



Универзитет у Београду - Архитектонски факултет
University of Belgrade - Faculty of Architecture

МЕХАНИКА И ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА ПРАКТИКУМ

др Александра НЕНАДОВИЋ

МЕХАНИКА И
ОТПОРНОСТ
МАТЕРИЈАЛА

ПРАКТИКУМ

др Александра НЕНАДОВИЋ

Универзитет у Београду
Архитектонски факултет
Београд 2024.

Универзитет у Београду - Архитектонски факултет

др Александра Ненадовић

МЕХАНИКА И ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА
ПРАКТИКУМ

Београд, 2024.



МЕХАНИКА И ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА ПРАКТИКУМ

Аутор:

Доц. др Александра Ненадовић, дипл.инж.арх.
Универзитет у Београду - Архитектонски факултет

Издавач:

Универзитет у Београду - Архитектонски факултет
Булевар краља Александра 73/II, Београд, Србија

За издавача:

Декан проф. Владимир Лојаница, дипл.инж.арх.

Рецензенти:

В. проф. др Радојко Обрадовић, дипл.инж.грађ.
Универзитет у Београду, Архитектонски факултет

Доц. др Јелена Милошевић, дипл.инж.арх.
Универзитет у Београду, Архитектонски факултет

Проф. др Драгослав Стојић, дипл.инж.грађ.
Универзитет у Нишу, Грађевинско-архитектонски факултет

Одлуком Наставног и научно-уметничког већа Универзитета у Београду - Архитектонског факултета бр.01-149/2-15 од 22.01.2024. године усвојене су рецензије рукописа и прихваћен је рукопис као практикум из уже научне области Архитектонско конструктерство и конструктивни системи, у издању Универзитета у Београду - Архитектонског факултета.

Тираж:

10 примерака

Штампа:

Универзитет у Београду - Архитектонски факултет

Дизајн корица:

Данира Совиљ

Прво издање:

Београд, 2024.

ISBN 978-86-7924-352-2

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР.....	i
АКТИВНОСТИ ТОКОМ НАСТАВЕ – УСЛОВИ.....	ii
СИМБОЛИ.....	iii
1. <u>ЗАДАТАК 1</u> - Системи сила и равнотежа.....	1
1.А. <u>Анализа случајева</u>.....	1
1.А.1 Резултанта система сучељних сила.....	1
1.А.2 Резултанта система произвољних сила.....	2
1.А.3 Резултанта система произвољних сила – положај тежишта попречног пресека.....	3
1.Б. <u>Бројни примери</u>.....	6
1.Б.1 Одређивање резултанте система сучељних сила.....	6
1.Б.2 Одређивање резултанте система произвољних сила.....	7
1.Б.3 Одређивање положаја тежишта пуног попречног пресека.....	8
1.Б.4 Одређивање положаја тежишта ошупљеног попречног пресека.....	9
1.В. <u>Вежба 1</u> (I предавање).....	10
2. <u>ЗАДАТАК 2</u> - Аксијално напрегнути елементи.....	11
2.А. <u>Анализа случаја</u>.....	11
2.А.а) Дејство	
2.А.б) Реакција везе	
2.А.в) Сила у пресеку	
2.А.г) Расподела нормалних напона	
2.А.д) Деформација	
2.Б. <u>Бројни примери</u>.....	15
2.Б.1 Димензионисање аксијално затегнутог штапа.....	15
2.Б.2 Димензионисање аксијално притиснутог штапа.....	16
2.Б.3 Испитивање материјала притискањем.....	17
2.Б.4 Одређивање нормалних напона у аксијално затегнутом штапу променљивог попречног пресека.....	18
2.В. <u>Вежба 2</u> (II предавање).....	19
3. <u>ЗАДАТАК 3</u> - Елементи напрегнути на смицање.....	20
3.А. <u>Анализа случаја</u>.....	20
3.А.а) Дејство	
3.А.б) Реакција везе	
3.А.в) Сила у равни смицања	
3.А.г) Расподела тангенцијалних напона	
3.А.д) Деформација	
3.Б. <u>Бројни примери</u>.....	23
3.Б.1 Димензионисање везе две плоче остварене закивцима.....	23
3.Б.2 Димензионисање везе две плоче остварене заваривањем.....	23
3.Б.3 Димензионисање везе стуба и зуба остварене лепљењем.....	24
3.В. <u>Вежба 3</u> (III предавање).....	25

4. ЗАДАТАК 4 - Елементи напрегнути на савијање силама.....	26
4.1. ЗАДАТАК 4.1 - Елементи напрегнути на право савијање силама.....	26
4.1.А.абв Анализа случајева.....	26
4.1.А.а) Дејство	
4.1.А.б) Реакције веза	
4.1.А.в) Сила и моменат у пресеку	
4.1.Б.абв Бројни примери.....	32
4.1.Б.абв.1 Одређивање сила и момената у пресецима просте греде при правом савијању силама	32
4.1.Б.абв.2 Одређивање сила и момената у пресецима просте греде при правом савијању силама	33
4.1.Б.абв.3 Одређивање сила и момената у пресецима конзоле при правом савијању силама	34
4.1.Б.абв.4 Одређивање сила и момената у пресецима конзоле при правом савијању силама	35
4.1.Б.абв.5 Одређивање сила и момената у пресецима греде с препустом при правом савијању силама	36
4.1.Б.абв.6 Одређивање сила и момената у пресецима греде с препустом при правом савијању силама	37
4.1.В.абв Вежба 4.1.абв.1 и Вежба 4.1.абв.2 (IV и V предавање).....	39
4.1.А.г Анализа случајева.....	40
4.1.А.г) Расподела нормалних напона - аксијални и отпорни момент инерције	
4.1.Б.г Бројни примери.....	43
4.1.Б.г.1 Одређивање аксијалног момента инерције пуног попречног пресека.....	43
4.1.Б.г.2 Одређивање аксијалног момента инерције пуног попречног пресека.....	43
4.1.Б.г.3 Одређивање аксијалног момента инерције ошупљеног попречног пресека.....	44
4.1.Б.г.4 Одређивање аксијалног момента инерције ошупљеног попречног пресека.....	44
4.1.Б.г.5 Димензионисање греде напрегнуте на право савијање силама (σ).....	45
4.1.Б.г.6 Одређивање нормалних напона у греди при правом савијању силама	46
4.1.Б.г.7 Одређивање нормалних напона у греди при правом савијању силама....	47
4.1.Б.г.8 Димензионисање греде напрегнуте на право савијање силама за различите облике попречног пресека штапа (σ).....	49
4.1.Б.г.9 Димензионисање греде напрегнуте на право савијање силама за различите материјале (σ).....	51
4.1.В.г Вежба 4.1.г (VI предавање).....	52
4.1.А.д Анализа случајева.....	53
4.1.А.д) Расподела тангенцијалних напона - статички момент површине.....	53
4.1.Б.д Бројни примери.....	55
4.1.Б.д.1 Одређивање статичких момената делова површине пуног попречног пресека	55
4.1.Б.д.2 Одређивање статичких момената делова површине ошупљеног попречног пресека.....	55
4.1.Б.д.3 Димензионисање греде напрегнуте на право савијање силама (τ).....	56
4.1.Б.д.4 Одређивање тангенцијалних напона у греди при правом савијању силама.....	57
4.1.Б.д.5 Одређивање тангенцијалних напона у греди при правом савијању силама.....	58
4.1.Б.д.6 Одређивање тангенцијалних напона у греди при правом савијању силама.....	59
4.1.В.д Вежба 4.1.д (VII предавање).....	61

4.1.А.ђ	Анализа случајева	62
4.1.А.ђ)	Деформација – угиб	
4.1.Б.ђ	Бројни примери	66
4.1.Б.ђ.1	Одређивање угиба греде при правом савијању силама	66
4.1.Б.ђ.2	Одређивање угиба греде при правом савијању силама	67
4.1.Б.ђ.3	Одређивање угиба греде при правом савијању силама	69
4.1.Б.ђ.4	Одређивање угиба греде при правом савијању силама	71
4.1.Б.ђ.5	Одређивање угиба греде при правом савијању силама	73
4.1.В.ђ	Вежба 4.1.ђ (VIII предавање).....	74
4.2.	ЗАДАТАК 4.2 - Елементи напрегнути на косо савијање силама	75
4.2.А.	Анализа случаја	75
4.2.А.а)	Дејство	
4.2.А.б)	Реакције везе	
4.2.А.в)	Сила и моменат у пресеку	
4.2.А.г)	Расподела нормалних напона	
4.2.А.д)	Расподела тангенцијалних напона	
4.2.А.ђ)	Деформација	
4.2.Б.	Бројни примери	79
4.2.Б.1	Димензионисање греде напрегнуте на косо савијање силама.....	79
4.2.Б.2	Одређивање нормалних напона у греди при косом савијању силама.....	81
4.2.Б.3	Одређивање нормалних напона у греди при косом савијању силама.....	82
4.2.В.	Вежба 4.2 (IX предавање).....	84
5.	ЗАДАТАК 5 - Ексцентрично напрегнути елементи	85
5.А.	Анализа случаја	85
5.А.а)	Дејство	
5.А.б)	Реакције везе	
5.А.в)	Сила и моменат у пресеку	
5.А.г)	Расподела нормалних напона	
5.Б.	Бројни примери	88
5.Б.1	Одређивање нормалних напона у ексцентрично притиснутом штапу.....	88
5.Б.2	Одређивање нормалних напона у ексцентрично притиснутом штапу	90
5.Б.3	Одређивање нормалних напона у ексцентрично притиснутом штапу	91
5.В.	Вежба 5 (X предавање).....	93
6.	ЗАДАТАК 6 - Комбиновано напрегнути елементи - аксијално напрезање и право савијање силама	94
6.А.	Анализа случаја	94
6.А.а)	Дејство	
6.А.б)	Реакције веза	
6.А.в)	Силе и моменат у пресеку	
6.А.г)	Расподела напона	
6.Б.	Бројни примери	98
6.Б.1	Одређивање нормалних, тангенцијалних напона и угиба греде при аксијалном напрезању и правом савијању силама.....	98
6.Б.2	Димензионисање штапа напрегнутог на аксијално напрезање и право савијање силама.....	100
6.В.	Вежба 6 (XI предавање).....	102

7. <u>ЗАДАТАК 7</u> - Елементи напрегнути на торзију - штап кружног попречног пресека.....	103
7.А. <u>Анализа случаја</u>.....	103
7.А.а) Дејство	
7.А.б) Реакција везе	
7.А.в) Моменат у пресеку	
7.А.г) Расподела тангенцијалних напона - поларни момент инерције и поларни отпорни момент	
7.А.д) Деформација	
7.Б. <u>Бројни примери</u>.....	108
7.Б.1 Одређивање тангенцијалних напона и угла торзије штапа.....	108
7.Б.2 Одређивање тангенцијалних напона и угла торзије штапа променљивог пуног кружног попречног пресека	109
7.Б.3 Димензионсање штапа пуног кружног и прстенастог попречног пресека напрегнутих на торзију.....	110
7.В. <u>Вежба 7</u> (XII предавање).....	112
8. <u>ЗАДАТАК 8</u> - Стабилност аксијално притиснутих елемената – извијање у еластичној области.....	113
8.А. <u>Анализа случаја</u>.....	113
8.Б. <u>Бројни примери</u>.....	116
8.Б.1 Одређивање допуштене силе – различита дужина штапа.....	116
8.Б.2 Одређивање допуштене силе – различити услови ослањања штапа.....	117
8.Б.3 Димензионисање штапа према извијању.....	118
8.Б.4 Одређивање допуштене силе – различит облик попречног пресека штапа.....	119
8.В. <u>Вежба 8</u> (XIII предавање).....	120
ЛИТЕРАТУРА.....	121

ПРЕДГОВОР

Практикум је намењен студентима Архитектонског факултета у функцији савладавања материје која се излаже на предмету Механика и отпорност материјала на првој години академских студија, а кроз активност током наставе која се вреднује кроз рад на решавању нумеричких задатака који тематски прате предавања предвиђена програмом.

Академске студије архитектуре имају за циљ да студентима обезбеде знања о основним теоријским поставкама и методама архитектонског и урбанистичког пројектовања и извођења архитектонских објеката, што подразумева и разумевање проблема који се тичу пројектовања, прорачуна и извођења конструкција зграда. Циљ предмета Механика и отпорност материјала на Архитектонском факултету Универзитета у Београду је да студентима обезбеди основна знања у вези са природом, расподелом и величином унутрашњих сила у напегнутим линијским елементима конструкција, као и основна знања у вези са димензионисањем ових елемената тако да буду задовољењи критеријуми чврстоће, крутости и стабилности. Практикум треба да омогући дубље разумевање основних теоријских поставки изнетих на предавањима, које се остварује кроз анализу случајева, односно решавање нумеричких задатака, који су у практикуму изложени и илустровани на једноставан и разумљив начин.

Практикум садржи 8 задатака, у складу са бројем тематских јединица које се обрађују на предмету:

- ЗАДАТАК 1 - Системи сила и равнотежа - I предавање
- ЗАДАТАК 2 - Аксијално напегнути елементи - II предавање
- ЗАДАТАК 3 - Елементи напегнути на смицање - III предавање
- ЗАДАТАК 4 - Елементи напегнути на савијање силама -IV,V,VI,VII и VIII предавање
- ЗАДАТАК 5 - Ексцентрично напегнути елементи - X предавање
- ЗАДАТАК 6 - Комбиновано напегнути елементи - XI предавање
- ЗАДАТАК 7 - Елементи напегнути на торзију - XII предавање
- ЗАДАТАК 8 - Стабилност аксијално притиснутих елемената - XIII предавање

Сваки задатак садржи **Анализу случаја(ева)** у општим бројевима и **Бројне примере**, након чега следи **Вежба**, односно поставка(е) задатака које студент треба да реши на основу индивидуалних података.

Аутор се захваљује Ђурђи Ђукановић на помоћи у техничкој припреми слика за овај практикум.

Аутор се захваљује рецензентима на извршеној рецензији и драгоценим сугестијама.

Аутор осећа захвалност према оцу који га је посебно подстицао да пише овај практикум, као и према целој породици и пријатељима који су га у овом процесу подржавали и стрпљиво пратили.

Аутор

АКТИВНОСТИ ТОКОМ НАСТАВЕ - УСЛОВИ

Програмом наставе на предмету је предвиђено 13 предавања у оквиру којих се након излагања теоријских поставки раде и нумерички примери. Након предавања, студент самостално, уз консултације, ради нумеричке задатке у складу са индивидуалним задатим подацима. За тачно урађене задатке студент добија поене, који треба да буду верификовани парафом. Студент урађене задатке слаже у фасциклу - елаборат. Тачно урађени задаци доносе студенту максимално 13 поена.

Недеља	Задаци	Поени (пар.)
01 - предавање Вежба 1	Резултанта система произвољних сила и положај тежишта попречног пресека	
02 - предавање Вежба 2	Аксијално напрегнути елементи - реакција везе, силе у пресецима, нормални напони и деформација	
03 - предавање Вежба 3	Елементи напрегнути на смицање	
04 - предавање Вежба 4.1.абв.1	Елементи напрегнути на право савијање силама - реакције веза и силе и моменти у пресецима просте греде и конзоле	
05 - предавање Вежба 4.1.абв.2	Елементи напрегнути на право савијање силама - реакције веза и силе и моменти у пресецима греде с препустом	
06 - предавање Вежба 4.1.г	Елементи напрегнути на право савијање силама - нормални напони	
07 - предавање Вежба 4.1.д	Елементи напрегнути на право савијање силама - тангенцијални напони	
08 - предавање Вежба 4.1.ђ	Елементи напрегнути на право савијање силама – деформација - угиб	
09 - предавање Вежба 4.2	Елементи напрегнути на косо савијање силама - реакције веза, силе и моменти у пресецима, нормални и тангенцијални напони и угиб	
10 - предавање Вежба 5	Ексцентрично напрегнути елементи - реакција везе, силе и моменти у пресецима и нормални напони	
11 - предавање Вежба 6	Комбиновано напрегнути елементи - реакција везе, силе и моменти у пресецима и напони	
12 - предавање Вежба 7	Елементи напрегнути на торзију - реакција везе, моменти у пресецима, тангенцијални напони и деформација	
13 - предавање Вежба 8	Стабилност аксијално притиснутих елемената - извијање	
УКУПНО ПОЕНА ЗА ТАЧНО УРАЂЕНЕ ВЕЖБЕ (максимално 13)		

ИМЕ И ПРЕЗИМЕ СТУДЕНТА

БРОЈ ИНДЕКСА

Носилац предмета **Механика и отпорност материјала:**

доц. др Александра Ненадовић, дипл.инж.арх.

СИМБОЛИ

A	- површина попречног пресека штапа
E	- модул еластичности материјала
G	- модул клизања
I	- аксијални момент инерције површине
I_o	- поларни момент инерције
i	- полупречник елипсе инерције
k_i	- коефицијент сигурности против извијања
l	- дужина штапа
l_i	- слободна дужина извијања штапа
M	- момент силе, моменат савијања
\hat{M}	- фиктивни моменат савијања
m	- момент спрега сила
m'	- стрела параболе
M_t	- моменат торзије
N	- нормална сила
n	- коефицијент сигурности
P	- сила, граница пропорционалности
P_k	- критична сила извијања
R	- резултујућа сила, сила као реакција везе
\hat{R}	- фиктивна реакција везе
S	- смичућа сила, статички момент површине
T	- тежиште попречног пресека штапа, трансверзална сила
q	- расподељено оптерећење
Q	- резултанта расподељеног оптерећења
\hat{Q}	- фиктивна резултанта расподељеног оптерећења
v	- угиб
W	- аксијални отпорни момент попречног пресека
W_o	- поларни отпорни момент
ΔA	- елементарна површина попречног пресека
Δl	- апсолутна промена дужине штапа
ΔN	- елементарна нормална сила
ΔS	- елементарна смичућа сила
γ	- клизање
ε_{II}	- подужна дилатација
ε_{\perp}	- попречна дилатација
θ	- релативни угао торзије
λ	- виткост штапа
λ_p	- гранична виткост штапа
ν	- Поасонов коефицијент
σ	- нормални напон
σ_{bp}	- нормални напон бочног притиска
σ_{doz}	- дозвољени нормални напон
σ_k	- критични нормални напон извијања
σ_m	- нормална чврстоћа материјала
τ	- тангенцијални напон
τ_{doz}	- дозвољени тангенцијални напон
τ_m	- тангенцијална чврстоћа материјала
φ	- угао торзије

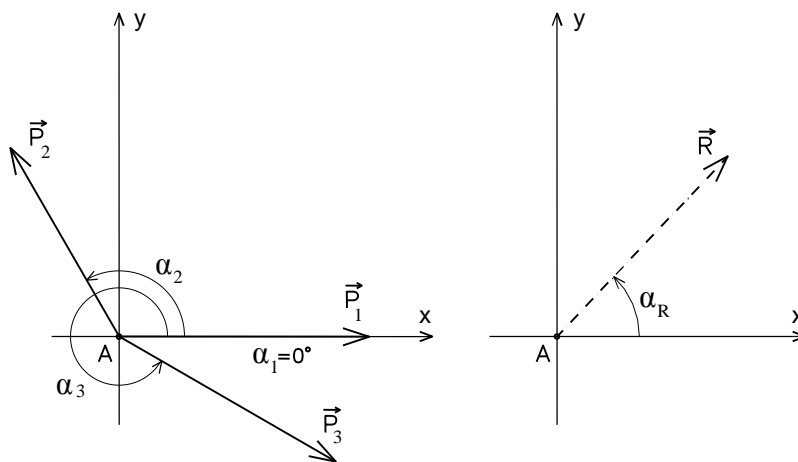
1. ЗАДАТАК 1 - СИСТЕМИ СИЛА И РАВНОТЕЖА

На основу Анализе случајева у општим бројевима и анализе Бројних примера, решити постављене задатке у оквиру дате Вежбе.

1.А Анализа случајева

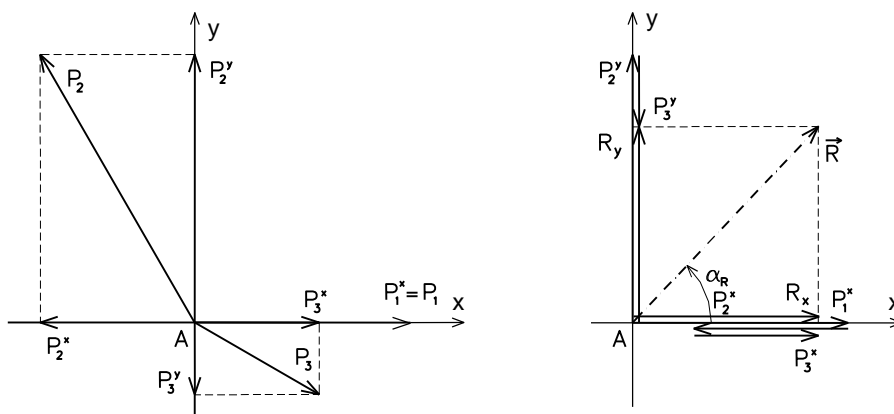
1.А.1 Резултанта система сучељних сила

Дат је случај система сучељних сила¹ који делује на материјалну тачку² А (Сл. 1.А.1.1а). Систем сила може се заменити једном еквивалентном силом – резултантом \vec{R} , која је еквивалентна посматраном систему сила, односно која замењује његово дејство (Сл. 1.А.1.1б).



Сл. 1.А.1.1 Систем сучељних сила и његова резултанта.

При одређивању величине, правца и смера резултанте система сучељних сила у равни, појединачне силе се пројектују на координатне осе X и Y (њихово дејство се замењује дејством њихових компоненти) (Сл. 1.А.1.2).



Сл. 1.А.1.2 Пројектовање сила на координатне осе.

¹ Сила \vec{P} (N) је векторска величина дефинисана са четири параметра: нападна тачка, правац, смер и интензитет.

² Материјална тачка је тело или део неког тела чији се облик и димензије могу занемарити у датим условима.

