O. (1994). *Design of material structures using topology optimization, Ph.D. Thesis*. DCAMM Report S.69, department of solid mechanics, DTU.
- [Sil06] Silver, M. (g.ed.). (2006). Programming Cultures. *Architectural Design* , 76 (4).

- [Sod14] Soddu, C. (n.d.). *Cellastino Soddu*. Preuzeto 20.03.2014. sa <http://soddu.it/progetti/med.htm>
- [Sod89] Soddu, C. (1989). *Citta' Aleatorie*. Milano: Masson Publisher.
- [Sod98] Soddu, C. (1998). *Introduction to GA 98 proceedings Book*. Preuzeto 20.03.2014. sa Generative Art: <http://generativeart.com>
- [Sod11] Soddu, C. (1991-2011). *Papers on Generative Design*. Preuzeto 20.03.2013. sa <http://www.argenia.it/papers/html>
- [SOM12] SOM. (2012). *Blackbox Studio*. Preuzeto 07.09.2013. sa SOM: <http://www.som.com/services/blackbox-studio>
- [Spe64] Spencer, H. (2009). *The Principle of Biology: (V. 1) (1864-67)*. Cornell Univeristy Library.
- [Spi09] Spillers, W., & MacBain, K. M. (2009). *Structural Optimization*. Springer Science+Business Media, LLC.
- [Spi11] Spiller, N., & Armstrong, R. (g.ed.) (2011). Protpcell Architecture. *Architectural Design*, 81 (2).
- [Spy09] Spyropoulos, T. (2009). Evolving Patterns: Correlated Systems of Interaction. *Architectural Design*, 79 (6), pp 84-87.
- [Sti81] Stiny, G., & March, L. (1981). Design Machines. *Environment and Planning B: Planning and Design*, Volume 8, pp. pp. 245-255.
- [Str10] Stratil, J. (2010). Digital Master Builders - Evolutionary Formfinding in the Information Age. *International Journal of IASS*, 51 (3), pp.232-240.
- [Tai61] Taig, I. (1961). *Structural analysis by the matrix displacement method. Technical report*. English Electric Aviation.
- [Tec12] Technet, GmbH (n.d.). *Easy - Software for the integrated planning and calculation of lightweight surface structures*. Retrieved decembar 15, 2012, from Technet GmbH: <http://technet-gmbh.de/index.php?id=63>
- [Ter06] Terzidis, K. (2006). *Algorithmic Architecture*. Oxford: Elsevier, Architectural Press.
- [Ter88] Terzopoulos, D., & Fleischer, K. (1988). Deformable models. *The Visual Computer*, 4(6), pp.306-331.
- [Ter94] Terzopoulos, D., & Qin, H. (1994). Dynamic NURBS with geometric constraints for interactive sculpting. *ACM Transactions on Graphics*, 13 (2), pp.103-136.
- [Ter87] Terzopoulos, D., Platt, J., Barr, A., & Fleischer, K. (1987). Elastically deformable models. *Computer Graphics*, 21 (4), pp.205-214.
- [Tho17] Thompson, D. (1917). *On Growth and Form*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [Til83] Tiller, W. (1983). Rational B-splines for Curve and Surface Representation. *IEEE Comput. Graph. and Apl.*, 3 (6), pp. 61-69.