Пројекције резултанте \vec{R} на координатним осама X и Y, односно њена хоризонтална и вертикална компонента на X и Y оси, добијају се као алгебарски збир пројекција појединачних сила из система сила на одговарајућим координатним осама.

$$R_x = P_1^x + P_2^x + P_3^x + \dots + P_n^x$$

$$R_y = P_1^y + P_2^y + P_3^y + \dots + P_n^y$$

Интензитет резултанте \vec{R} израчунава се на основу интензитета њених компоненти помоћу релације:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Резултанта пролази кроз тачку у којој су деловале силе из система сучељних сила, а правац и смер одређени су углом α_R који она заклапа са позитивним смером X осе:

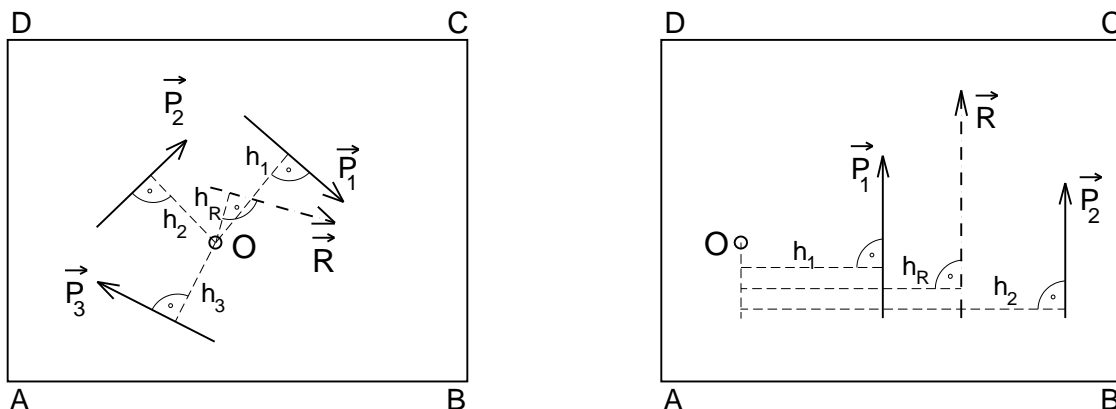
$$\alpha_R = \arctg \frac{R_y}{R_x}$$

Уколико на материјалну тачку делује систем сучељних сила она ће бити у статичкој равнотежи уколико је резултанта система сила једнака нули, односно уколико је векторски збир свих сила једнак нули.

$$\sum \vec{P} = \vec{R} = 0$$

1.A.2 Резултанта система произвољних сила

Дати су случајеви система произвољних сила у равни који делују на круту плочу³ ABCD (Сл. 1.A.2.1а и 1.A.2.1б).



Сл. 1.A.2.1 Системи произвољних сила и њихове резултанте.

Описани поступак одређивања резултанте за систем сучељних сила, примењује се и при одређивању величине, правца и смера резултанте система произвољних сила, док се њен положај на крутој плочи одређује применом моментног правила. Према овом правилу уколико на круту плочу делује систем сила у равни плоче, а чије нападне линије не пролазе кроз моментну тачку "O" (Сл. 1.A.2.1), резултујући момент сила у односу на моментну тачку једнак је алгебарском збиру момената појединачних сила⁴ из система сила у односу на исту моментну тачку. Момент силе који би изазвао обртање круте плоче око тачке "O" у смеру обртања казаљке на сату је позитиван (+), док је онај који би изазивао обртање у смеру супротном од смера обртања казаљке на сату негативан (-).

³ Крута плоча је материјално тело чија се једна димензија – дебљина може занемарити.

⁴ Момент силе у односу на тачку \vec{M} (Nm) је векторска величина дефинисана са три параметра: интензитет, правац и смер.

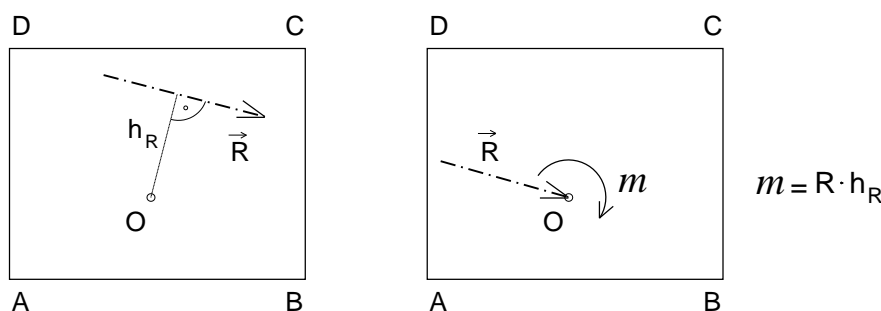
$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_i \quad M_O(R) = \sum M_O(P_i)$$

$$R \cdot h_R = P_1 \cdot h_1 + P_2 \cdot h_2 + \dots + P_i \cdot h_i$$

Из наведеног се одређује крак резултанте h_R у односу на тачку "O", чиме је одређен и њен положај на крутој плочи.

$$h_R = \frac{P_1 \cdot h_1 + P_2 \cdot h_2 + \dots + P_i \cdot h_i}{R}$$

Дејство резултанте R на управном растојању h_R од тачке „O“ је статички еквивалентно дејству резултанте у тачки „O“ и момента спрега⁵ m (Сл. 1.A.2.2).



Сл. 1.A.2.2 Редукција силе на тачку.

Уколико на круту плочу делује систем сила у равни плоче, она ће бити у статичкој равнотежи уколико је резултанта система сила једнака нули, односно уколико је векторски збир свих сила једнак нули, као и уколико је векторски збир момената појединачних сила из система сила у односу на било коју тачку на плочи једнак нули.

$$\sum \vec{P} = \vec{R} = 0 \quad \sum M_z(\vec{P}) = 0$$

1.A.3 Резултанта система произвољних сила – положај тежишта попречног пресека

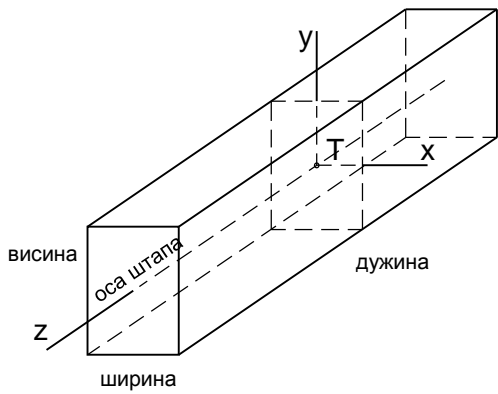
Описани поступак одређивања резултанте за систем произвољних сила које делују на круту плочу примењује се код одређивања положаја тежишта⁶ попречног пресека штапа (Сл. 1.A.3.1).

При прорачуну унутрашњих сила које се јављају у напетим штаповима линијских носача потребно је познавати положај тежишта попречног пресека штапа⁷, које се налази у пресеку X и Y тежишних оса (Сл. 1.A.3.1). Уколико постоји оса симетрије попречног пресека штапа, она је уједно и тежишна оса (Сл. 1.A.3.2). Уколико попречни пресек није осно симетричан у односу на X и/или Y тежишну осу, потребно је одредити положај тежишне осе, односно положај тежишта попречног пресека (Сл. 1.A.3.2г и 1.A.3.2ђ).

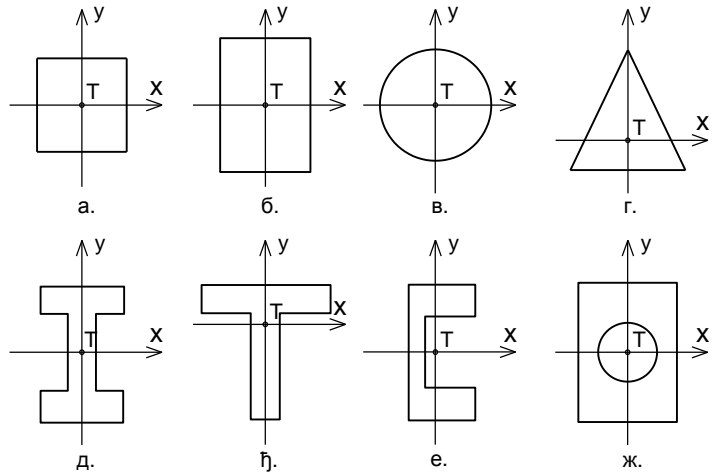
⁵ Момент спрега \vec{m} (Nm) је векторска величина дефинисана са три параметра: интензитет, правац и смер.

⁶ Тежиште тела (T) је нападна тачка силе теже.

⁷ Штап је тело коме су две димензије знатно мање у односу на трећу – дужину, па се као такве могу занемарити, а цео елемент се може представити својом подужном осом (локална оса Z). Оса штапа представља геометријско место тежишта попречних пресека штапа.

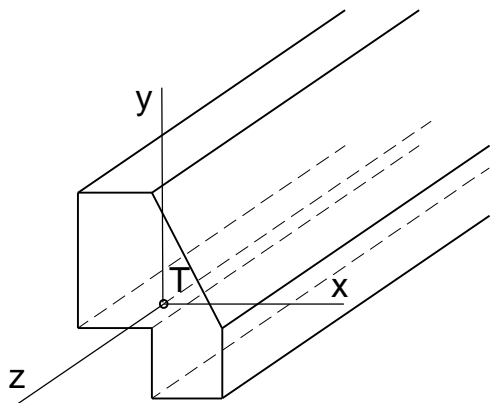


Сл. 1.А.3.1 Штап.



Сл. 1.А.3.2 Попречни пресеци штапа.

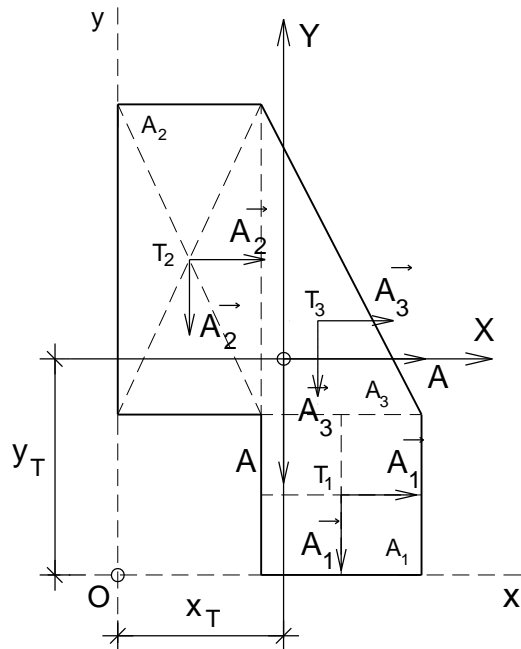
Дат је случај сложеног пуног попречног пресека штапа за који је потребно одредити положај тежишта Т (Сл. 1.А.3.3). Положај тежишта се одређује применом моментног правила за одређивање положаја резултанте система произвољних сила у равни, у оквиру следећег поступка. Сложени попречни пресек се дели на основне геометријске фигуре чија су тежишта позната, што су у датом случају квадрат површине A_1 , правоугаоник површине A_2 и троугао површине A_3 (Сл. 1.А.3.4). Узима се да у тежиштима тих фигура делују силе на x и y правцу које су једнаке површинама фигура. Положај X тежишне осе се поклапа са нападном линијом резултанте система сила паралелних са x осом, док се положај Y тежишне осе поклапа са нападном линијом резултанте система сила паралелних са y осом. Положај резултанти чији је интензитет једнак површини попречног пресека A , што је у датом случају $A = A_1 + A_2 + A_3$, по x и y правцу, добија се применом моментног правила, при чему се за моментну тачку "O" усваја тачка у пресеку помоћних координатних оса x и y које тангирају попречни пресек.



Сл. 1.А.3.3 Штап сложеног попречног пресека.

$$x_T = \frac{\sum M_0^V}{A} \Rightarrow x_T = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

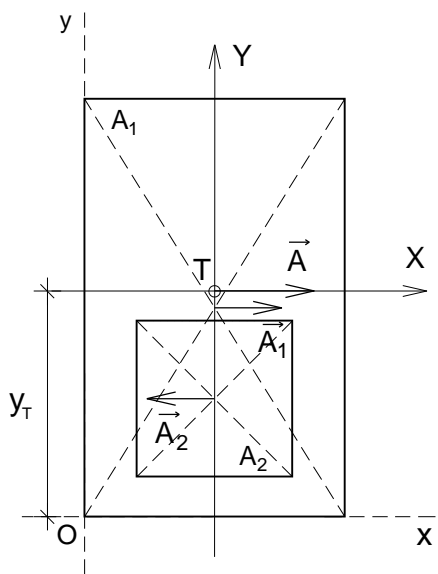
$$y_T = \frac{\sum M_0^H}{A} \Rightarrow y_T = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$



Сл. 1.А.3.4 Тежиште попречног пресека штапа.

За случај ошупљеног попречног пресека датог на слици (Сл. 1.А.3.5) интензитет резултанте је једнак површини попречног пресека $A = A_1 - A_2$.

$$y_T = \frac{\sum M_0^H}{A} \Rightarrow y_T = \frac{A_1 y_1 - A_2 y_2}{A_1 - A_2}$$

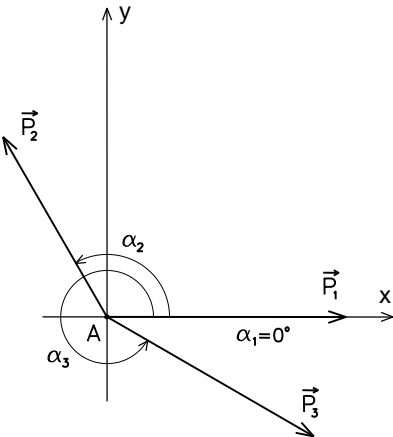


Сл. 1.А.3.5 Тежиште попречног пресека штапа.

1.Б. Бројни примери

1.Б.1 – Одређивање резултанте система сучељних сила

- За систем сучељних сила, који делује на материјалну тачку А, одредити величину, правац и смер резултанте.

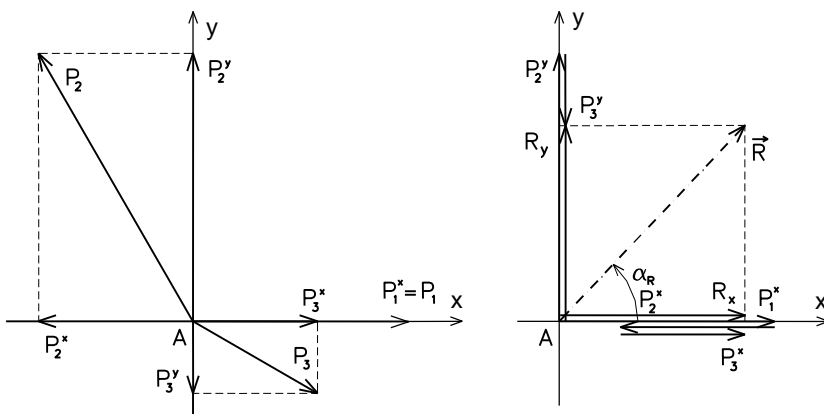


$$P_1=30 \text{ kN} \quad \alpha_1=0^\circ$$

$$P_2=43 \text{ kN} \quad \alpha_2=120^\circ$$

$$P_3=20 \text{ kN} \quad \alpha_3=330^\circ$$

Пројекције сила на координатним осама x и y:



$$R_x = P_1^x + P_2^x + P_3^x + \dots + P_n^x$$

$$R_y = P_1^y + P_2^y + P_3^y + \dots + P_n^y$$

i	P_i	α_i	$\cos\alpha_i$	$\sin\alpha_i$	$P_i \cdot \cos\alpha_i$	$P_i \cdot \sin\alpha_i$
1	30	0°	1	0	30	0
2	43	120°	-0.5	0.866	-21.5	37.24
3	20	330°	0.866	-0.5	17.32	-10
					$R_x=25.82 \text{ kN}$	$R_y=27.24 \text{ kN}$

Интензитет резултанте:

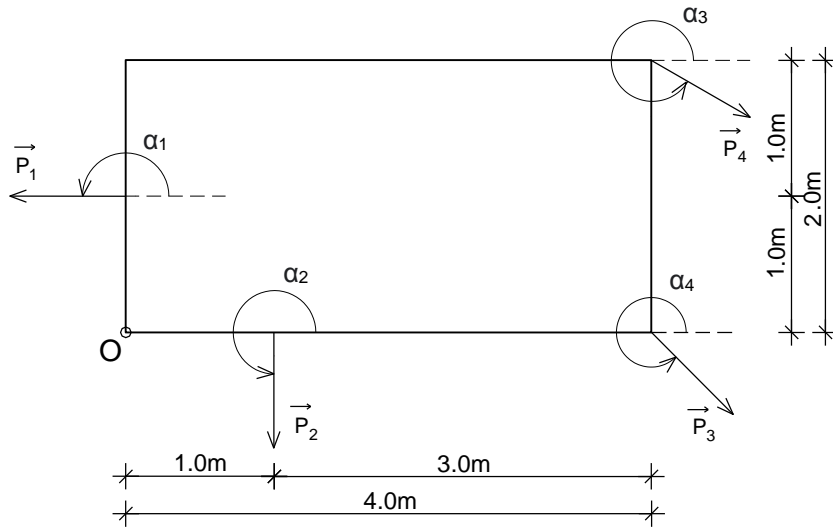
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{25.82^2 + 27.24^2} = 37.53 \text{ kN}$$

Правац и смер резултанте - α_R (пролази кроз тачку А):

$$\alpha_R = \arctg \frac{R_y}{R_x} = \arctg \frac{27.24}{25.82} = \arctg(1.055) = 46.53^\circ$$

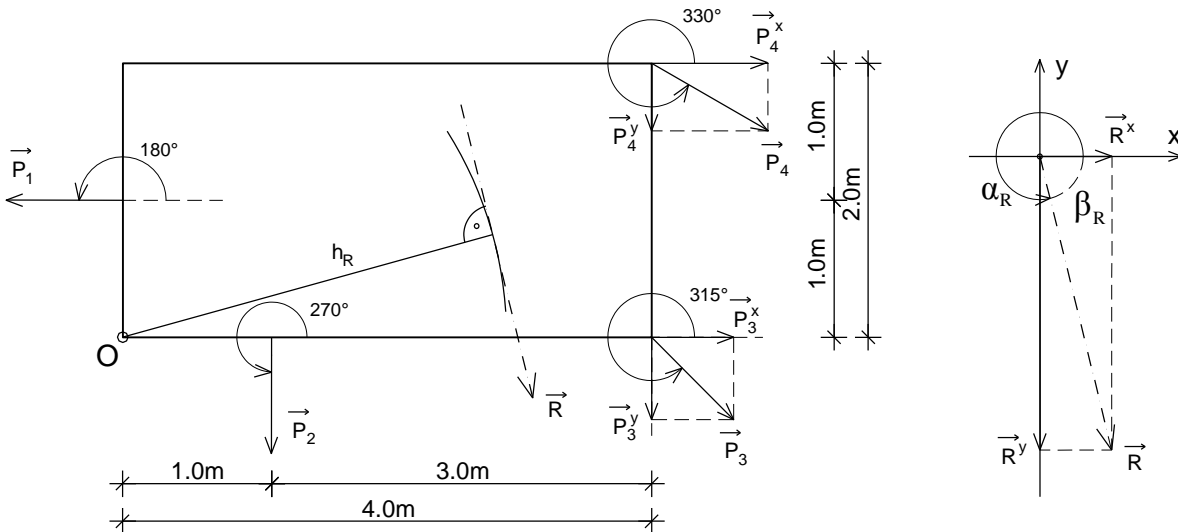
1.Б.2 – Одређивање резултанте система произвољних сила

- За систем сила који делује на круту плочу одредити величину, правац, смер и положај резултанте у односу на тачку “О”.



$P_1=24 \text{ kN}$	$\alpha_1=180^\circ$
$P_2=36 \text{ kN}$	$\alpha_2=270^\circ$
$P_3=20 \text{ kN}$	$\alpha_3=315^\circ$
$P_4=30 \text{ kN}$	$\alpha_4=330^\circ$

Пројекције сила на координатним осама x и y:



i	P_i	α_i	$\cos \alpha_i$	$\sin \alpha_i$	$P_i \cdot \cos \alpha_i$	$P_i \cdot \sin \alpha_i$
1	24	180°	-1	0	-24	0
2	36	270°	0	-1	0	-36
3	20	315°	0.707	-0,707	14.14	-14.14
4	30	330°	0.866	-0.5	25.98	-15
					$R_x=16.12 \text{ kN}$	$R_y= - 65.14 \text{ kN}$

Интензитет резултанте:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{16.12^2 + 65.14^2} = 67.10 \text{ kN}$$

Правац и смер резултанте - α_R :

$$\beta_R = \arctg \frac{R_y}{R_x} = \arctg \frac{65.14}{16.12} = \arctg(4.041) = 76.10^\circ \Rightarrow \alpha_R = 360^\circ - 76.10^\circ = 283.90^\circ$$

Положај резултанте – крак резултанте h у односу на тачку „О“:

$$M_O(R) = \sum M_O(P_i)$$

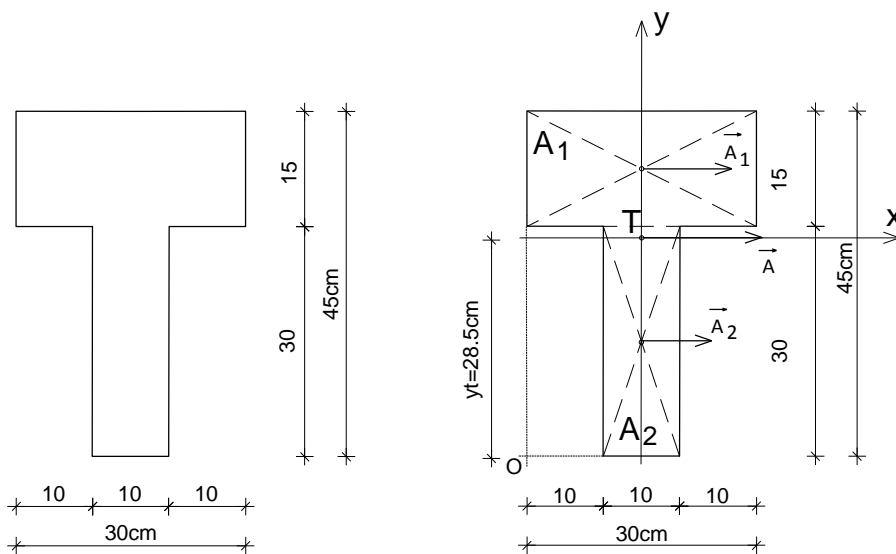
$$\sum M_O^{P_i} = -P_1 \cdot 1,0 + P_2 \cdot 1,0 + P_3^y \cdot 4,0 + P_4^x \cdot 2,0 + P_4^y \cdot 4,0$$

$$\sum M_O^{P_i} = -24 \cdot 1,0 + 36 \cdot 1,0 + 14,14 \cdot 4,0 + 25,98 \cdot 2,0 + 15 \cdot 4,0 = 180,52 \text{ kNm}$$

$$h_R = \frac{\sum M_O^{P_i}}{R} = \frac{180,52}{67,10} = 2,69 \text{ m}$$

1.Б.3 – Одређивање положаја тежишта пуног попречног пресека

➤ За попречни пресек дат скицом одредити положај тежишта.



Површина попречног пресека:

$$A_1 = 15 \cdot 30 = 450 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 10 \cdot 30 = 300 \text{ cm}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 450 + 300 = 750 \text{ cm}^2$$

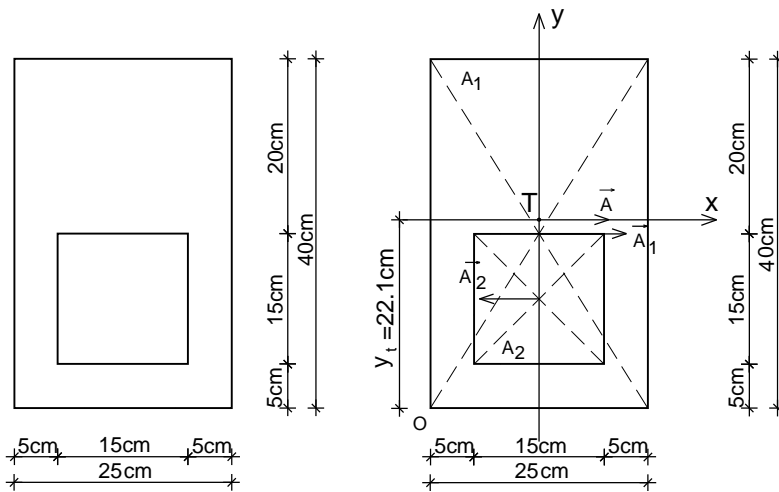
Положај тежишта попречног пресека:

$$y_T = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A}$$

$$y_T = \frac{450 \cdot 37,5 + 300 \cdot 15}{750} = 28,5 \text{ cm}$$

1.Б.4 – Одређивање положаја тежишта ошупљеног попречног пресека

➤ За попречни пресек дат скицом одредити положај тежишта.



Површина попречног пресека:

$$A_1 = 25 \cdot 40 = 1000 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 15 \cdot 15 = 225 \text{ cm}^2$$

$$A = A_1 - A_2 = 1000 - 225 = 775 \text{ cm}^2$$

Положај тежишта попречног пресека:

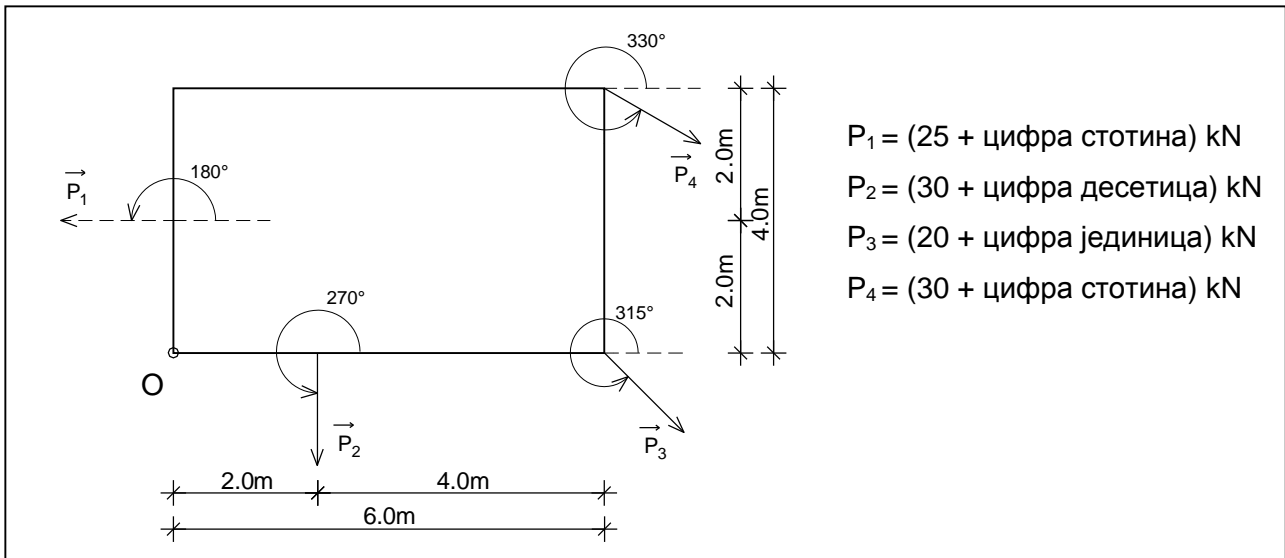
$$y_T = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A}$$

$$y_T = \frac{1000 \cdot 20 - 225 \cdot 12.5}{775} = 22.1 \text{ cm}$$

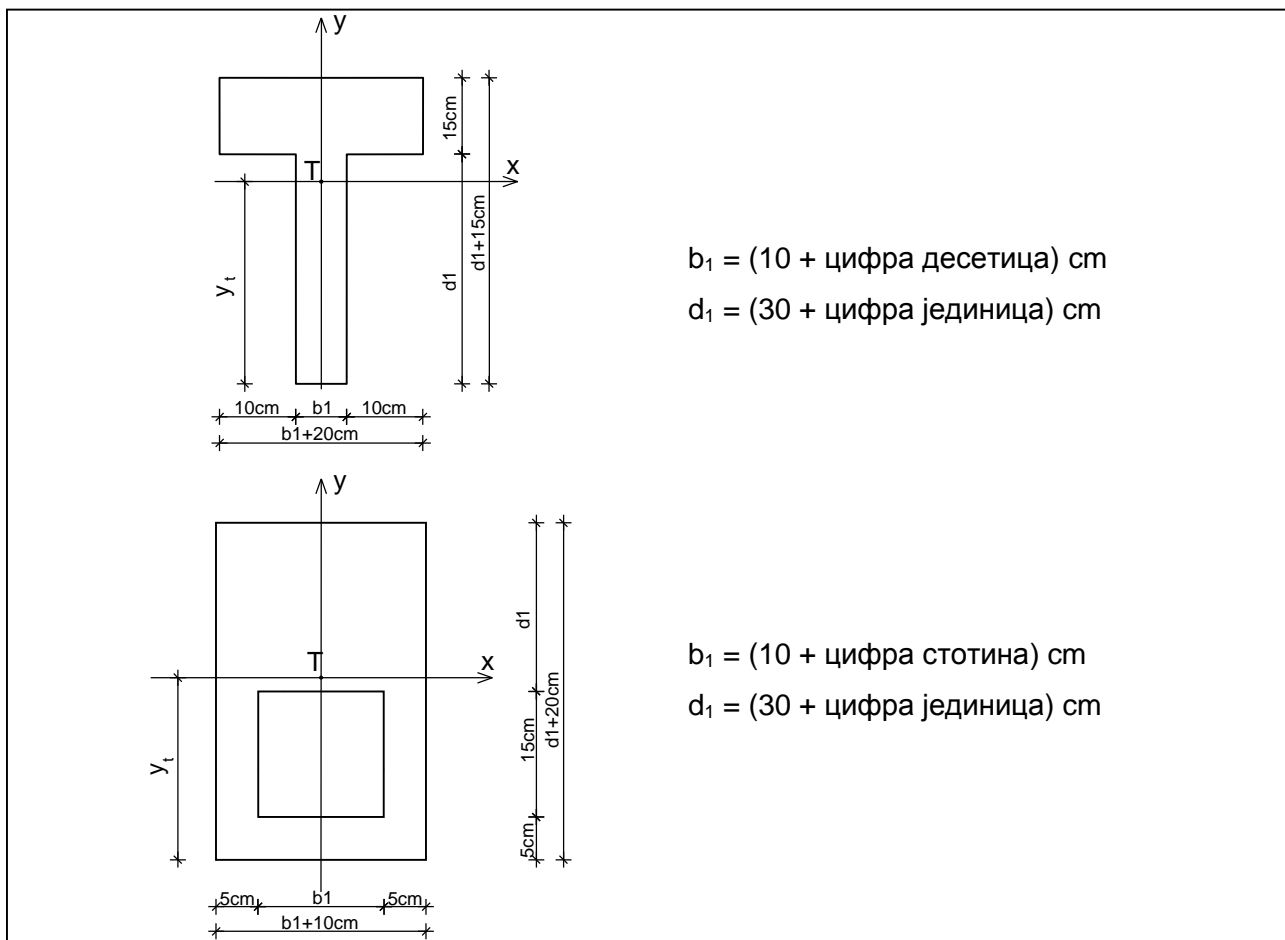
1.В. Вежба 1 (I предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

а) За систем сила који делује на круту плочу одредити величину, правац, смер и положај резултанте у односу на тачку "O".



б) За попречни пресек штапа дат скицом одредити положај тежишта.



2. ЗАДАТАК 2 - АКСИЈАЛНО НАПРЕГНУТИ ЕЛЕМЕНТИ

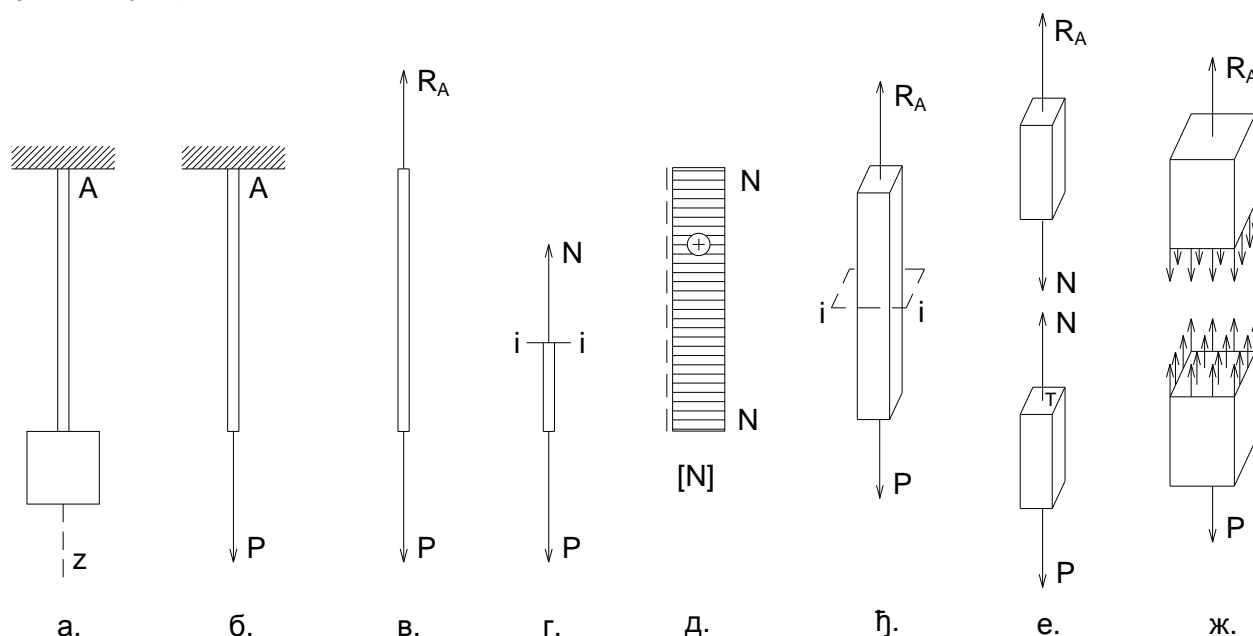
На основу Анализе случаја у општим бројевима и анализе Бројних примера, решити постављене задатке у оквиру дате Вежбе.

2.А. Анализа случаја

2.А.а) **Дејство - Оптерећење** – Дат је случај носача о који је окачен је терет (Сл. 2.А.1а). Дејство терета на штап носача замењујемо дејством силе P на правцу његове осе (Сл. 2.А.1б).

2.А.б) **Реакција везе - Равнотежа** – Штап је у стању статичке равнотеже захваљујући појави реакције везе⁸, односно силе R_A у укљештењу A (Сл. 2.А.1в). Из услова статичке равнотеже крутог тела следи да је $R_A = P$ (занемарена је сопствена тежина штапа).

2.А.в) **Сила у пресеку штапа** – У попречном пресеку штапа управном на осу штапа $i-i$, услед дејства спољних сила на правцу његове осе, активне P и реактивне R_A , јавља се унутрашња сила или сила у пресеку N – нормална сила (Сл. 2.А.1г). Ова сила представља редукциону резултанту унутрашњих елементарних сила (Сл. 2.А.1ж), које су управне на раван попречног пресека штапа, редукованих на тежиште попречног пресека⁹ (Сл. 2.А.1е) (редукциони момент је једнак нули).



Сл. 2.А.1 Аксијално напрегнут елемент.

$$\sum Z = 0 \rightarrow R_A = P \quad \sum Z = 0 \rightarrow N = P$$

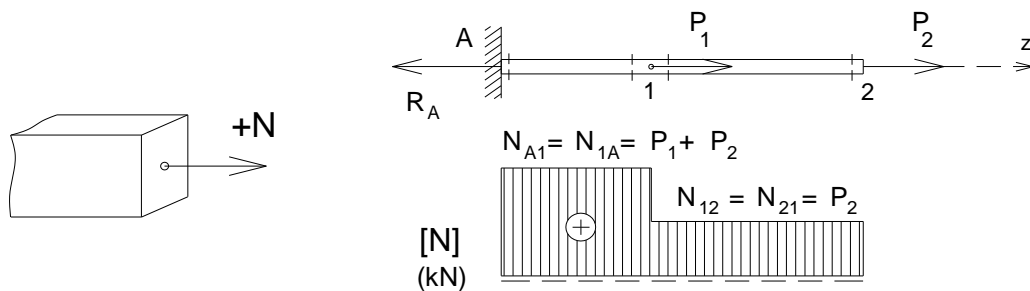
За одређивање силе N у пресеку штапа користи се метода пресека. Метода пресека подразумева замишљено пресецање штапа попречном равни управном на осу штапа, на изабраном месту $i-i$ (Сл. 2.А.1ђ). Штап се подели на два дела (Сл. 2.А.1е). Сила N у пресеку штапа се одређује помоћу услова статичке равнотеже крутог тела, а на основу услова равнотеже целине и њених делова, односно ако је штап у равнотежи, онда је и сваки његов издвојени део у равнотежи. Применом овог поступка, силу N у пресеку посматра се као

⁸ Веза се замени реакцијом везе што омогућава да се штап анализира као слободно круто тело које је у статичкој равнотежи (Сл. 2.А.1в).

⁹ Дејство елементарних сила по елементарним површинама попречног пресека је статички еквивалентно дејству силе N у тежишту T .

спољашња за издвојени део (Сл. 2.А.1е). У том смислу, у анализираном случају сила N у пресеку се добија из услова да сума свих сила по Z оси за издвојени део буде једнака нули $\sum Z=0$, одакле следи да је по интензитету $N = P$ или $N = R_A$, а разликују се по смеру. Сила у пресеку једног дела штапа замењује утицај другог дела.

У општем случају, нормална сила N у произвољном попречном пресеку штапа носача i - i једнака је алгебарском збиру пројекција свих спољних сила са једне или друге стране пресека на правац осе штапа. Нормална сила N је позитивна (+) ако затеже елемент штапа (Сл. 2.А.2), а негативна је (-) уколико га притиска. Интензитет нормалних сила у попречним пресецима штапа се графички представља у облику дијаграма¹⁰ (Сл. 2.А.1д и 2.А.3б). Нанесене ординате у карактеристичним попречним пресецима се линијски повежу. За дати пример означени су карактеристични пресеци за које је потребно израчунати вредности нормалних сила (Сл. 2.А.3а). У дијаграму N постоји скок у пресеку у коме делује концентрисана сила на правцу осе штапа.

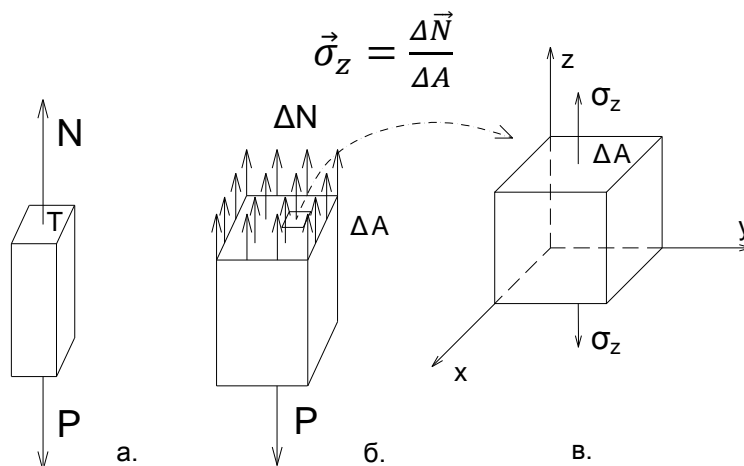


Сл. 2.А.2 Конвенција знака нормалне силе.

Сл. 2.А.3 Нормалне силе у пресецима штапа.

2.А.г) Расподела нормалних напона при аксијалном напрезању

Штап носача на који делује спољна сила на правцу његове осе је **аксијално напрегнут**. У анализираном случају у питању је аксијално затезање. Нормална сила N која се јавља у пресеку (Сл. 2.А.4а) је резултанта унутрашњих елементарних сила ΔN које делују на елементарне површине ΔA попречног пресека (Сл. 2.А.4б). Однос интензитета унутрашње елементарне силе управне на пресечну раван и елементарне површине попречног пресека штапа на коју та сила делује представља **нормални напон**¹¹ у тачкама попречног пресека σ_z (Сл. 2.А.4в).



Сл. 2.А.4 Расподела нормалних напона при аксијалном напрезању – елементарна коцка.

¹⁰ Дијаграми се цртају у одговарајућој размери, тако што се усвоји да одређен број сантиметара одговара одређеном броју kNm.

¹¹ Напон је векторска величина дефинисана са четири параметра: нападна тачка, правац, смер и интензитет. Јединица за напон је паскал - Па (N/m^2). У употреби је милион пута већа јединица MN или $10^6 N$, тј. МПа (MN/m^2). Напон може да се изрази и као kN/cm^2 , што би било еквивалентно приближном дејству од $100kg/cm^2$.

На слици је дата елементарна коцка у околини произвољне тачке попречног пресека штапа управног на осу штапа (Сл. 2.А.4в). Како би елементарна коцка била у равнотежи дуж Z правца, елементарне силе које делују на супротним странама коцке морају бити истог интензитета, а супротног смера.

При аксијалном напрезању нормални напон σ_z има исту величину у свакој тачки попречног пресека штапа. У том контексту, интензитет нормалног напона у тачки попречног пресека штапа добија се као количник силе у пресеку N и површине попречног пресека штапа A.

$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$

При димензионисању аксијално напрегнутог штапа прорачунава се потребна површина попречног пресека штапа која се добија као количник нормалне силе и дозвољеног нормалног напона за дати материјал и случај оптерећења. За усвојене димензије попречног пресека штапа, врши се контрола нормалног напона.

$$A_{pot} = \frac{N}{\sigma_{doz}} \quad \sigma = \frac{N}{A_{usv}} \leq \sigma_{doz}$$

Дозвољени нормални напон у датим изразима не зависи од дужине штапа. Међутим, уколико је дужина штапа оптерећеног аксијалном силом притиска релативно велика у односу на димензије његовог попречног пресека, тада се при одређивању дозвољеног нормалног напона и она мора узети у обзир, о чему ће бити речи у последњем поглављу.

2.А.д) Деформација при аксијалном напрезању

При успостављању услова статичке равнотеже занемарена је деформација штапа, као релативно мала у односу на димензије штапа. Ипак, при димензионисању напрегнутог штапа, поред контроле напона, потребно је вршити и контролу деформације.

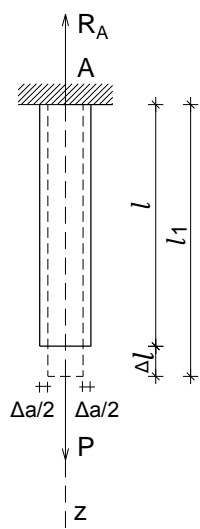
У анализираном случају аксијалног затезања, услед деловања спољних сила на правцу осе штапа, активне P и реактивне R_A, дужина штапа се повећава за Δl , док му се димензије попречног пресека смањују (Сл. 2.А.5)¹². Деформација штапа у еластичном подручју траје све дотле док се не успостави равнотежа између спољних и унутрашњих сила које се опирају дејству спољних и које теже да честице штапа врате у првобитни положај.

Деформација је у случају аксијалног напрезања зависна од величине нормалне силе N и расте са порастом интензитета силе. Апсолутна промена дужине штапа Δl , односно укупно издужење (или скраћење) аксијално напрегнутог штапа пропорционално је нормалној сили N и почетној дужини штапа l, а обрнуто пропорционално модулу еластичности материјала E и површини његовог попречног пресека A, односно обрнуто пропорционално величини EA - аксијалној крутости штапа (наведено важи за константно N и A по целој дужини штапа). Модул еластичности материјала E се утврђује механичким испитивањем затезањем, током кога се исцртава дијаграм везе напон – дилатација (Сл. 2.А.6)¹³. Нормални напон σ добија се као количник нормалне силе N у штапу (епрувети) и површине попречног пресека A штапа. Подужна дилатација $\epsilon_{||}$, односно релативна промена дужине штапа добија се као количник апсолутне промене дужине Δl и првобитне дужине штапа l (дилатација је неименован број). Однос између нормалног напона σ и подужне дилатације $\epsilon_{||}$ је линеаран до тачке P – границе

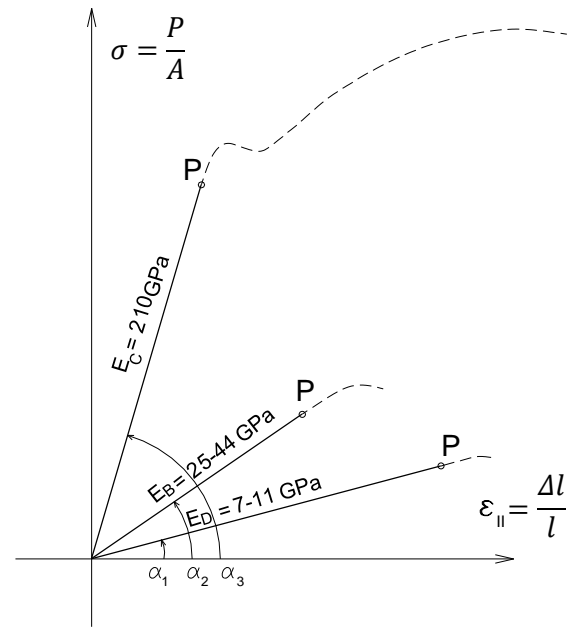
¹² У случају аксијалног притиска дужина штапа би се смањивала, док би му се димензије попречног пресека повећавале.

¹³ На слици је приказан дијаграм везе напон-дилатација за челик, бетон и дрво до границе пропорционалности P (Извор: Felipe Riola Parada: "Timber-Steel Hybrid Beams for Multi-Storey Buildings", Doctoral Thesis, Technischen Universität Wien, 2016.)