- [Tom89] Tomlow, J., Graefe, R., Otto, F., & Szeemann, H. (1989). Das Modell / The Model / El Modelo. *Mitteilungen des Instituts fr Leichte Flächentragwerke (IL)* (34).
- [Top78] Topping, B. (1978). *The Application of Dynamic Relaxation to the Design of Modular Space Structures. Ph.D thesis*. London: City University.
- [Top09] TopOpt research group (2009). *TopOpt research group*. Preuzeto 18.05.2012. sa TopOpt research group: <http://www.topopt.dtu.dk/>
- [Tra12] *TRAER.PHYSICS 3.0*. (n.d.). Preuzeto 20.04.2012. sa <http://www.murderandcreate.com/physics/>
- [Tsa13] Tsai, M.-W., & Hong, T.-P. L.-K. (n.d.). *Two-dimensional Encoding Schema and Genetic*. Preuzeto 20.03.2013. sa: <http://www.atlantis-press.com>.
- [Tur52] Turing, A. M. (1952). The Chemical Basis of Morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B, Biological Sciences* , 37 (641).
- [Tur56] Turner, M., Clough, R., Martin, H., & Topp, L. (1956). Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of Aeronautical Science* , 23 (9), Sept., pp.805–824.
- [Tyn69] Tyng, A. G. (1969). Geometric Extension of Consciousness. *Zodiac - a review of contemporary architecture* (No.19), 130-162.
- [Vee11] Veenendaal, D. B. (2011). A framework for comparing form finding methods. *Proceedings of the International Association of Shells and Spatial Structures*. London: IASS.
- [Vee12] Veenendaal, D., & Block, P. (2012). An overview and comparison of structural form finding methods for general networks. *International Journal of Solids and Structures* , 49, pp.3741–3753.
- [Ver75] Versprille, K. J. (1975). *Computer-Aided Applications of the Rational B-Splines Approximation Form, PhD dissertation*. Syracuse, NY: Syracuse University.
- [Vin09] Vincent, J. (2009). Biomimetic Patterns in Architectural Design. *Architectural Design* , 79 (6), pp.74-81.
- [Vol99] Volpin, O., Bercovier, M., & Matskewich, T. (1999). A comparison of invariant energies for free-form surface construction. *Visual Computer* , 15, pp.199–210.
- [Von07] Von Bülow, P. (2007). *Genetically Engineered Architecture Design Exploration with Evolutionary Computation. PhD dissertation* . Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller.
- [Vuk95] Vukelić, S., & Radenković, G. (1995). *Tanke elastične ljuske: teorija i specijalna poglavlja*. Beograd: Gros knjiga.
- [Wel92] Welch, W., & Witkin, A. (1992). Variational surface modeling. *Computer Graphics* , 26 (2 (Proc. ACM Siggraph'92)), pp.157-166.

- [Wil14] Williams, C. (n.d.). *Definition of the geometry of the British Museum Great Court roof: Part I Definition of geometry as built*. Preuzeto 27.05.2014. sa Dr Chris J. K. Williams: <http://www.bath.ac.uk/~abscjkw/>
- [Wil86] Williams, C. J. (1986). Defining and Designing Curved Flexible Tensile Surface Structures. In J. A. Gregory, *The mathematics of surfaces* (pp.143-177).
- [Wie48] Wiener, N. (1948). *Cybernetics: Or Control and Communication in the Animal and the Machine*. Paris, Camb. Mass.: Herman&Cie and MIT Press.
- [Wol02] Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Champaign, Illinois: Wolfram Media.
- [Wro04] Wroblewski, L. (2004). *Convergence Design*. Preuzeto Januar 15.01.2014. sa Lukew Idertion+Design Blog: <http://www.lukew.com/ff/entry.asp?88>
- [Xie93] Xie, Y. M., & Steven, G. P. (1993). A Simple Evolutionary Procedure for Structural Optimization. *Computers & Structures*, 49 (5), pp 885-896.
- [Xie97] Xie, Y. M., & Steven, G. P. (1997). *Evolutionary Structural Optimization*. London: Springer.
- [Yan99] Yang, X. Y., Xie, Y. M., Steven, G. P., & Querin, O. M. (1999). Bidirectionally evolutionary method for stiffness optimization. *AIAA Journal*, 37 (11), pp.1483-1488.
- [Zal98] Zalewski, W., & Allen, E. (1998). *Shaping Structures*. New York: John Wiley & Sons.
- [ZCo09] ZCorporation. (2009). *ZScanner Introduction*. pdf. Preuzeto 10.01.2012. sa http://www.zcorp.com/documents/382_ZScanner%20Introduction%202009%20%5BCompatibility%20Mode%5D.pdf
- [Zha07] Zhang, Y., Bazilevs, Y., Goswami, S., Bajaj, C., & Hughes, T. (2007). Patient-specific vascular NURBS modeling for isogeometric analysis of blood flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, pp.2943–2959.
- [Zie71] Zienkiewicz, O. T. (1971). Reduced integration technique in general analysis of plates. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 3, pp.275–290.
- [Zie68] Zienkiewicz, O., & Cheung, Y. (1968). *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill.
- [Zie00] Zienkiewicz, O., Taylor, R., & J.Z. Zhu, J. (2000). *The Finite Element Method, its Basis and Fundamentals* (5th Edition ed.). Elsevier Butterworth-Heinemann.
- [Zlo75] Zloković, Đ. (1975). *Optimizacija u izboru i projektovanju konstrukcija*. Beograd: Univerzitet u Beogradu, Arhitektonski fakultet, Poslediplomske studije kurs-stanovanje.