пропорционалности¹⁴. Тангенс угла α на делу дијаграма напон – дилатација до тачке P представља модул еластичности материјала E (MPa). Током механичког испитивања затезањем утврђује се и Поасонов коефицијент ν , који представља однос између подужне дилатације ε_{II} и попречне дилатације ε_{\perp} .



Сл. 2.A.5 Деформација аксијално напрегнутог штапа.



Сл. 2.A.6 Дијаграм везе напон-дилатација.

$$tg\alpha = E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{II}} \Rightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon_{II} \Rightarrow \frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\varepsilon_{\perp} = -\nu \cdot \varepsilon_{II} \quad \frac{\Delta a}{a} = -\nu \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

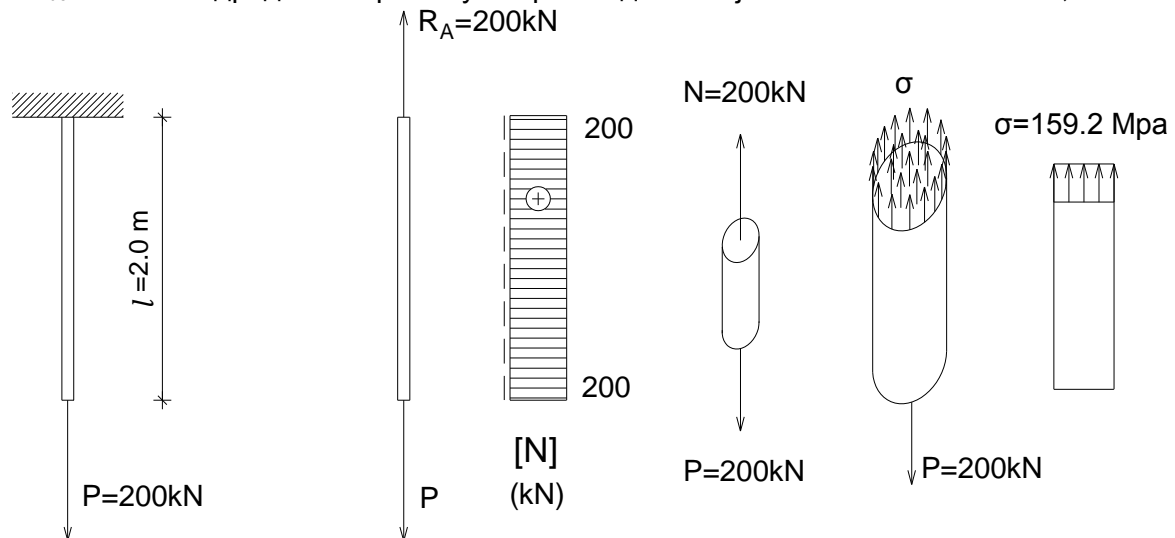
При контроли деформације, у већини практичних случајева довољно је извршити контролу апсолутне промене дужине штапа Δl .

¹⁴ Закон пропорционалности је поставио Роберт Хук.

2.Б. Бројни примери

2.Б.1 – Димензионисање аксијално затегнутог штапа

- На челичну шипку дужине $l = 2,0$ m кружног попречног пресека пречника D делује сила $P=200$ kN. Одредити реакцију везе у тачки А и пресечне силе (занемарити сопствену тежину шипке) и нацртати њихов дијаграм. Одредити димензије попречног пресека за $\sigma_{doz}=160$ MPa. За усвојене димензије извршити контролу нормалног напона и издужења Δl за $\Delta l_{doz}=0.5$ cm. Одредити и промену попречне димензије штапа ΔD . $E=210$ GPa, $\nu = 0.3$



Реакција везе:

$$\sum Z = 0 \rightarrow R_A = P = 200 \text{ kN}$$

Нормалне силе у пресецима штапа:

$$N = P = 200 \text{ kN}$$

Димензионисање штапа:

$$\sigma = \frac{N}{A} \rightarrow A_{pot} = \frac{N}{\sigma_{doz}}$$

$$A = \frac{D^2 \pi}{4} \rightarrow D^2 = \frac{4A}{\pi} \quad D_{pot} = \sqrt{\frac{4A_{pot}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4N}{\pi \sigma_{doz}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 200 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0.0399 \text{ m}$$

$$D_{pot} = 39.9 \text{ mm} \quad D_{usv} = 40 \text{ mm}$$

$$A_{usv} = \frac{0.04^2 \pi}{4} = 1.256 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Контрола нормалног напона:

$$\sigma_{stv} = \frac{N}{A_{usv}} = \frac{200 \cdot 10^3}{1.256 \cdot 10^{-3}} = 159.2 \text{ MPa} < \sigma_{doz} = 160 \text{ MPa}$$

Издужење штапа:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_{\parallel} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \frac{N}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 2.0}{210 \cdot 10^9 \cdot 1.256 \cdot 10^{-3}} = 1.516 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta l = 1.516 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.1516 \text{ cm} < \Delta l_{doz} = 0.5 \text{ cm}$$

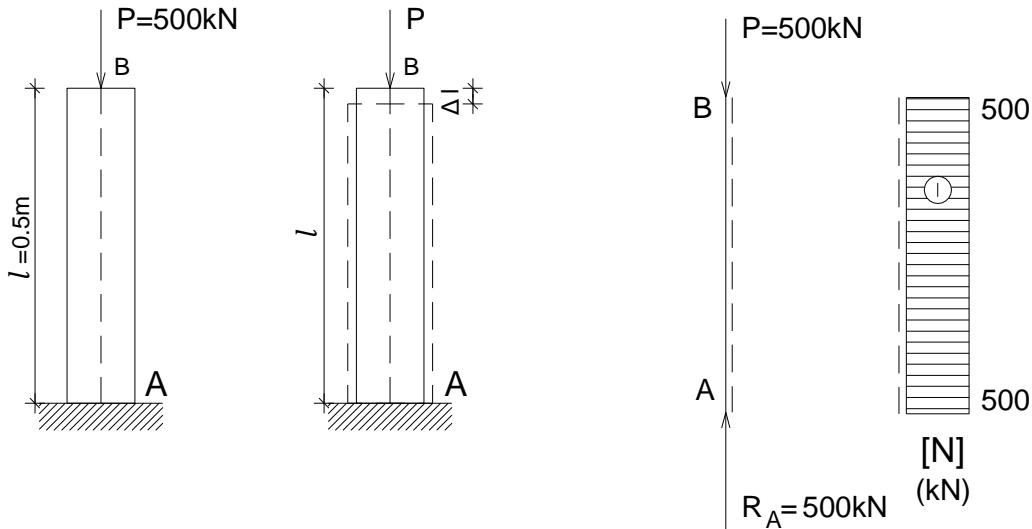
Промена попречне димензије штапа:

$$\frac{\Delta D}{D} = -\nu \cdot \varepsilon_{\parallel} \rightarrow \Delta D = -D \cdot \nu \cdot \frac{\Delta l}{l} = -40 \cdot 10^{-3} \cdot 0.3 \cdot \frac{1.516 \cdot 10^{-3}}{2.0} = 9.09 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

2.Б.2 – Димензионисање аксијално притиснутог штапа

- На стуб делује сила $P=500\text{kN}$. Одредити реакцију везе у тачки А и пресечне силе (занемарити сопствену тежину стуба) и нацртати њихов дијаграм. Одредити димензије квадратног попречног пресека стуба за три материјала: дрво, челик и неармирани бетон. Израчунати и скраћење стуба Δl за дате материјале (померање тачке В).

$\sigma_{\text{doz D}}=8.5\text{MPa}$, $E_{\text{D}}=10\text{GPa}$; $\sigma_{\text{doz C}}=160\text{MPa}$, $E_{\text{C}}=210\text{GPa}$; $\sigma_{\text{doz NB}}=10\text{MPa}$, $E_{\text{NB}}=30\text{GPa}$



а) Дрвени стуб

Димензионисање штапа:

$$\sigma = \frac{N}{A} \rightarrow A_{\text{pot}} = \frac{N}{\sigma_{\text{doz}}} = \frac{500 \cdot 10^3}{8.5 \cdot 10^6} = 0.0588\text{m}^2$$

$$a = \sqrt{A_{\text{pot}}} = \sqrt{0.0588} = 0.242\text{m} \quad a_{\text{usv}} = 25\text{cm} \quad (A_{\text{usv}} = 625\text{cm}^2)$$

(димензије попречног пресека у случају дрвених елемената се усвајају на цео број центиметара)

Скраћење:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^3 \cdot 0.5}{10 \cdot 10^9 \cdot 625 \cdot 10^{-4}} = 4.0 \cdot 10^{-4}\text{m} = 0.40\text{mm}$$

а) Челични стуб

Димензионисање штапа:

$$\sigma = \frac{N}{A} \rightarrow A_{\text{pot}} = \frac{N}{\sigma_{\text{doz}}} = \frac{500 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0.00312\text{m}^2$$

$$a = \sqrt{A_{\text{pot}}} = \sqrt{0.00312} = 0.0559\text{m} \quad a_{\text{usv}} = 56\text{mm} \quad (A_{\text{usv}} = 31\text{cm}^2)$$

(димензије попречног пресека у случају челичних елемената се усвајају на цео број милиметара)

Скраћење:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^3 \cdot 0.5}{210 \cdot 10^9 \cdot 31 \cdot 10^{-4}} = 3.8 \cdot 10^{-4}\text{m} = 0.38\text{mm}$$

а) Стуб од неармираног бетона

Димензионисање штапа:

$$\sigma = \frac{N}{A} \rightarrow A_{pot} = \frac{N}{\sigma_{doz}} = \frac{500 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 0.05 m^2$$

$$a = \sqrt{A_{pot}} = \sqrt{0.05} = 0.224 m \quad a_{usv} = 24 cm \quad (A_{usv} = 576 cm^2)$$

(димензије попречног пресека у случају бетонских елемената се усвајају на парни број центиметара)

Скраћење:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \frac{500 \cdot 10^3 \cdot 0.5}{30 \cdot 10^9 \cdot 576 \cdot 10^{-4}} = 1.4 \cdot 10^{-4} m = 0.14 mm$$

2.Б.3 – Испитивање материјала притискањем

- Бетонска пробна коцка 20x20x20cm здробила се под притиском пресе од P=880кN и при томе показала смањење висине од 0.24mm. Колики је био напон лома и модул еластичности те коцке?

Површина попречног пресека:

$$A = 20 \cdot 20 = 400 cm^2 = 400 \cdot 10^{-4} m^2$$

Напон лома:

$$\sigma_{лома} = \frac{P_{лома}}{A} = \frac{880 \cdot 10^3}{400 \cdot 10^{-4}} = 22 \cdot 10^6 = 22 MPa$$

Подужна дилатација:

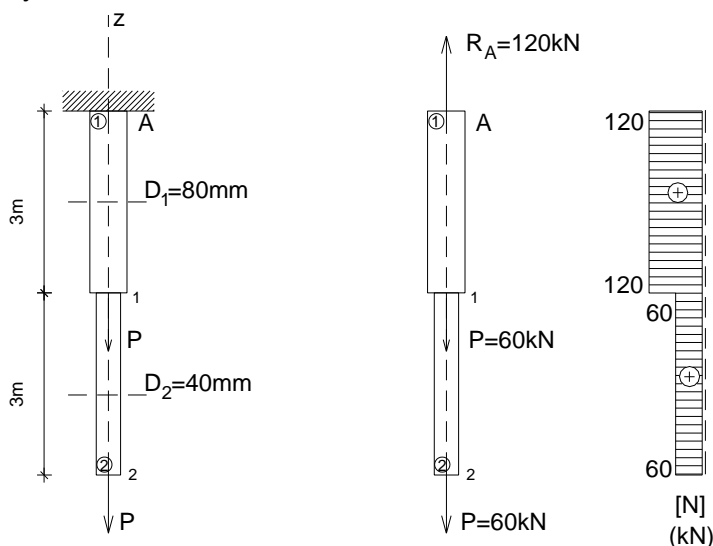
$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0.24}{200} = 1.2 \cdot 10^{-3}$$

Модул еластичности:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_{\parallel}} = \frac{22 \cdot 10^6}{1.2 \cdot 10^{-3}} = 18.33 \cdot 10^9 Pa = 18.33 GPa$$

2.Б.4 – Одређивање нормалних напона у аксијално затегнутом штапу променљивог попречног пресека

- За дејство сила $P=60\text{kN}$ на челичну затегу променљивог попречног пресека, одредити реакцију везе у тачки А и пресечне силе (занемарити сопствену тежину шипке) и нацртати њихов дијаграм. Израчунати напоне у појединим деловима затеге и њено укупно издужење.



Реакција везе:

$$\sum Z = 0 \rightarrow R_A = P + P = 120\text{kN}$$

Нормалне силе у пресецима штапа:

$$N_{21} = N_{12} = P = 60\text{kN}$$

$$N_{1A} = N_{A1} = P + P = 120\text{kN}$$

Површине попречних пресека делова штапа 1 и 2:

$$D_1 = 80\text{mm} \quad A_1 = \frac{D_1^2 \pi}{4} = \frac{0.08^2 \cdot 3.14}{4} = 0.005\text{m}^2$$

$$D_2 = 40\text{mm} \quad A_2 = \frac{D_2^2 \pi}{4} = \frac{0.04^2 \cdot 3.14}{4} = 0.00125\text{m}^2$$

Нормални напони у деловима штапа 1 и 2:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{120 \cdot 10^{-3}}{0.005} = 24\text{MPa} = 2.4\text{kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{60 \cdot 10^{-3}}{0.00125} = 48\text{MPa} = 4.8\text{kN/cm}^2$$

Издужења у деловима штапа 1 и 2 и укупно издужење:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 3.0}{210 \cdot 10^9 \cdot 0.005} = 0.00034\text{m} = 0.34\text{mm}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 3.0}{210 \cdot 10^9 \cdot 0.00125} = 0.00068\text{m} = 0.68\text{mm}$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0.34 + 0.68 = 1.02\text{mm}$$

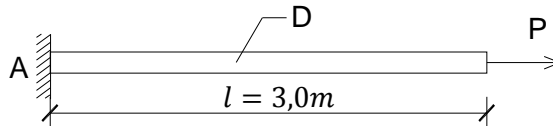
2.B. Вежба 2 (II предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

а) На челични штап дат скицом, дужине l , кружног попречног пресека пречника D , делује сила P . Одредити реакцију везе у тачки А и пресечне силе (занемарити сопствену тежину штапа) и нацртати њихов дијаграм. Одредити димензије попречног пресека за $\sigma_{doz}=145$ МПа. За усвојене димензије извршити контролу нормалних напона.

$$P = (200 + \text{број индекса}) \text{ kN}$$

$$\sigma_{doz} = 145 \text{ МПа}$$



б) Одредити затежућу силу $P=?$ која на штапу од дрвета дужине l квадратног попречног пресека $a/a = 14/14\text{cm}$ изазива издужење $\Delta l=0.2\text{mm}$. Одредити промену попречне димензије штапа Δa . $E=10\text{GPa}$.

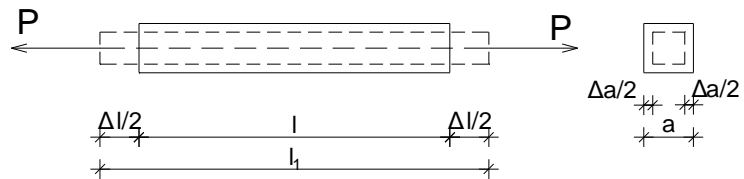
$$l = (200 + \text{број индекса}) \text{ cm}$$

$$a = 14\text{cm}$$

$$\Delta l = 0.2\text{mm}$$

$$E = 10\text{GPa}$$

$$\nu = 0,4$$



3. ЗАДАТАК 3 - ЕЛЕМЕНТИ НАПРЕГНУТИ НА СМИЦАЊЕ

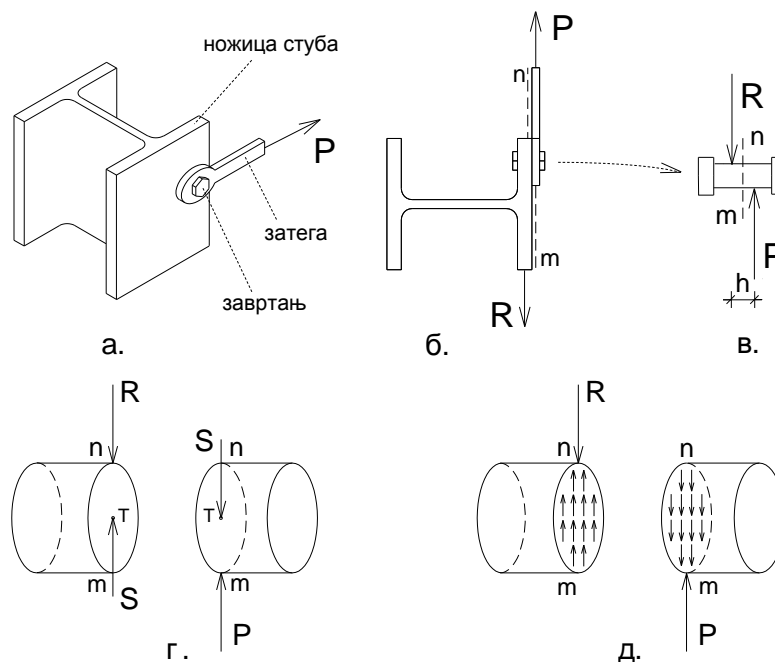
На основу Анализе случаја у општим бројевима и анализе Бројних примера, решити постављене задатке у оквиру дате Вежбе.

3.А. Анализа случаја

3.А.а) **Дејство - Оптерећење** – Дат је случај везе између ножице стуба и затега остварене помоћу завртња (Сл. 3.А.1а). На затегу делује сила P на правцу њене осе. Дејство силе из затега се преноси на завртањ путем бочног површинског притиска на тело завртња. Затим се сила преноси преко равни попречног пресека завртња $m-n$ (Сл. 3.А.1б и 3.А.1в), односно смичуће равни. Сила се затим преноси на ножицу стуба, при чему се јавља бочни површински притисак на телу завртња.

3.А.) **Реакција везе - Равнотежа** – Завртањ је у стању статичке равнотеже захваљујући појави реакције везе, односно силе R у ножици стуба¹⁵ (Сл. 3.А.1б и 3.А.1в). Из услова статичке равнотеже крутог тела следи да је $R = P$.

3.А.в) **Сила у равни смицања** – У попречном пресеку завртња $m-n$ управном на његову осу, услед дејства спољних смичућих сила (активне P и реактивне R_A), јавља се унутрашња сила S (Сл. 3.А.1г). Ова сила представља редуковану резултанту унутрашњих елементарних сила које леже у равни попречног пресека завртња $m-n$, редукованих на тежиште попречног пресека (редукциони момент је једнак нули) (Сл. 3.А.1г и 3.А.1д). Сила S у попречном пресеку завртња одређује се помоћу услова статичке равнотеже крутог тела, а на основу услова равнотеже целине и њених делова, односно ако је завртањ у равнотежи, онда је и сваки његов издвојени део у равнотежи. Применом овог поступка, сила у пресеку посматра се као спољашња за издвојени део. У том смислу, у анализираном случају сила у пресеку S се добија из услова да сума свих сила за издвојени део буде једнака нули, одакле следи да је по интензитету $S = R_A$ или $S = P$, а разликују се по смеру (Сл. 3.А.1г). Сила у пресеку једног дела завртња замењује утицај другог дела.

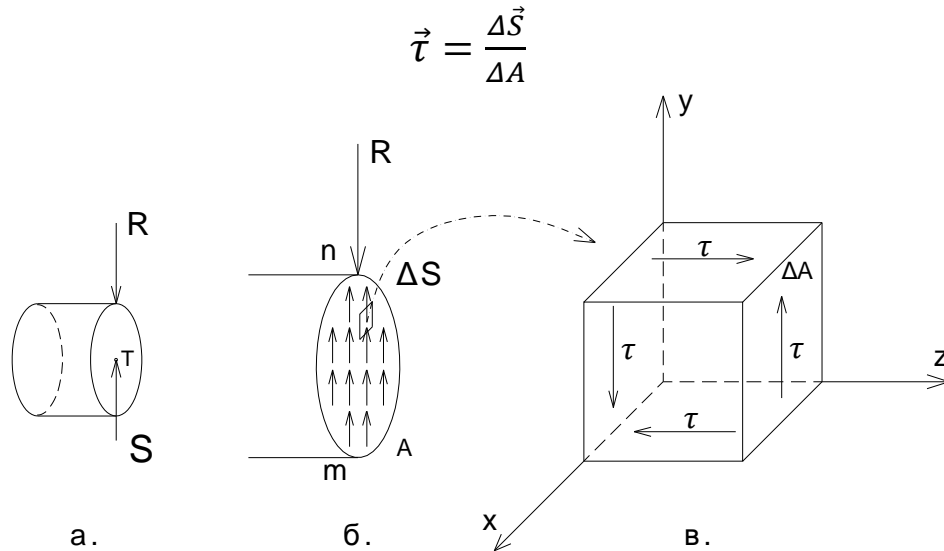


Сл. 3.А.1 Елемент напрегнут на смицање.

¹⁵ У анализираном случају занемарује се момент спрега антипаралелних сила R и P , релативно малог интензитета ($m=P \cdot h$), с обзиром да је крак спрега h релативно мале дужине (Сл. 3.А.1в).

3.A.г) Распредела тангенцијалних напона при смицању

Завртањ дат на слици на који делују спољне смичуће силе на правцу управном на његову осу на блиском растојању је **напрегнут на смицање** (занемарује се дејство момента спрега) (Сл. 3.A.1в). Сила S која се јавља у пресеку завртња је резултанта унутрашњих елементарних сила ΔS које делују на елементарне површине ΔA попречног пресека (3.A.2б). Однос интензитета унутрашње елементарне силе која лежи у пресечној равни и елементарне површине попречног пресека на коју та сила делује представља **тангенцијални напон** у тачкама попречног пресека τ (3.A.2в).



Сл. 3.A.2 Распредела тангенцијалних напона при смицању – елементарна коцка.

На слици је дата елементарна коцка у околини произвољне тачке попречног пресека завртња m - n управног на осу штапа (Сл. 3.A.в). Како би елементарна коцка била у равнотежи, елементарне силе које делују дуж Y правца на супротним бочним странама коцке морају бити истог интензитета, а супротног смера. Такође, спрегу који чине ове две антипаралелне силе дуж Y правца мора бити супротстављен спрег сила дуж Z правца (став о коњугованости тангенцијалних напона).

При смицању тангенцијални напон τ има исту величину у свакој тачки попречног пресека завртња m - n . У том контексту, интензитет тангенцијалног напона у тачки попречног пресека завртња добија се као количник силе S и површине попречног пресека завртња A . Интензитет тангенцијалног напона мора бити мањи од дозвољеног за дати материјал.

$$\tau = \frac{S}{A} \leq \tau_{doz}$$

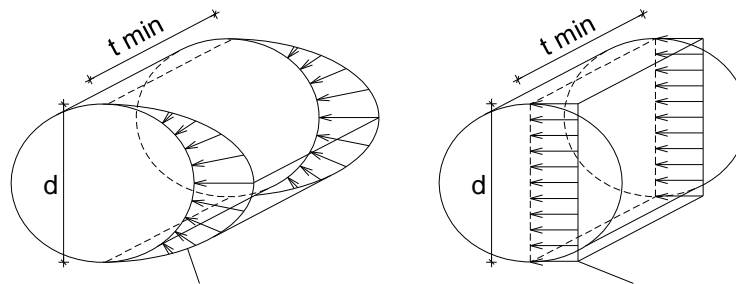
При димензионисању завртња напрегнутог на смицање прорачунава се потребна површина попречног пресека завртња која се добија као количник смичуће силе и дозвољеног тангенцијалног напона за дати материјал и случај оптерећења. За усвојен пречник тела завртња, врши се контрола тангенцијалног напона.

$$A_{pot} = \frac{S}{\tau_{doz}} \quad \tau = \frac{S}{A_{usv}} \leq \tau_{doz}$$

Поред контроле тангенцијалних напона који се јављају у попречном пресеку завртња m - n , при димензионисању завртња потребно је извршити и контролу нормалних напона који се јављају услед бочног површинског притиска на тело завртња (притисак по омотачу рупе кроз коју пролази завртањ) (Сл. 3.A.3а). Рачунски нормални напон се добија као количник силе

притиска, која је једнака смичућој сили S , и површине пројекције закривљене ободне површи ($A_{bp}=d \cdot t_{min}$; d – пречник завртња; t_{min} – минимална дебелина лима у вези) (Сл. 3.А.3б) . Рачунски нормални напон мора бити мањи од дозвољеног напона бочног притиска за дати материјал.

$$\sigma_{bp} = \frac{S}{A_{bp}} = \frac{S}{d \cdot t_{min}} \leq \sigma_{bp\,doz}$$



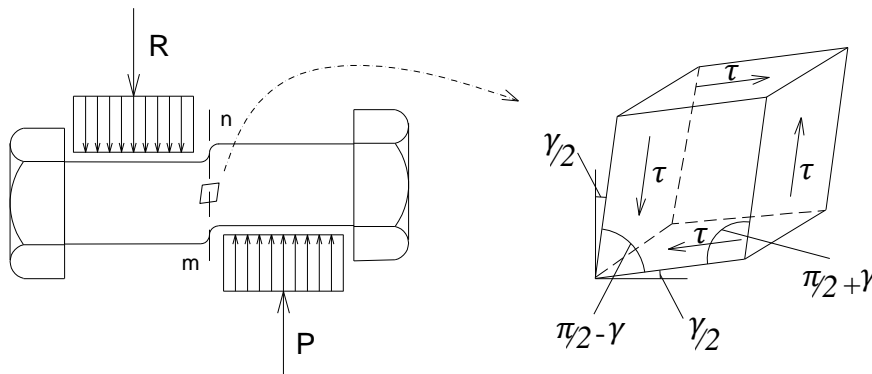
стварна расподела бочног притиска

рачунска расподела бочног притиска

Сл. 3.А.3 Стварна и рачунска расподела бочног притиска на тело завртња.

3.А.д) Деформација при смицању

Услед деловања спољних смичућих сила, активне P и реактивне R_A , долази до деформације завртња¹⁶ (Сл. 3.А.4а). Уколико се посматра елементарна коцка у околини произвољне тачке попречног пресека завртња $m-n$ може се уочити промена њеног облика. Почетна елементарна коцка постаје коси паралелопипед, са непромењеном дужином страна, односно долази до промене почетног правог угла које су заклапале стране коцке (Сл. 3.А.4б). Промена величине почетног правог угла назива се клизањем γ . Деформација завртња у еластичном подручју траје све дотле док се не успостави равнотежа између спољних и унутрашњих сила које се опирају дејству спољних и које теже да честице завртња врате у првобитни положај. Деформација је зависна од величине тангенцијалне силе S и расте са порастом интензитета силе.



Сл. 3.А.4 Деформација завртња при смицању – елементарна коцка.

Зависност између тангенцијалног напона при смицању τ и клизања γ дата је изразом који представља Хуков закон за случај смицања, по коме у границама еластичности материјала постоји пропорционалност између тангенцијалног напона и клизања, која се може изразити преко модула клизања G (МПа). Модул клизања се израчунава на основу модула еластичности материјала E и Поасоновог коефицијента ν .

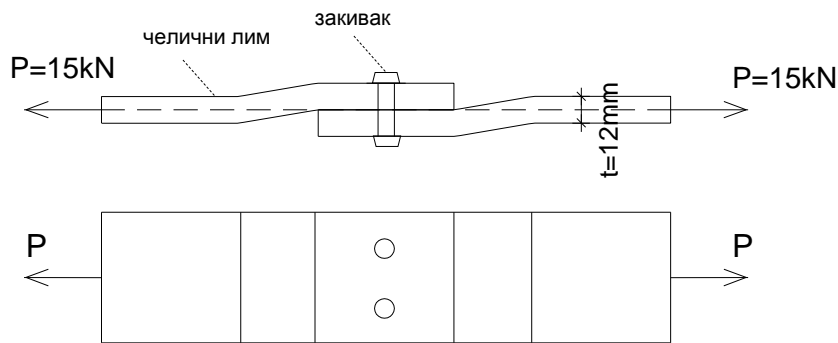
$$\tau = G \cdot \gamma \qquad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

¹⁶ При успостављању услова статичке равнотеже занемарена је деформација завртња, као релативно мала у односу на његове димензије.

3.Б. Бројни примери

3.Б.1 – Димензионисање везе две плоче остварене закивцима

- Два челична лима оптерећена силом $P=15\text{kN}$ повезана су помоћу два закивка. Димензионисати закивке ако је дозвољени тангенцијални напон при смицању $\tau_{doz}=100\text{MPa}$, а затим извршити контролу нормалног напона бочног притиска на тело закивка за $\sigma_{doz}=80\text{MPa}$. Лимови су истих дебљина $t=12\text{mm}$.



Димензионисање закивка (n - број закивака; d – пречник закивка; t – дебљина лима):

$$\tau = \frac{S}{A} < \tau_{doz} \rightarrow A_{pot} = \frac{S}{\tau_{doz}} = \frac{15 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^6} = 0.00015\text{m}^2 = 1.5\text{cm}^2 \quad (S = P)$$

$$A = n \cdot \frac{d^2 \pi}{4} \rightarrow d_{pot} = \sqrt{\frac{4A_{pot}}{n \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0.00015}{2 \cdot 3.14}} = 0.0098\text{m} = 9.8\text{mm}$$

$$d_{usv} = 10\text{mm}$$

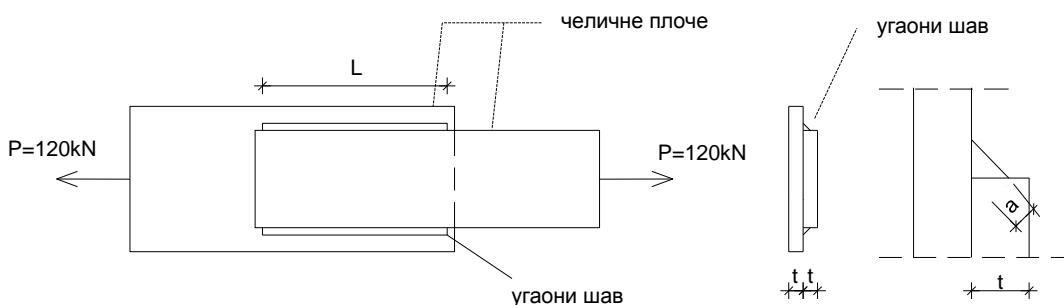
Провера на бочни површински притисак на тело завртња:

$$A_{op} = n \cdot d \cdot t = 2 \cdot 0.01 \cdot 0.012 = 0.00024\text{m}^2$$

$$\sigma_{bpstv} = \frac{S}{A_{op}} = \frac{15 \cdot 10^{-3}}{0.00024} = 62.5\text{MPa} < \sigma_{bpdoz} = 80\text{MPa}$$

3.Б.2 – Димензионисање везе две плоче остварене заваривањем

- Одредити дужину угаоних шавова вара спојених челичних плоча оптерећених силама затезања интензитета $P=120\text{kN}$, ако је дозвољени тангенцијални напон при смицању $\tau_s=110\text{MPa}$, а дебљина плоча $t=10\text{mm}$.



Одређивање дужине угаоних шавова вара:

$$\tau = \frac{S}{2 \cdot a \cdot L} \leq \tau_{s \text{ dop}}$$

$$a = t \cdot \cos 45^\circ = 0.7 \cdot t$$

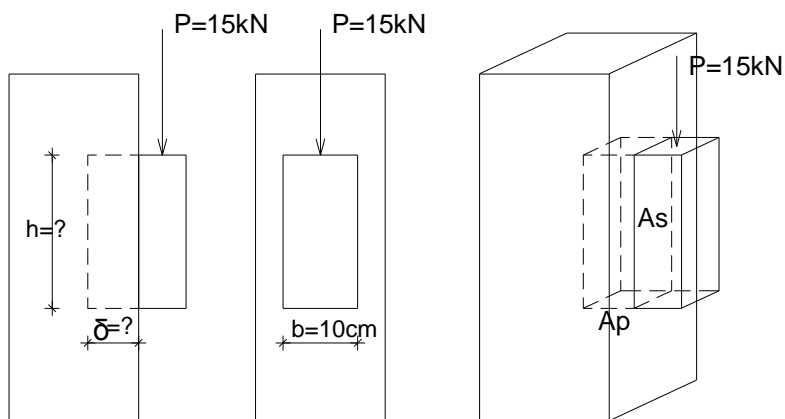
$$\tau_{s \text{ dop}} = \frac{S}{2 \cdot a \cdot L} = \frac{S}{2 \cdot 0.7 \cdot t \cdot L}$$

$$L_{pot} = \frac{S}{\tau_{s \text{ dop}} \cdot 2 \cdot 0.7 \cdot t} = \frac{120 \cdot 10^3}{110 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 0.7 \cdot 0.01} = 0.0779 \text{ m} = 7.79 \text{ cm}$$

$$L_{usv} = 8 \text{ cm}$$

3.Б.3 – Димензионисање везе стуба и зуба остварене лепљењем

- Дрвени зуб, ослоњен на стуб, оптерећен је силом $P=15\text{kN}$. Одредити висину дрвеног зуба h , ако је дозвољени тангенцијални напон при смицању $\tau_{doz}=0.9\text{MPa}$, као и дубину засека δ , ако је дозвољени нормални напон при притиску $\sigma_{doz}=2.0\text{MPa}$ (занемарити момент силе у односу на ивицу стуба).



Одређивање дубине засека:

$$\sigma = \frac{P}{A_p} = \frac{P}{\delta \cdot b} \rightarrow \delta = \frac{P}{\sigma_{doz} \cdot b} = \frac{15 \cdot 10^3}{2.0 \cdot 10^6 \cdot 0.1} = 0.075 \text{ m} = 7.5 \text{ cm}$$

$$\delta_{usv} = 8 \text{ cm}$$

Одређивање висине зуба:

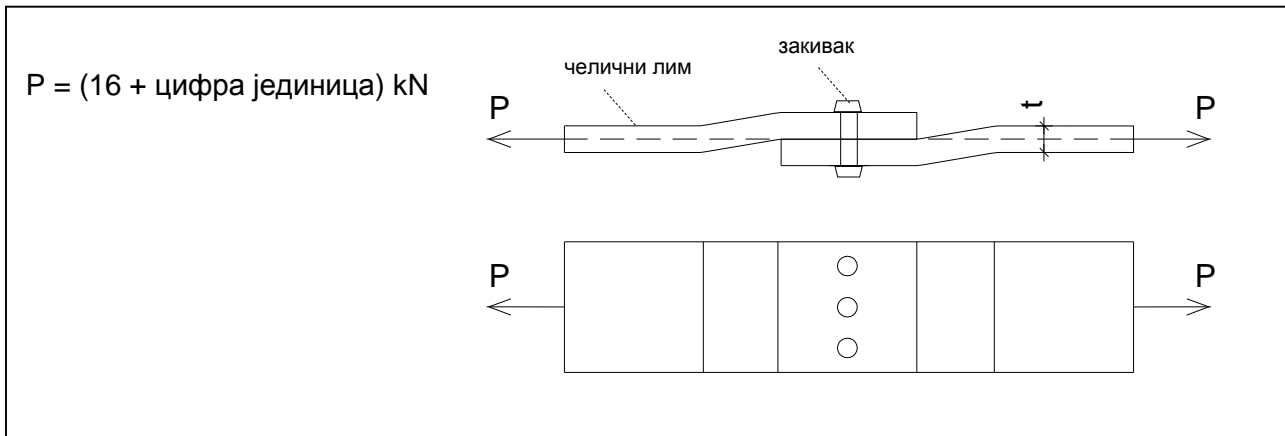
$$\tau = \frac{P}{A_s} = \frac{P}{h \cdot b} \rightarrow h = \frac{P}{\tau_{s \text{ doz}} \cdot b} = \frac{15 \cdot 10^3}{0.9 \cdot 10^6 \cdot 0.1} = 0.166 \text{ m} = 16.6 \text{ cm}$$

$$h_{usv} = 18 \text{ cm}$$

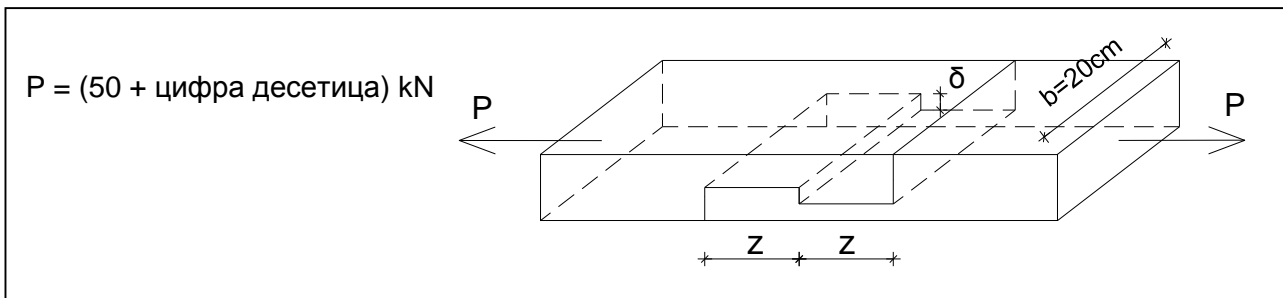
3.B. Вежба 3 (III предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

а) Два челична лима оптерећена силом P повезана су помоћу три закивак. Димензионисати закивке ако је дозвољени тангенцијални напон при смицању $\tau_{doz}=100\text{MPa}$, а затим извршити контролу нормалног напона бочног притиска на тело закивка за $\sigma_{doz}=80\text{MPa}$. Лимови су истих дебљина $t=10\text{mm}$.



б) За дати наставак дрвеног штапа оптерећеног силом затезања P одредити дужину засека z , ако је дозвољени тангенцијални напон при смицању $\tau_{doz}=0.9\text{MPa}$, као и дубину засека δ , ако је дозвољени нормални напон $\sigma_{doz}=8.5\text{MPa}$.



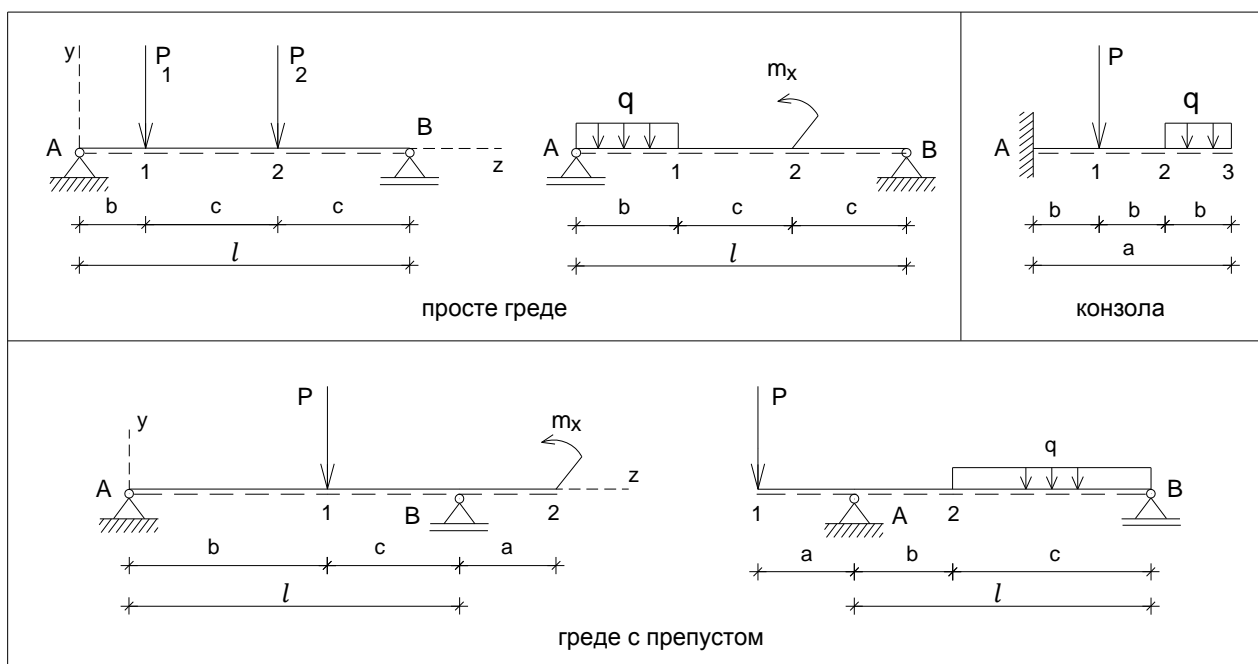
4. ЗАДАТАК 4 - ЕЛЕМЕНТИ НАПРЕГНУТИ НА САВИЈАЊЕ СИЛАМА

4.1 ЗАДАТАК 4.1 - Елементи напрегнути на право савијање силама

На основу Анализе случајева у општим бројевима и анализе Бројних примера, решити постављене задатке у оквиру датих Вежби.

4.1.А.абв Анализа случајева

4.1.А.а) **Дејство - Оптерећење** – Дати су примери носача на које делују спољне концентрисане силе P на правцима управним на осу штапа, расподељено оптерећење q (занемарена је сопствена тежина штапа), као и концентрисани моменти m_x у равни штапа, а у равни YZ (Сл. 4.1.А.а.1). У питању су проста греда, конзола и греда с препустом, као пуни статички одређени линијски носачи.



Сл. 4.1.А.а.1 Елементи напрегнути на право савијање силама.

Проста греда је за основу једним својим крајем везана непокретним лежиштем (непокретним зглобом), а другим крајем покретним лежиштем (покретним зглобом)¹⁷. Конзола је за основу једним својим крајем везана укљештеним лежиштем¹⁸, док је други крај слободан. Греда с препустом је за основу везана непокретним лежиштем (непокретним зглобом) и покретним лежиштем (покретним зглобом), при чему се једно лежиште не налази на крају греде.

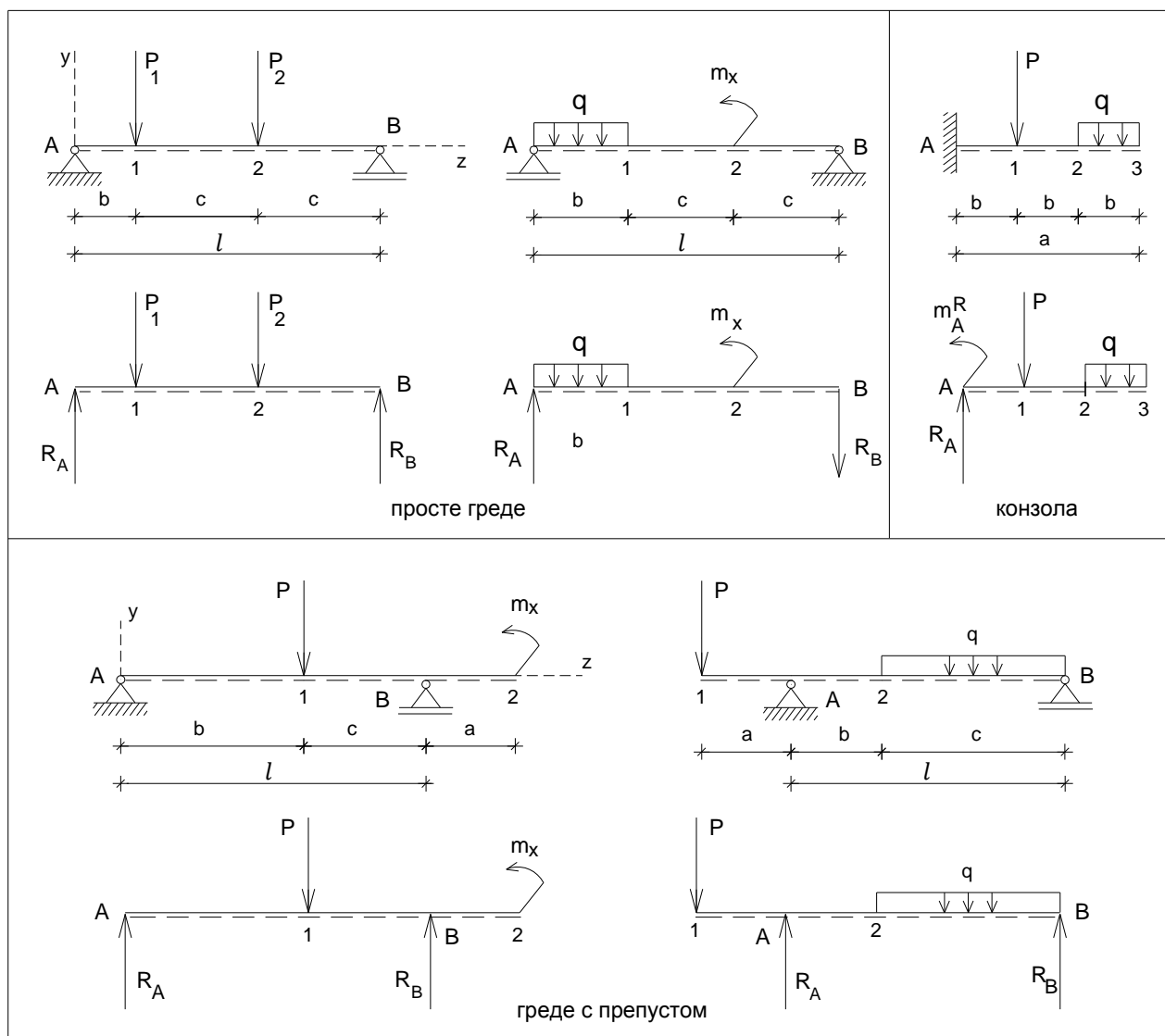
Концентрисана оптерећења, концентрисане силе P и концентрисани моменти m_x , делују у једној тачки носача, док расподељено оптерећење¹⁹ q делује по дужини носача, односно по јединици дужине осе носача.