[Zuo12]Zuo, Z. H. (2012). *BESO Software*. Retrieved Jun 26, 2013, from RIMT Universiti: Center for Innovative Structures and Materials (CISM): <http://www.rimt.edu.au/research/cism>

Референце аутора

- [Nes11]Nestorović, P.; Milošević, J. (2011). An Implementation of Isogeometric Analysis Concept in Free-form Architectural Roof Design. *Applied Geometry and Graphics Issue No 88. The Interdepartmental Collection of Proceedings of SED-11* (pp. 229-233). Kyiv: Ukraine Association for Applied Geometry.
- [Nes12]Nestorovic, M.; Nestorovic, P.; Milosevic, J. (2012). Instrumental Role of Geometry in Design Process of Folded Architectural Structures - Research and Education. *Applied Geometry and Graphics Issue No 90. The Interdepartmental Collection of Proceedings of SED-12* (pp. 397-402). Kyiv: Ukraine Association for Applied Geometry.
- [Mil12] Milošević, J.; Nestorović, M. (2012). Kompozitne prostorne strukture. *Zbornik radova međunarodnog naučno-stručnog simpozijuma I&A 2012* (pp. 97-102). Beograd: Arhitektonski fakultet u Beogradu.
- [Nes13] Nestorović, M.; Milošević, J.; Novaković, S. (2013). Bio-appropriation: River as Source of Inspiration for Dynamic Spatial Design on Site of Neolithic Metropolis Vinca. *The City's Role in Contemporary Society. Proceedings of the International Scientific Conference Balkan Architectural Biennale 2013* (pp. 225-236). Belgrade.
- [Mil13] Milošević, J.; Šobić, Z.; Nestorović, M. (2013). Compositeness: Implementation Issues in Performance Oriented Morphogenetic Design. *Proceedings I of 6th International Scientific Conference Architecture, Civil Engineering - Modernity* (pp.354-363). Varna: Free University - Chernorizets Hrabar, Faculty of Architecture.
- [Mil13a] Milošević, J.; Nestorović, M.; Šobić, Z. (2013). Strukturalna morfogeneza: koncept generativne procedure za dizajn arhitektonske forme. *Tehnika, časopis Saveza inženjera i tehničara Srbije*, 67(2013) (4), pp. 601-608.
- [Nes13a] Nestorović, M.; Milošević, J.; Šobić, Z. (2013). Form-Finding Using Bi-directional Evolutionary Structural Optimization (BESO) Method. *Applied Geometry and Graphics Issue No 91. The Interdepartmental Collection of Proceedings of SED-13* (pp.180-186). Kyiv: Ukraine Association for Applied Geometry.
- [Nes13b] Nestorović, M.; Nestorović, P.; Milošević, J. (2013). Rapid Prototyping: Constructing Physical Models of Architectural Geometry. *Applied Geometry and Graphics Issue No 91. The Interdepartmental Collection of Proceedings of SED-13* (pp.187-192). Kyiv: Ukraine Association for Applied Geometry.