¹⁷ Покретни зглоб са једним ослонцем спречава translацију штапа у једном одређеном правцу (у датим случајевима Y правцу), док непокретни зглоб са два ослонца спречава translацију штапа у два одређена правца (у датим случајевима Y и Z правцу).

¹⁸ Укљештењо лежиште спречава translацију штапа у два правца и ротацију укљештеног пресека штапа у равни.

¹⁹ Расподељено (континуално) оптерећење q може бити равномерно, када је интензитет у свакој тачки исти (као у датим случајевима), или неравномерно, када је интензитет дуж носача променљив.

4.1.A.6) **Реакције веза - Равнотежа** – Штапови датих носача су у стању статичке равнотеже захваљујући појави реакција веза²⁰, односно сила R_A и R_B у случају просте греде и греде с препустом, и силе R_A и момента укљештења m_{AR} у случају конзоле (Сл. 4.1.A_б.1).



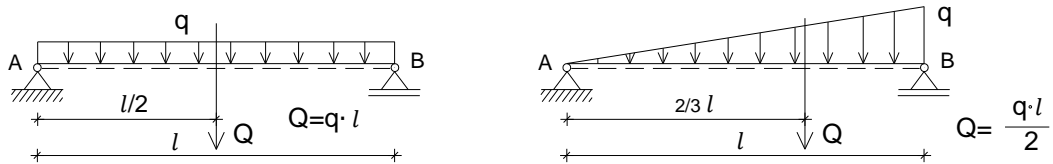
Сл. 4.1.A_б.1 Реакције веза.

Реакције веза се добијају из услова статичке равнотеже крутог тела у равни YZ, односно из услова да је алгебарски збир пројекција свих сила на осу Z и на осу Y једнак нули и алгебарски збир момената M_x појединачних сила из система сила у односу на било коју тачку на штапу и концентрисаних момената – спрегова m_x једнак нули. При одређивању реакција веза код просте греде бира се зглоб A као тачка у којој се поставља услов равнотеже $\sum M_A = 0$ (сума статичких момената), чиме се елиминира једна непозната из једначине (непознате су R_A и R_B).

$$\sum P_y = 0 \quad \sum P_z = 0 \quad \sum M_x(\vec{P}) + \sum m_x = 0$$

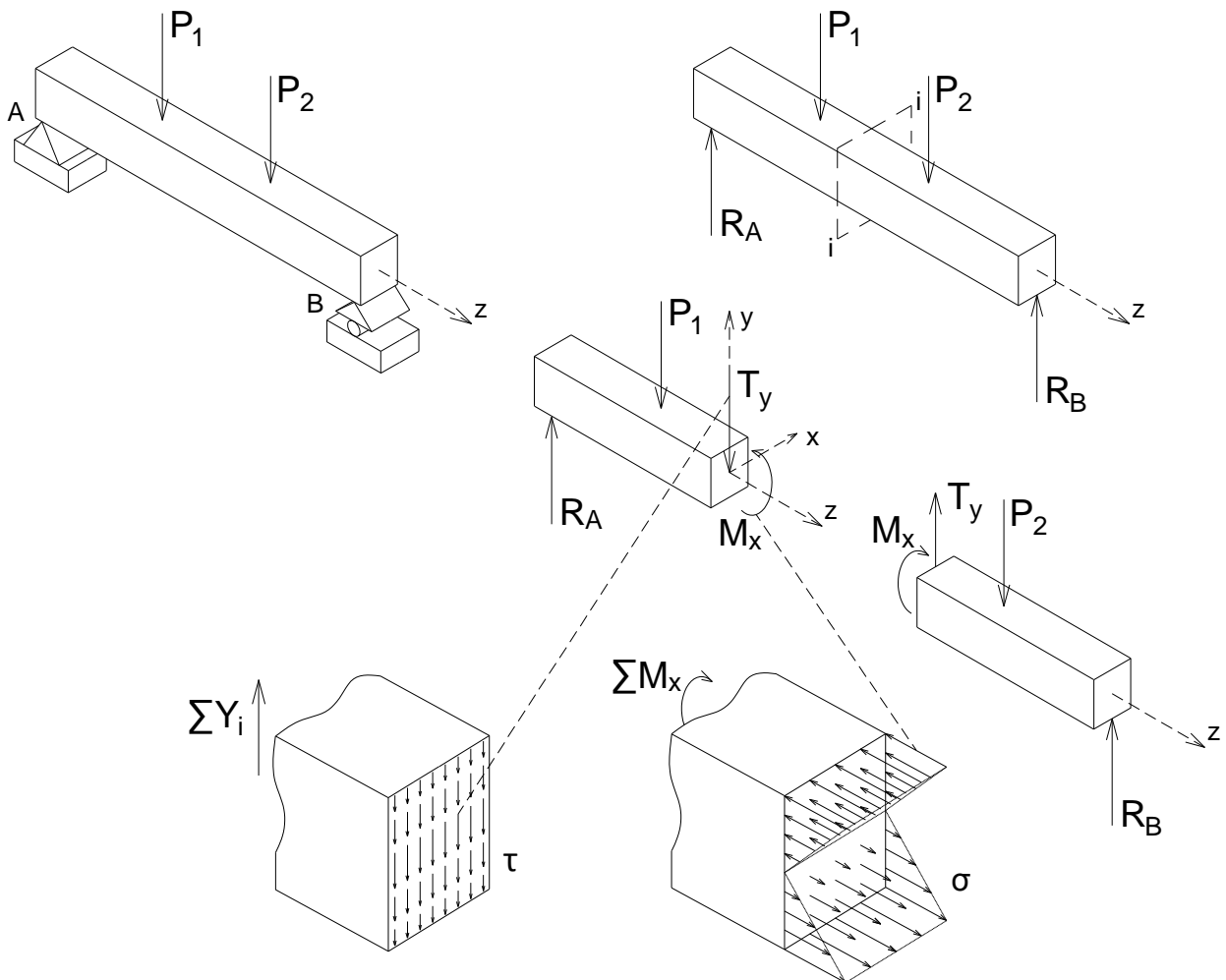
При одређивању реакција веза, расподељено оптерећење се замењује својом резултантом, односно концентрисаним силом Q, чији је интензитет једнак површини геометријске фигуре расподељеног оптерећења, а чија нападна линија пролази кроз тежиште фигуре (Сл. 4.1.A_б.2).

²⁰ Везе се замене реакцијама веза што омогућава да се штап анализира као слободно круто тело које је у статичкој равнотежи.



Сл. 4.1.A_6.2 Распредељена оптерећења.

4.1.A.в) **Сила и моменат у пресеку штапа** – У попречном пресеку штапа управном на осу штапа $i-i$, услед дејства спољних сила на правцима управним на осу штапа (у случају датом на слици активних P_1 и P_2 и реактивних R_A и R_B), јавља се унутрашња сила или сила у пресеку T_y – трансверзала сила (Сл. 4.1.A_в.1). Ова сила представља редуковану резултанту унутрашњих елементарних сила које леже у равни попречног пресека штапа²¹, редукованих на тежиште попречног пресека (редукциони моменат је једнак нули). У попречном пресеку штапа управном на осу штапа $i-i$, услед дејства момената спољних сила и/или концентрисаних момената, јавља се унутрашњи моменат или моменат у пресеку M_x – моменат савијања (Сл. 4.1.A_в.1). У питању је моменат резултујућег редукованог спрега унутрашњих елементарних сила управних на раван пресека, редукованих на тежиште попречног пресека штапа (редукциона резултанта је једнака нули).

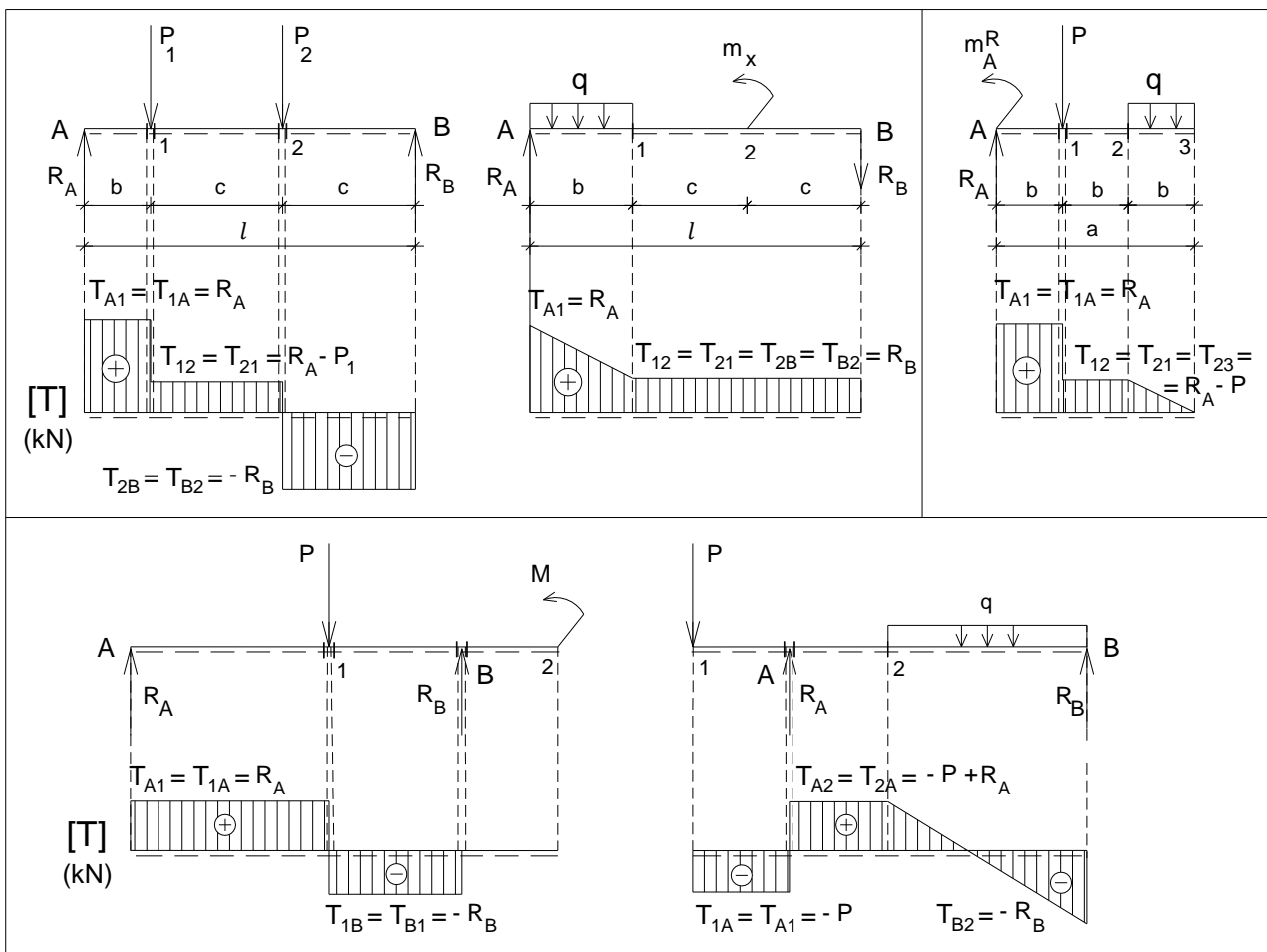


Сл. 4.1.A_в.1 Сила и моменат у пресеку штапа при правом савијању силама – елементарне силе.

²¹ У равни попречног пресека постоје и унутрашње елементарне силе на правцима паралелним са X осом, чија је величина релативно мала и може се занемарити код попречних пресека штапа чије су ивице паралелне са Y осом.

За одређивање силе T_y у пресеку штапа користи се метода пресека. Штап се замишљено пресеца попречном равни управном на осу штапа, на избраном месту $i-i$, а затим се подели на два дела (Сл. 4.1.A_в.1). Сила T_y у пресеку штапа се одређује помоћу услова статичке равнотеже целине и њених делова. Применом овог поступка, сила T_y у пресеку посматра се као спољашња за издвојени део. У том смислу, сила T_y у пресеку се добија из услова да сума свих сила по Y оси за издвојени део буде једнака нули $\sum Y=0$.

У општем случају, трансверзална сила T_y у произвољном попречном пресеку штапа носача $i-i$ једнака је алгебарском збиру пројекција свих спољних сила са једне или друге стране пресека на правац управан на осу штапа. Трансверзална сила T_y је позитивна (+) ако обрће елемент штапа у смеру казаљке на сату (Сл. 4.1.A_в.3а), а негативна је (-) уколико га обрће у смеру супротном од казаљке на сату. Интензитет трансверзалних сила у попречним пресецима штапа се графички представља у облику дијаграма²² (Сл. 4.1.A_в.2). Позитивне вредности трансверзалних сила се наносе на страни пуне линије, а негативне на страни црткасте линије (штап се представља пуном и црткастом линијом). Нанесене ординате у карактеристичним попречним пресецима се линијски повежу. За дате примере означени су карактеристични пресеци за које је потребно израчунати вредности трансверзалних сила (Сл. 4.1.A_в.2). У дијаграму T постоји скок у пресеку у коме делује концентрисана сила на правцу управном на осу штапа.



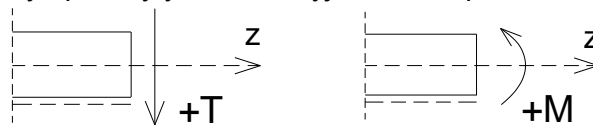
Сл. 4.1.A_в.2 Дијаграми трансверзалних сила – карактеристични пресеци.

За одређивање момента савијања M_x у пресеку штапа користи се метода пресека. Штап се замишљено пресеца попречном равни управном на осу штапа, на избраном месту $i-i$, а затим се подели на два дела (Сл. 4.1.A_в.1). Моменат савијања M_x у пресеку штапа се одређује

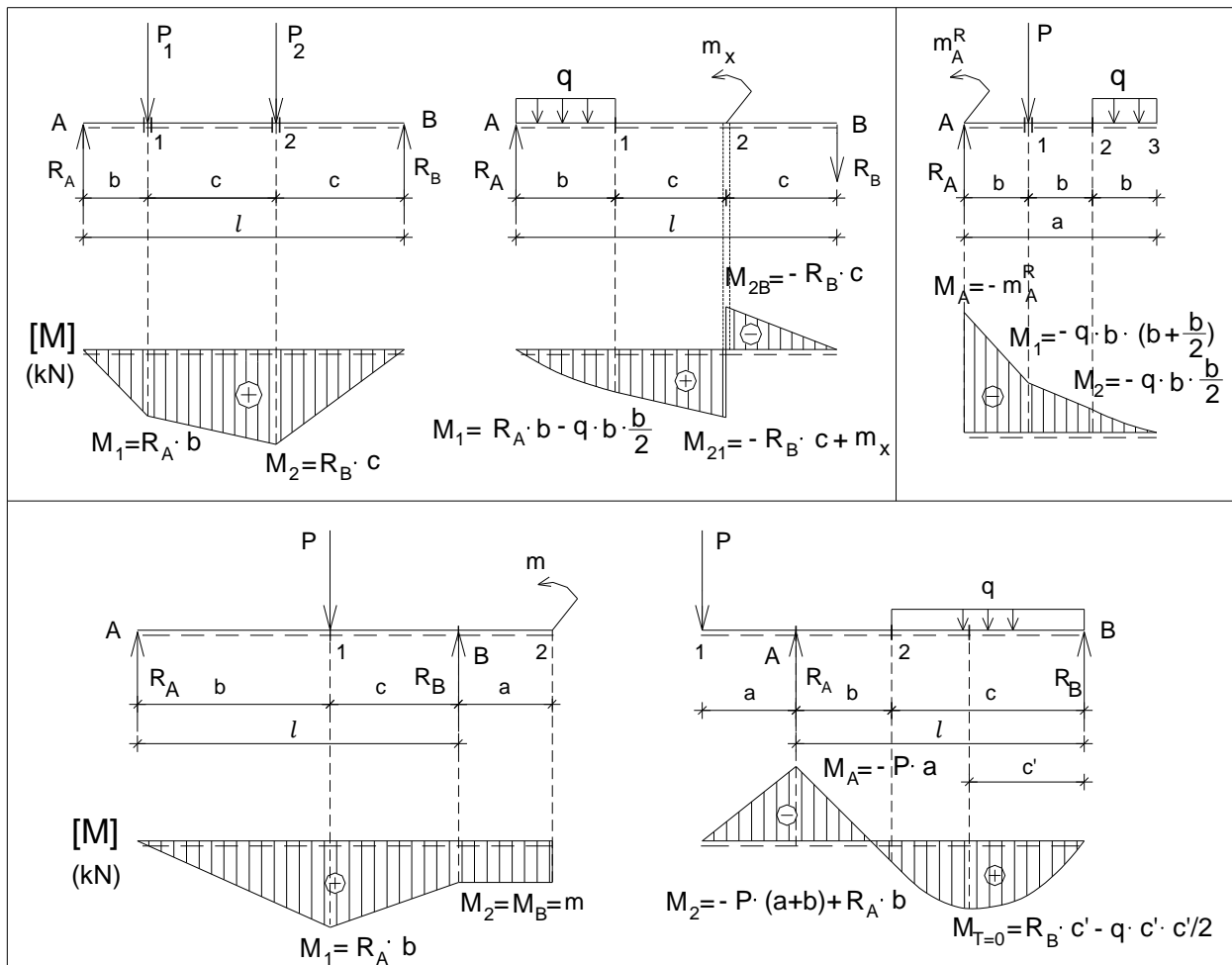
²² Дијаграми се цртају у одговарајућој размери, тако што се усвоји да одређен број сантиметара одговара одређеном броју kN.

помоћу услова статичке равнотеже целине и њених делова. Применом овог поступка, моменат савијања M_x у пресеку посматра се као спољашњи за издвојени део. У том смислу, моменат савијања M_x у пресеку се добија из услова да сума свих момената за издвојени део буде једнака нули $\sum M_x=0$.

У општем случају, моменат савијања M_x (савијање око осе X) у произвољном попречном пресеку штапа носача i -и једнак је алгебарском збиру момената свих спољних сила и/или концентрисаних момената у односу на тежиште попречног пресека са једне или друге стране пресека. Моменат савијања M_x је позитиван (+) ако је страна елемента штапа означена црткастом линијом затегнута (Сл. 4.1.A_в.3б), а негативан је (-) уколико је притиснута. Интензитет момената савијања у попречним пресецима штапа се графички представља у облику дијаграма²³ (Сл. 4.1.A_в.4). Позитивне вредности момента савијања се цртају на страни црткасте линије, а негативне на страни пуне линије, односно моменти савијања се цртају на оној страни штапа која је затегнута. Нанесене ординате у карактеристичним попречним пресецима се линијски повежу. За дате примере означени су карактеристични пресеци за које је потребно израчунати вредности момената савијања M_x (Сл. 4.1.A_в.4). У дијаграму M_x постоји скок у пресеку у коме делује концентрисани момент - спрег m_x .



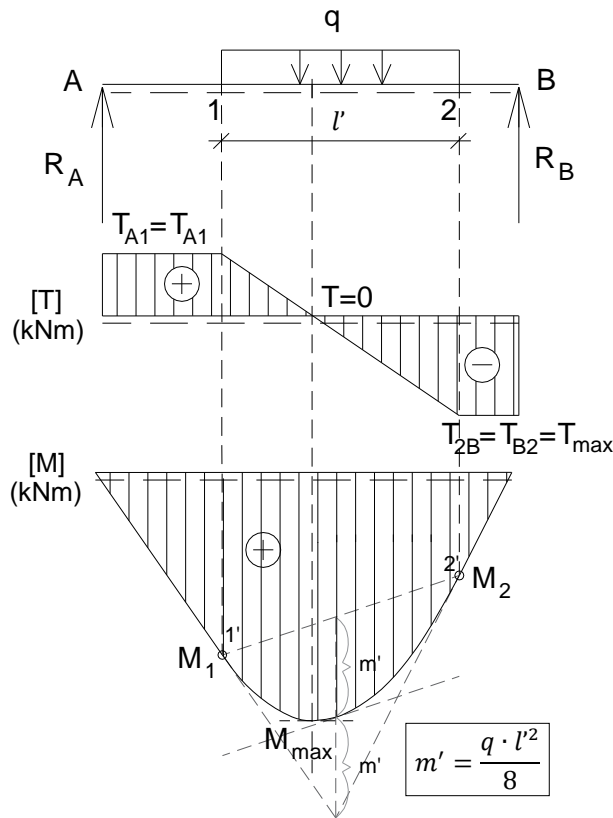
Сл. 4.1.A_в.3 Конвенције знака трансверзалне силе и момента савијања.



Сл. 4.1.A_в.4 Дијаграми момената савијања – карактеристични пресеци.

²³ Дијаграми се цртају у одговарајућој размери, тако што се усвоји да одређен број сантиметара одговара одређеном броју kNm.

Због диференцијалне зависности између функција расподељеног оптерећења q , трансверзалне силе T_y и момента савијања M_x , на деловима штапа где не делује расподељено оптерећење дијаграм трансверзалних сила је константна функција, док је дијаграм момената савијања линеарна функција. На деловима штапа где делује равномерно расподељено оптерећење q дијаграм трансверзалних сила је линеарна функција, док је дијаграм момената савијања квадратна функција – парабола (Сл. 4.1.A_в.5). Парабола, чије су крајње тачке 1' и 2', се конструира помоћу стреле параболе m' и тангенти. Среда параболе се добија као вредност максималног момента прости греде распона l' (од 1-2), оптерећене са q ($m' = q \cdot l'^2 / 8$). Стрела параболе се наноси на средини дужи 1'-2', у смеру деловања оптерећења q (у овом случају вертикално на доле). Максимални момент савијања се у анализираном случају јавља у пресеку у коме је трансверзална сила једнака нули.

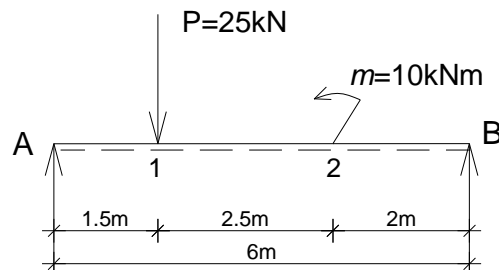
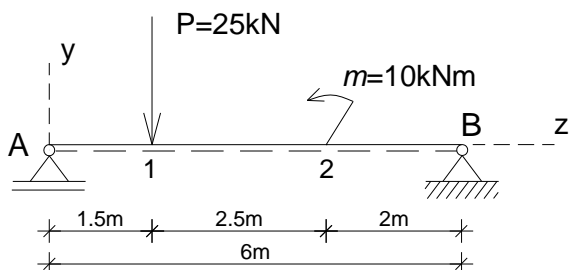


Сл. 4.1.A_в.5 Конструисање параболе на делу дијаграма момената савијања на коме делује расподељено оптерећење q .

4.1.Б.абв Бројни примери

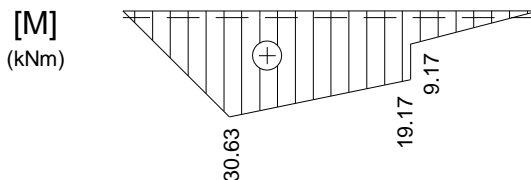
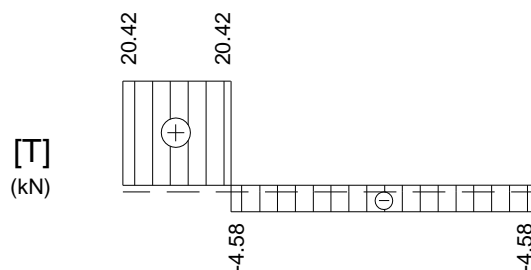
4.1.Б.абв.1 – Одређивање сила и момената у пресецима просте греде при правом савијању силама

- За просту греду оптерећену према скици одредити реакције веза и пресечне силе у карактеристичним пресецима. Нацртати дијаграме пресечних сила.



$$R_A = 20.42 \text{ kN}$$

$$R_B = 4.58 \text{ kN}$$



Реакције веза:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -P \cdot 4,5 - m + R_A \cdot 6,0 = 0$$

$$R_A = (25 \cdot 4,5 + 10) / 6 = 20.42 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P \cdot 1,5 - m - R_B \cdot 6,0 = 0$$

$$R_B = (25 \cdot 1,5 - 10) / 6 = 4.58 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - P = 0$$

$$20.42 + 4.58 - 25 = 0 \quad 0 = 0 \text{ (контрола)}$$

Трансверзалне силе:

$$T_{A1} = T_{1A} = R_A = 20.42 \text{ kN}$$

$$T_{12} = T_{21} = T_{2B} = T_{B2} = R_A - P = 20.42 - 25 = -4.58 \text{ kN}$$

Моменти савијања:

$$M_A = 0$$

$$M_1 = R_A \cdot 1,5 = 20.42 \cdot 1,5 = 30.63 \text{ kNm}$$

$$M_{2 \text{ levo}} = R_A \cdot 4,0 - P \cdot 2,5 = 20.42 \cdot 4,0 - 25 \cdot 2,5 = 19.17 \text{ kNm}$$

$$M_{2 \text{ desno}} = R_A \cdot 4,0 - P \cdot 2,5 - m = 20.42 \cdot 4,0 - 25 \cdot 2,5 - 10 = 9.17 \text{ kNm}$$

$$\text{(или } M_{2 \text{ desno}} = R_B \cdot 2,0 = 4.58 \cdot 2,0 = 9.17 \text{ kNm)}$$

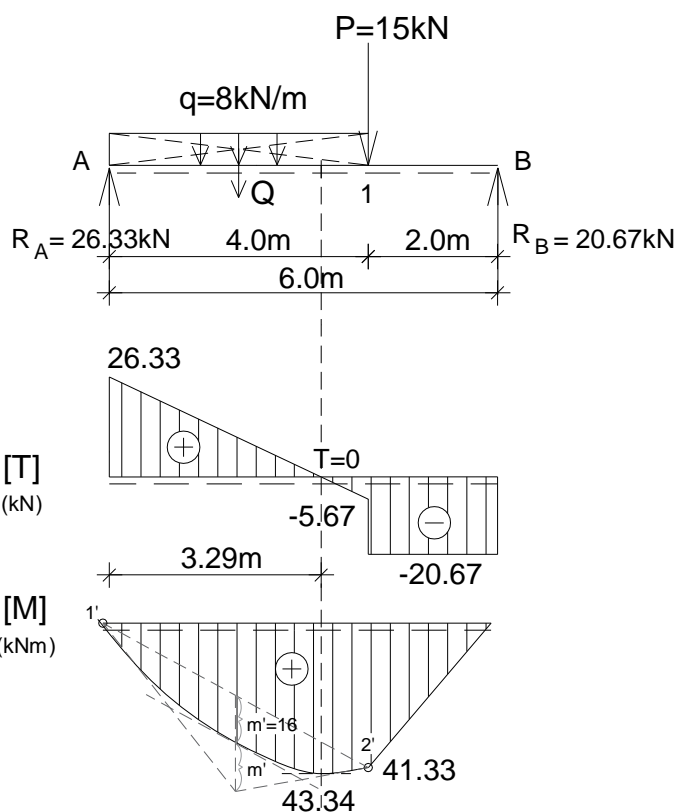
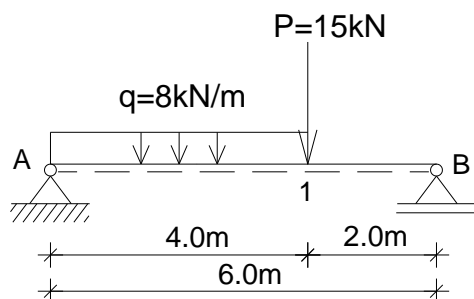
$$M_B = 0$$

Нормалне силе:

$$N_{A1} = N_{1A} = N_{12} = N_{21} = N_{2B} = N_{B2} = 0$$

4.1.Б.абв.2 – Одређивање сила и момената у пресецима просте греде при правом савијању силама

- За просту греду оптерећену према скици одредити реакције веза и пресечне силе у карактеристичним пресецима. Нацртати дијаграме пресечних сила.



$$Q = q \cdot 4,0 = 8 \cdot 4,0 = 32 \text{ kN}$$

Реакције веза:

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow -P \cdot 2,0 - Q \cdot 4,0 + R_A \cdot 6,0 = 0$$

$$R_A = (15 \cdot 2,0 + 32 \cdot 4,0) / 6 = 26,33 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow Q \cdot 2,0 + P \cdot 4,0 - R_B \cdot 6,0 = 0$$

$$R_B = (32 \cdot 2,0 + 15 \cdot 4,0) / 6 = 20,67 \text{ kN}$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow R_A - Q - P + R_B = 0$$

$$26,33 - 32 - 15 + 20,67 = 0 \quad 0 = 0 \text{ (контрола)}$$

Трансверзалне силе:

$$T_{A1} = R_A = 26,33 \text{ kN}$$

$$T_{1A} = R_A - Q = 26,33 - 32 = -5,67 \text{ kN}$$

$$T_{1B} = T_{B1} = -R_B = -20,67 \text{ kN}$$

$$T = 0 \Rightarrow R_A - q \cdot z = 0 \Rightarrow z = R_A/q = 26,33/8 = 3,29 \text{ m}$$

Моменти савијања:

$$M_A = 0$$

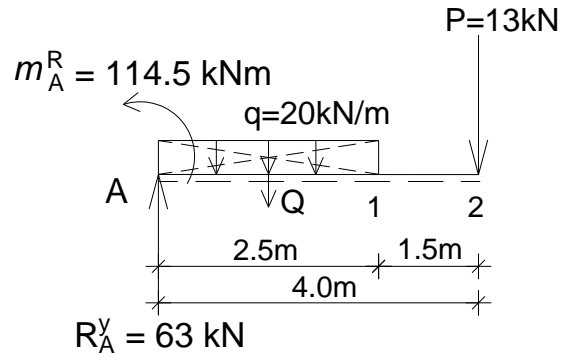
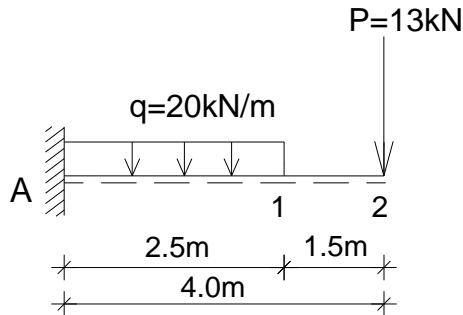
$$M_1 = R_B \cdot 2,0 = 20,67 \cdot 2,0 = 41,33 \text{ kNm}$$

$$M_{T=0} = R_A \cdot 3,29 - q \cdot 3,29 \cdot 3,29/2 = 26,33 \cdot 3,29 - 8 \cdot 3,29 \cdot 3,29/2 = 43,34 \text{ kNm}$$

$$M_B = 0$$

4.1.Б.абв.3 – Одређивање сила и момената у пресецима конзоле при правом савијању силама

- За конзолу оптерећену према скици одредити реакције веза а и пресечне силе у карактеристичним пресецима. Нацртати дијаграме пресечних сила.



$$Q = q \cdot 2,5 = 20 \cdot 2,5 = 50 \text{ kN}$$

Реакције веза:

$$\Sigma y = 0 \Rightarrow R_A - Q - P_y = 0$$

$$R_A = Q + P = 50 + 13 = 63 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow -m_A^R + Q \cdot 1,25 + P \cdot 4,0 = 0$$

$$m_A^R = 50 \cdot 1,25 + 13 \cdot 4,0 = 114,5 \text{ kNm}$$

Трансверзалне силе:

$$T_{A1} = R_A = 63 \text{ kN}$$

$$T_{1A} = R_A - Q = 63 - 50 = 13 \text{ kN}$$

$$T_{12} = T_{21} = P = 13 \text{ kN}$$

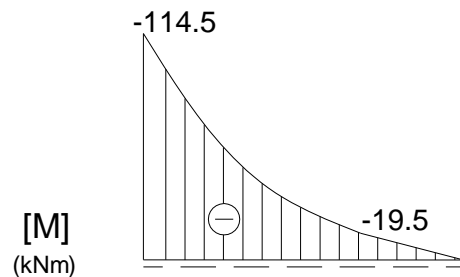
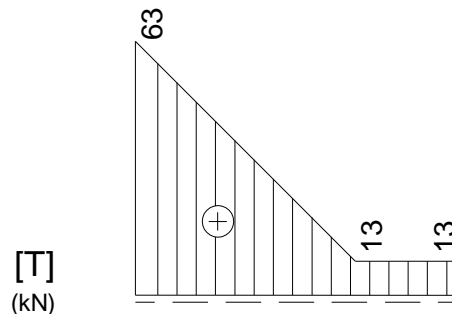
Моменти савијања:

$$M_2 = 0$$

$$M_1 = -P \cdot 1,5 = -13 \cdot 1,5 = -19,5 \text{ kNm}$$

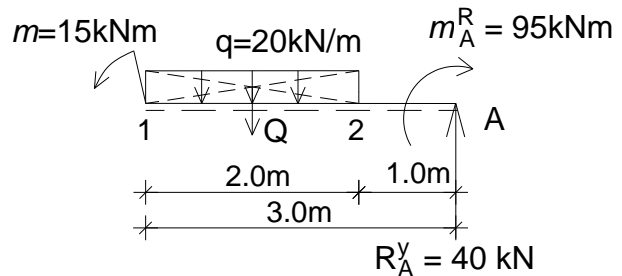
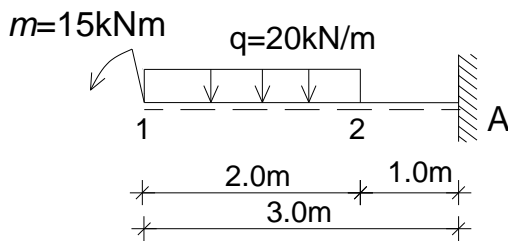
$$M_A = -P \cdot 4,0 - Q \cdot 1,25$$

$$M_A = -13 \cdot 4,0 - 50 \cdot 1,25 = -114,5 \text{ kNm}$$



4.1.Б.абв.4 – Одређивање сила и момената у пресецима конзоле при правом савијању силама

- За конзолу оптерећену према скици одредити реакције веза и пресечне силе у карактеристичним пресецима. Нацртати дијаграме пресечних сила.



$$Q = q \cdot 2.0 = 20 \cdot 2.0 = 40 \text{ kN}$$

Реакције веза:

$$\Sigma y = 0 \Rightarrow R_A - Q = 0$$

$$R_A = Q = 40 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad m_A^R = m + Q \cdot 2.0 = 0$$

$$m_A^R = 15 + 40 \cdot 2.0 = 95 \text{ kNm}$$

Трансверзалне силе:

$$T_{12} = 0$$

$$T_{21} = -Q = -40 \text{ kN}$$

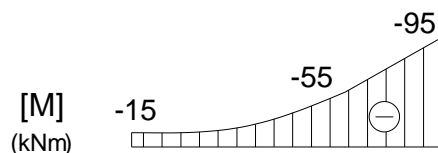
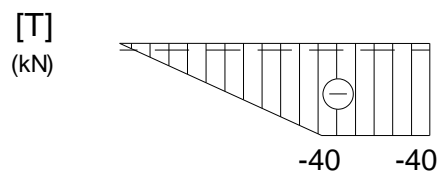
$$T_{2A} = T_{A2} = -R_A = -40 \text{ kN}$$

Моменти савијања:

$$M_1 = -m = 15 \text{ kNm}$$

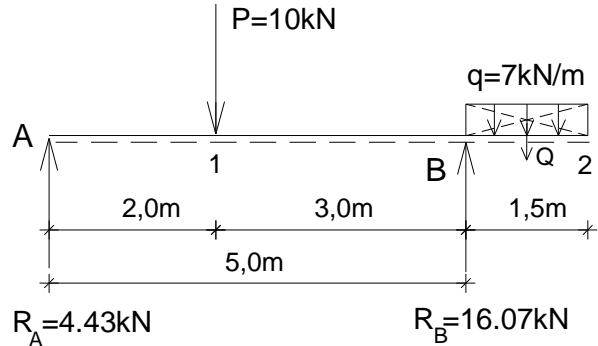
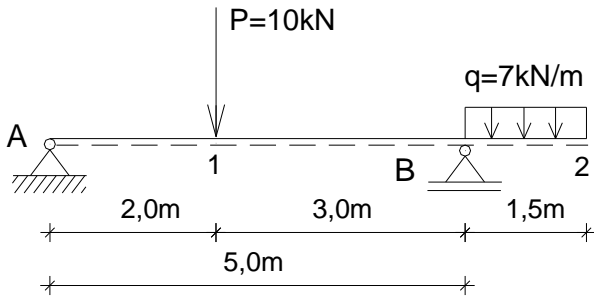
$$M_2 = -m - Q \cdot 1.0 = -15 - 40 \cdot 1.0 = -55 \text{ kNm}$$

$$M_A = -m - Q \cdot 2.0 = -15 - 40 \cdot 2.0 = -95 \text{ kNm}$$



4.1.Б.абв.5 – Одређивање сила и момената у пресецима греде с препустом при правом савијању силама

- За греду с препустом оптерећену према скици одредити реакције веза и пресечне силе у карактеристичним пресецима. Нацртати дијаграме пресечних сила.



$$Q = q \cdot 1,5 = 7 \cdot 1,5 = 10,5 \text{ kN}$$

Реакције веза:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\rightarrow R_B \\ P \cdot 2,0 - R_B \cdot 5,0 + Q \cdot (5,0 + 0,75) &= 0 \\ 10 \cdot 2,0 - R_B \cdot 5,0 + 10,5 \cdot 5,75 &= 0 \\ R_B &= 16,07 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 &\rightarrow R_A \\ R_A \cdot 5,0 - P \cdot 3,0 + Q \cdot 0,75 &= 0 \\ R_A \cdot 5,0 - 10 \cdot 3,0 + 10,5 \cdot 0,75 &= 0 \\ R_A &= 4,43 \text{ kN} \end{aligned}$$

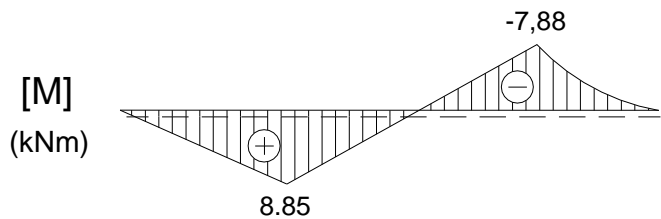
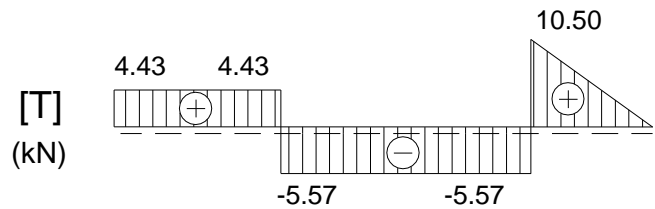
$$\begin{aligned} \sum Y = 0 &\Rightarrow R_A - P + R_B - Q = 0 \\ 4,43 - 10 + 16,07 - 10,5 &= 0 \quad 0 = 0 \text{ (контрола)} \end{aligned}$$

Трансверзалне силе:

$$\begin{aligned} T_{A1} = T_{1A} &= R_A = 4,43 \text{ kN} \\ T_{1B} = R_A - P &= 4,43 - 10 = -5,57 \text{ kN} \\ T_{B2} = Q &= 10,5 \text{ kN} \\ T_{2B} &= 0 \end{aligned}$$

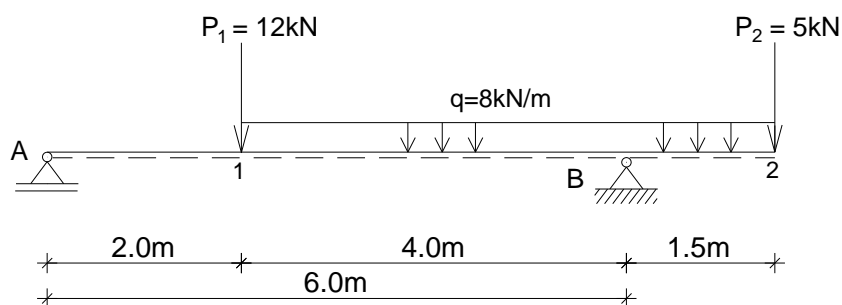
Моменти савијања:

$$\begin{aligned} M_A = M_2 &= 0 \\ M_1 = R_A \cdot 2,0 &= 4,43 \cdot 2,0 = 8,85 \text{ kNm} \\ M_B = -Q \cdot 0,75 &= -10,5 \cdot 0,75 = -7,88 \text{ kNm} \end{aligned}$$



4.1.Б.абв.6 – Одређивање сила и момената у пресецима греде с препустом при правом савијању силама

- За греду с препустом оптерећену према скици одредити реакције веза и пресечне силе у карактеристичним пресецима. Нацртати дијаграме пресечних сила.



$$Q_1 = q \cdot 4,0 = 8 \cdot 4,0 = 32 \text{ kN} \quad Q_2 = q \cdot 1,5 = 8 \cdot 1,5 = 12 \text{ kN}$$

Реакције веза:

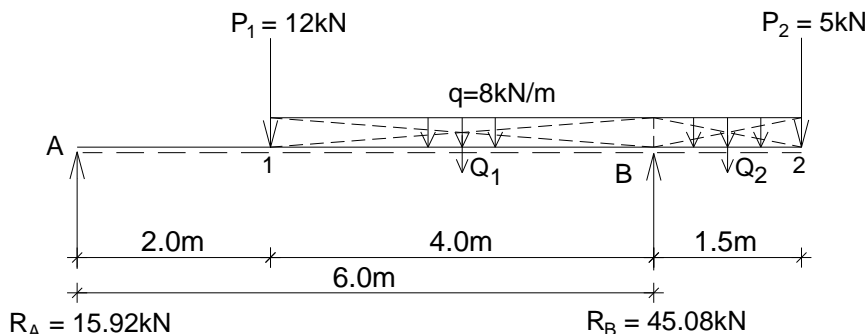
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow R_B$$

$$P_1 \cdot 2,0 + Q_1 \cdot 4,0 - R_B \cdot 6,0 + Q_2 \cdot 6,75 + P_2 \cdot 7,5 = 0 \Rightarrow R_B = 45,08 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow R_A$$

$$R_A \cdot 6,0 - P_1 \cdot 4,0 - Q_1 \cdot 2,0 + Q_2 \cdot 0,75 + P_2 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow R_A = 15,92 \text{ kN}$$

$$\Sigma y = 0 \Rightarrow R_A - P_1 - Q_1 + R_B - Q_2 - P_2 = 0$$



Трансверзалне силе:

$$T_{A1} = T_{1A} = R_A = 15,92 \text{ kN}$$

$$T_{1B} = R_A - P_1 = 15,92 - 12 = 3,92 \text{ kN}$$

$$T_{B1} = R_A - P_1 - Q_1 = 15,92 - 12 - 32 = -28,08 \text{ kN}$$

$$T_{B2} = Q_2 + P_2 = 12 + 5 = 17 \text{ kN}$$

$$T_{2B} = P_2 = 5 \text{ kN}$$

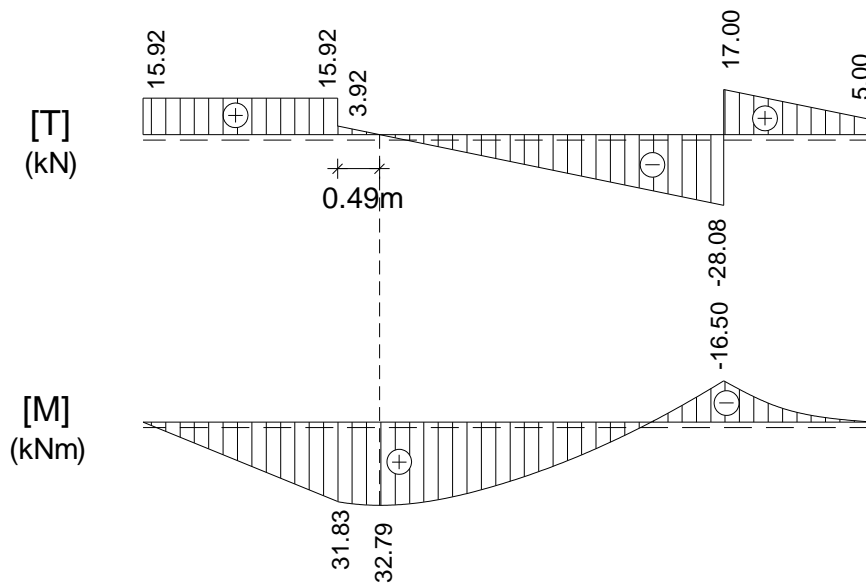
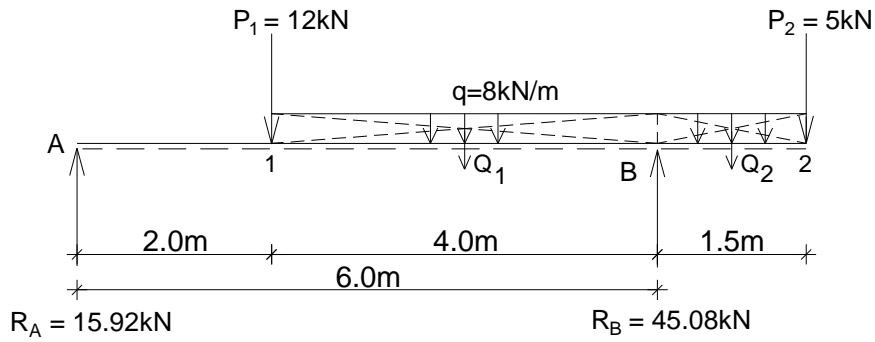
Моменти савијања:

$$M_1 = R_A \cdot 2,0 = 15,92 \cdot 2,0 = 31,83 \text{ kNm}$$

$$M_B = -Q_2 \cdot 0,75 - P_2 \cdot 1,5 = -12 \cdot 0,75 - 5 \cdot 1,5 = -16,5 \text{ kNm}$$

$$z = \frac{T_{1B}}{q} = \frac{3.92}{8} = 0.49m$$

$$M_{T=0} = R_A \cdot (2,0+z) - q \cdot z \cdot \frac{z}{2} - P_1 \cdot 0,49 = 15.92 \cdot 2,49 - 8 \cdot 0,49 \cdot \frac{0.49}{2} - 12 \cdot 0,49 = 32.79kNm$$