- [Mil13b] Milošević, J.; Šobić, Z.; Nestorović, M. (2013). Evolutionary Computation in Design of Architectural structures / Evolucioni proračun u oblikovanju arhitektonskih struktura. *Zbornik radova međunarodnog naučno-istražnog simpozijuma I&A 2013* (pp.96-102). Beograd: Univerzitet u Beogradu Arhitektonski Fakultet.
- [Mil13c] Milošević, J.; Nestorović, M.; Šobić, Z. (2013). Computational Morphogenesis: Performance-Oriented Architectural Design Concept. *International Conference and Exhibition, Conference Proceedings. On Architecture*. (pp.555-565). Belgrade: STRAND – Sustainable Urban Society Association, Belgrade.
- [Mil14] Milošević, J.; Šobić, Z.; Nestorović, M. (2014). Towards Generative Convergence in Design of Architectural Structures. *1st International Academic Conference P&T* (pp.744-751). Belgrade : University of Belgrade Faculty of Architecture.
- [Mil14a] Milošević, J.; Nestorović, M. (2014). Biointerface: Studies in Bionics and Space Structures Design. *Proceedings of 4th International Scientific Conference on Geometry and Graphics moNGeometrija 2014. Volume 1*, (pp.90-99). Vlasina: Faculty of Civil Engineering and Architecture in Nis, Serbian Society for Geometry and Graphics SUGIG.
- [Mil14b] Milošević, J.; Nestorović, M. (2014). Form-Generating Approach in Design of Shape Resistant Structural Typologies. *Proceedings of International Scientific Youth Conference. Strength, Creep and Destruction of Building and Mechanical Materials and Structures*. Moscow: Peoples' Friendship University of Russia.
- [Mil15] Milosevic, J.; Nestorovic, M. (2015). Isogeometric morphogenesis: integrative method for design of shape resistant structural typologies. *Proceedings of the IASS Symposium 2015, Future Visions*. Amsterdam: International Association for Shells and Spatial Structures. U štampi.
- [Nes16] Nestorović, B.; Grbac, I.; Nestorović, P., Milošević, J. (2016). Application of reduced stiffness of complex laminate in finite elements for chair analysis. *Drvna industrija (Wood industry), Šumarski fakultet Sveučilišta u Zagrebu*, 67(2016). U štampi.

Биографија аутора

Јелена Милошевић, дипл. инж. арх. рођена је 1981. године у Београду. На Архитектонском факултету Универзитета у Београду дипломирала је 2006. године, а докторске студије уписала је 2009. године.

Стручни испит је положила 2009. Говори енглески и руски језик.

Радила је у предузећу *Archicon* д.о.о. Београд (2006-2011), у коме је вршила функцију заменика директора (2009-2012). Запослена је на Архитектонском факултету у звању истраживач-приправник (2011-2014), у звању истраживач-сарадника од 2014. године, и у звању асистента на Департману за архитектонске технологије за ужу научну односно уметничку област Архитектонско конструктерство од 2015. године. Учесник је научно-истраживачког пројекта *Развој и примена научних метода у пројектовању и грађењу високоекономичних конструктивних система применом нових технологија* (евиденциони број: ТР 36008) Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије од 2011 године.

Учествовала је у изради седам конкурсних решења, пет идејних и главних архитектонских пројеката, једног урбанистичког пројекта, једног регулационог плана и релаизацији једног објекта. Учествовала је на већем броју научних скупова и изложби. Публиковала је 23 научна рада.

ПРИЛОЗИ

Прилог 1.

Изјава о ауторству306

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада307

Прилог 3.

Изјава о коришћењу308

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Јелена Милошевић

број индекса Д-2009/65

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА У МОРФОГЕНЕЗИ ПОВРШИНСКИХ КОНСТРУКТИВНИХ СИСТЕМА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, октобар 2015.



Прилог 2.

**Изјава о истоветности штампане и електронске верзије
докторског рада**

Име и презиме аутора Јелена Милошевић

Број индекса Д-2009/65

Студијски програм Архитектура и урбанизам

Наслов рада Изогеометријска анализа у морфогенези површинских конструктивних система

Ментор др Миодраг Несторовић

Потписани/а Јелена Милошевић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, октобар 2015.



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

**ИЗОГЕОМЕТРИЈСКА АНАЛИЗА У МОРФОГЕНЕЗИ ПОВРШИНСКИХ
КОНСТРУКТИВНИХ СИСТЕМА**

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.


Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, октобар 2015.



1. Ауторство - Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.
3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољаваате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.