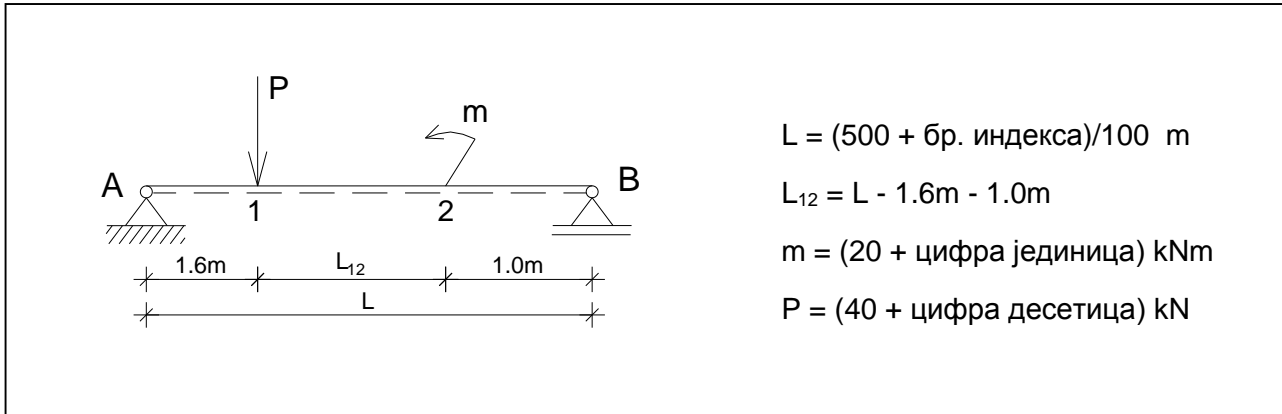


4.1.B.абв

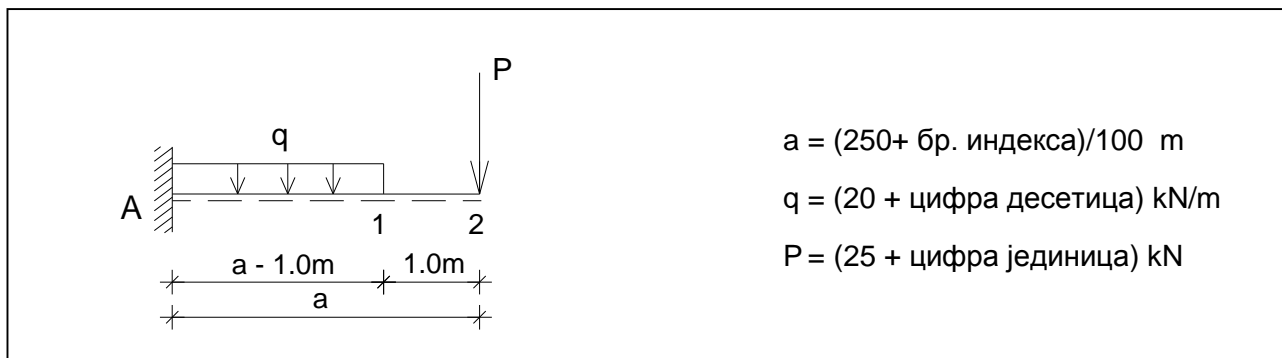
Вежба 4.1.абв.1 (IV предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

а) За просту греду оптерећену према скици одредити реакције веза и пресечне силе у карактеристичним пресецима. Нацртати дијаграме пресечних сила.



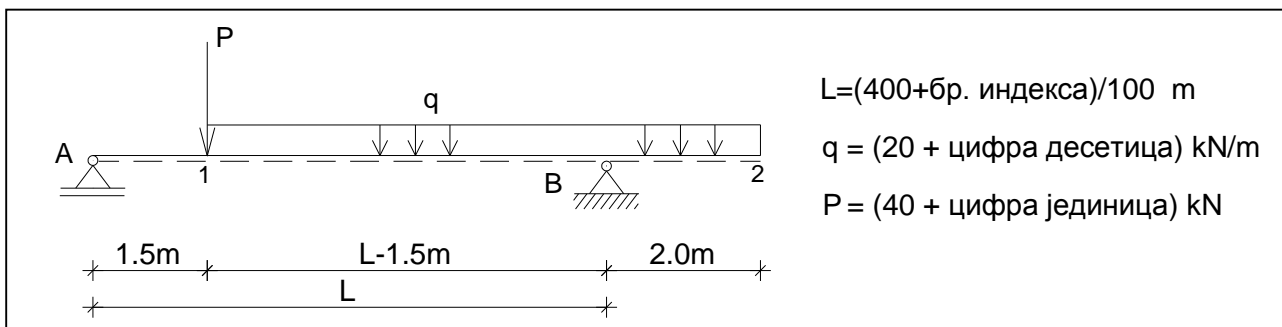
б) За конзолу оптерећену према скици одредити реакције веза и пресечне силе у карактеристичним пресецима. Нацртати дијаграме пресечних сила.



Вежба 4.1.абв.2 (V предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

За греду са препустом оптерећену према скици одредити реакције ослонца и пресечне силе у свим карактеристичним пресецима. Нацртати дијаграме пресечних сила.

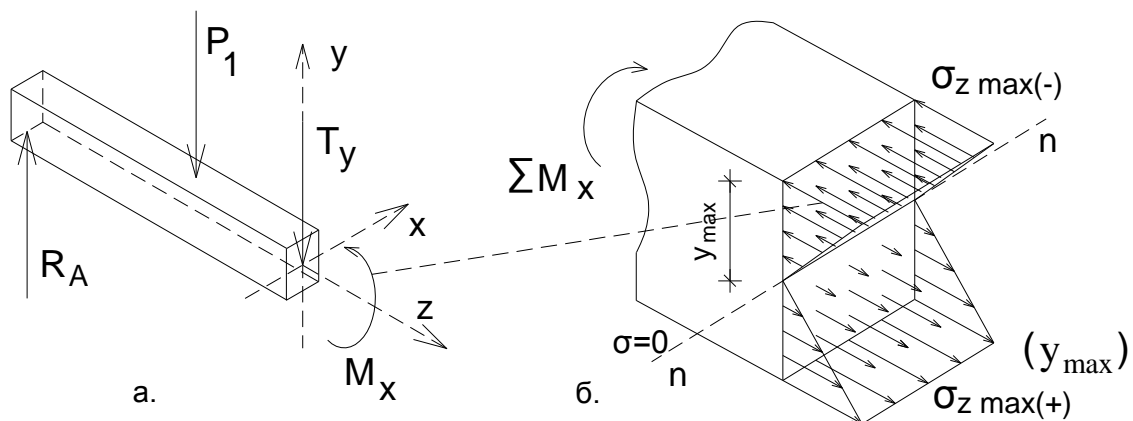


4.1.A.г Анализа случајева

4.1.A.г) **Расподела нормалних напона** - аксијални и отпорни момент инерције

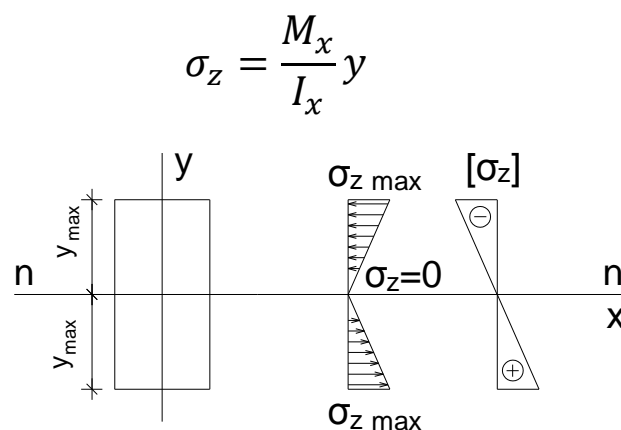
Штап анализираниг носача на које делују спољне силе на правцима управним на осу штапа је **напрегнут на право савијање силама**. У пресецима штапа се јавља моменат савијања M_x , односно нормални напони (Сл. 4.1A_г.1а). У пресеку се јавља и трансверзала сила T_y , односно тангенцијални напони (чија ће се расподела анализирати у потпоглављу 4.1.A.д).

Нормални напони σ_z су у случају правог савијања силама пропорционални удаљењу посматране тачке од неутралне линије n-n (линија дуж које су нормални напони једнаки нули, која се у овом случају поклапа са тежишном осом X), при чему се максимални нормални напони јављају у тачкама најудаљенијим од неутралне линије (Сл. 4.1A_г.1б). У анализираним случају у горњој зони попречног пресека јављају се нормални напони притиска (-), а у доњој зони се јављају нормални напони затезања (+).



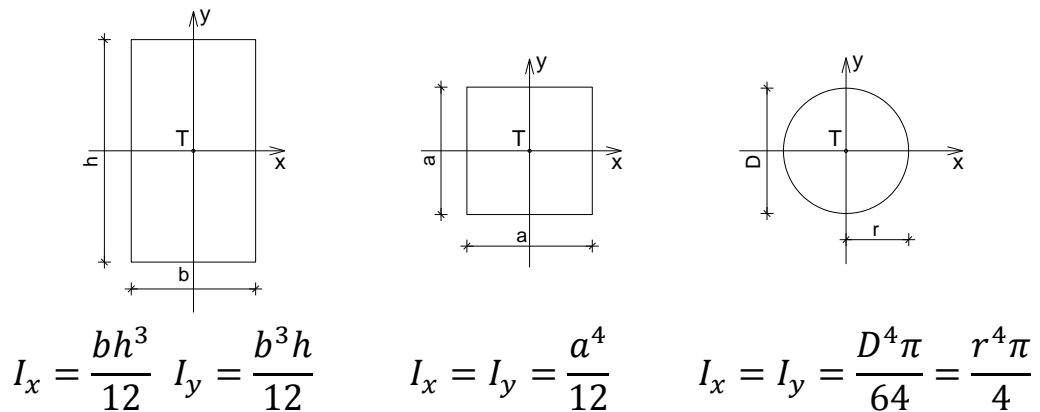
Сл. 4.1A_г.1 Расподела нормалних напона при правом савијању силама.

Интензитет нормалног напона у тачки попречног пресека добија се на основу датог израза, у коме је M_x – моменат савијања (очитан са дијаграма за анализирани попречни пресеку штапа i-i), y – удаљеност посматране тачке од n-n линије (осе X), и I_x – аксијални момент инерције површине за осу X. На слици је дат дијаграм нормалних напона за анализирани случај (Сл. 4.1A_г.2).



Сл. 4.1.A_г.2 Дијаграм нормалних напона при правом савијању силама.

Физичка величина I_x (m^4) назива се аксијални момент инерције површине. Дати су сопствени аксијални моменти инерције за попречне пресеке у облику елементарних геометријских фигура (правоугаони, квадратни, кружни попречни пресек штапа), за осе X и Y ²⁴ (Сл. 4.1.А_г.3).

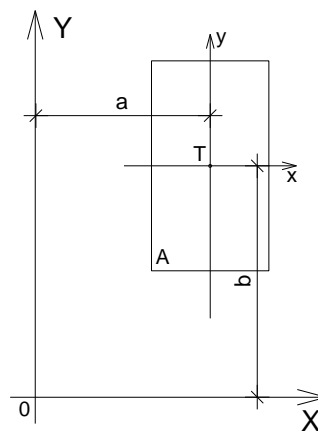


Сл. 4.1.А_г.3 Сопствени аксијални моменти инерције попречних пресека.

Уколико је реч о сложеном попречном пресеку, за њега се аксијални момент инерције добија на основу Штајнерове теореме. По овој теорему, момент инерције површине у односу на осу паралелну са тежишном једнак је збиру сопственог момента инерције површине и положајног момента инерције површине. Положајни момент инерције површине једнак је производу површине и квадрата растојања од тежишта површине до осе у односу на коју се тражи момент инерције (растојања обележена са a и b у случају датом на слици) (Сл. 4.1.А_г.4). У том смислу, аксијални момент инерције сложеног попречног пресека за тежишну осу је једнак суми сопствених и положајних момента инерције (уколико постоје) површина основних геометријских фигура од којих се пресек састоји.

$$I_x = I_{x_T} + Ab^2$$

$$I_y = I_{y_T} + Aa^2$$



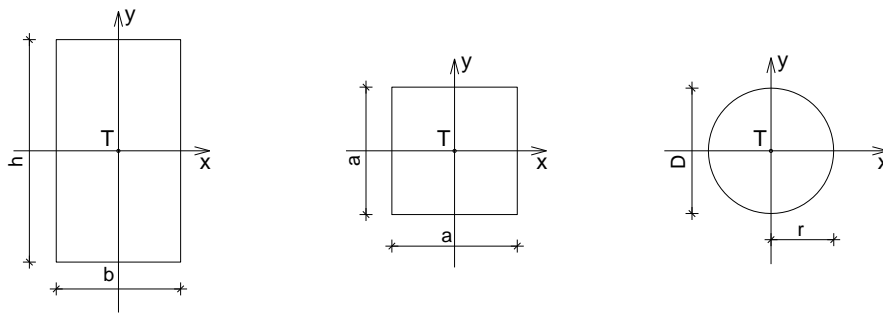
Сл. 4.1.А_г.4 Штајнерова теорема.

Дати израз за нормални напон при савијању може да се напише и у следећем облику, погодном за димензионисање штапа, где је величина W_x (m^3) аксијални отпорни момент попречног пресека (количник аксијалног момента инерције за одговарајућу осу и растојања од најудаљеније тачке пресека до те осе).

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad W_x = \frac{I_x}{y_{max}} \quad \rightarrow \quad \sigma_z = \frac{M_x}{W_x} \quad W_{x,potr.} \geq \frac{M_x^{max}}{\sigma_{doz}}$$

²⁴ У практикуму се анализирају попречни пресеци код којих је бар једна од тежишних оса (X и Y) уједно и оса симетрије пресека (главна оса).

Дати су аксијални отпорни моменти за попречне пресеке у облику основних геометријских фигура (правоугаони, квадратни, кружни попречни пресек штапа), за осе X и Y (Сл. 4.1.A_г.5).



$$W_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{bh^2}{6} \quad W_y = \frac{b^2h}{6} \quad W_x = W_y = \frac{a^4}{12} = \frac{a^3}{6} \quad W_x = W_y = \frac{r^4\pi}{4} = \frac{r^3\pi}{4}$$

Сл. 4.1.A_г.5 Аксијални отпорни моменти попречних пресека.

При димензионисању штапа напрегнутог на савијање потребно је да буде задовољен услов да највећа вредност нормалног напона не прекорачи вредност дозвољеног за дати материјал и случај оптерећења.

$$\sigma_{max} = \frac{M_x^{max}}{I_x} y_{max} \leq \sigma_{doz}$$

4.1.Б.г Бројни примери

4.1.Б.г.1 – Одређивање аксијалног момента инерције пуног попречног пресека

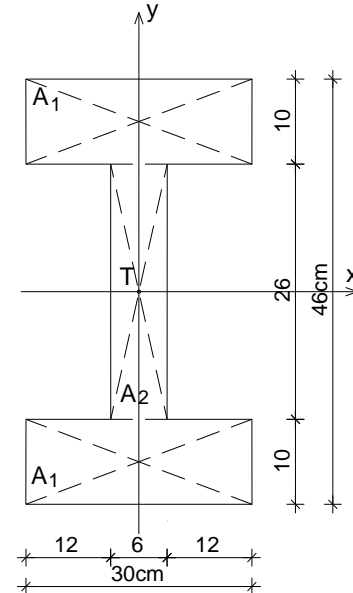
- За попречни пресек дат скицом одредити аксијалне моменте инерције I_x и I_y .

Аксијални моменте инерције попречног пресека I_x и I_y :

$$I_x = 2 \left(\frac{3.0 \cdot 1.0^3}{12} + 3.0 \cdot 1.0 \cdot 1.8^2 \right) + \frac{0.6 \cdot 2.6^3}{12}$$

$$I_x = 2(0.25 + 9.75) + 0.8788 = 20.8188 \text{ dm}^4$$

$$I_y = 2 \cdot \frac{1.0 \cdot 3.0^3}{12} + \frac{2.6 \cdot 0.6^3}{12} = 4.5 + 0.0468 = 4.5468 \text{ dm}^4$$



4.1.Б.г.2 – Одређивање аксијалног момента инерције пуног попречног пресека

- За попречни пресек дат скицом одредити положај тежишта и аксијални момент инерције I_x .

Површина попречног пресека:

$$A_1 = 15 \cdot 30 = 450 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 10 \cdot 30 = 300 \text{ cm}^2$$

$$A = 450 + 300 = 750 \text{ cm}^2$$

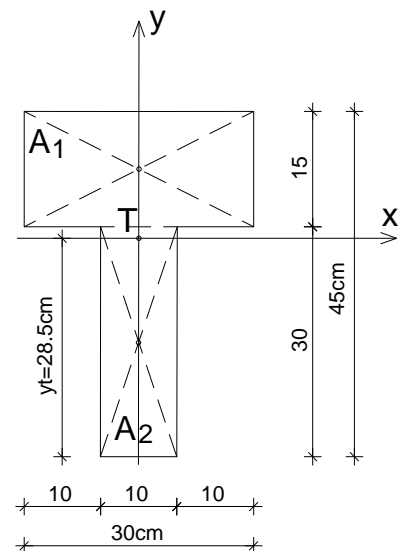
Положај тежишта попречног пресека:

$$y_t = \frac{450 \cdot 37.5 + 300 \cdot 15}{750} = 28.5 \text{ cm}$$

Аксијални момент инерције попречног пресека I_x :

$$I_x = \frac{30 \cdot 15^3}{12} + 450 \cdot 9^2 + \frac{10 \cdot 30^3}{12} + 300 \cdot 13.5^2$$

$$I_x = 8437.5 + 36450 + 22500 + 54675 = 122062.5 \text{ cm}^4$$



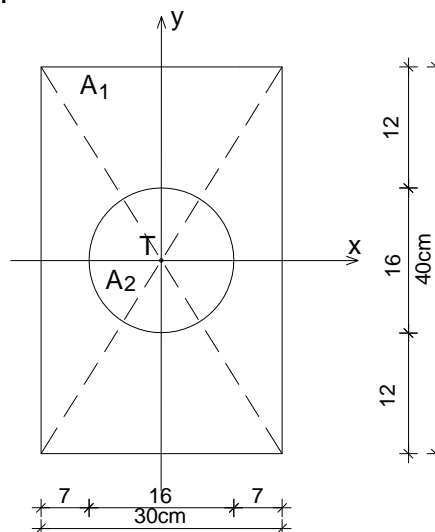
4.1.Б.г.3 – Одређивање аксијалног момента инерције ошупљеног попречног пресека

- За попречни пресек дат скицом одредити аксијалне моменте инерције I_x и I_y .

Аксијални моменте инерције попречног пресека I_x и I_y :

$$I_x = \frac{3.0 \cdot 4.0^3}{12} - \frac{0.8^4 \pi}{4} = 16.0 - 0.3215 = 15.6785 \text{ dm}^4$$

$$I_y = \frac{4.0 \cdot 3.0^3}{12} - \frac{0.8^4 \pi}{4} = 9.0 + 0.3215 = 8.6785 \text{ dm}^4$$



4.1.Б.г.4 – Одређивање аксијалног момента инерције ошупљеног попречног пресека

- За попречни пресек дат скицом одредити положај тежишта и аксијални момент инерције I_x .

Површина попречног пресека:

$$A_1 = 25 \cdot 50 = 1250 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 15 \cdot 15 = 225 \text{ cm}^2$$

$$A = 1250 - 225 = 1025 \text{ cm}^2$$

Положај тежишта попречног пресека:

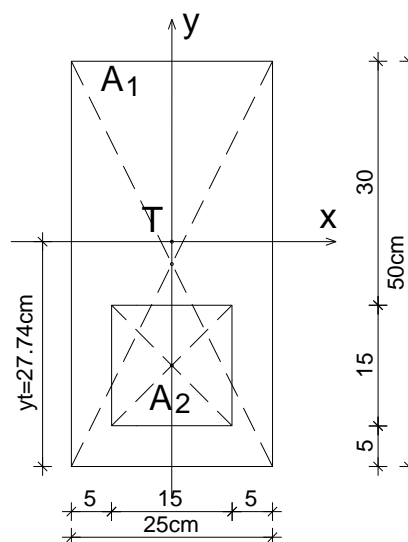
$$y_t = \frac{1250 \cdot 25 - 225 \cdot 12.5}{1025} = \frac{28437.5}{1025} = 27.74 \text{ cm}$$

Аксијални момент инерције попречног пресека I_x :

$$I_x = \frac{25 \cdot 50^3}{12} + 1250 \cdot 2.74^2 - \left(\frac{15^4}{12} + 225 \cdot 15.24^2 \right)$$

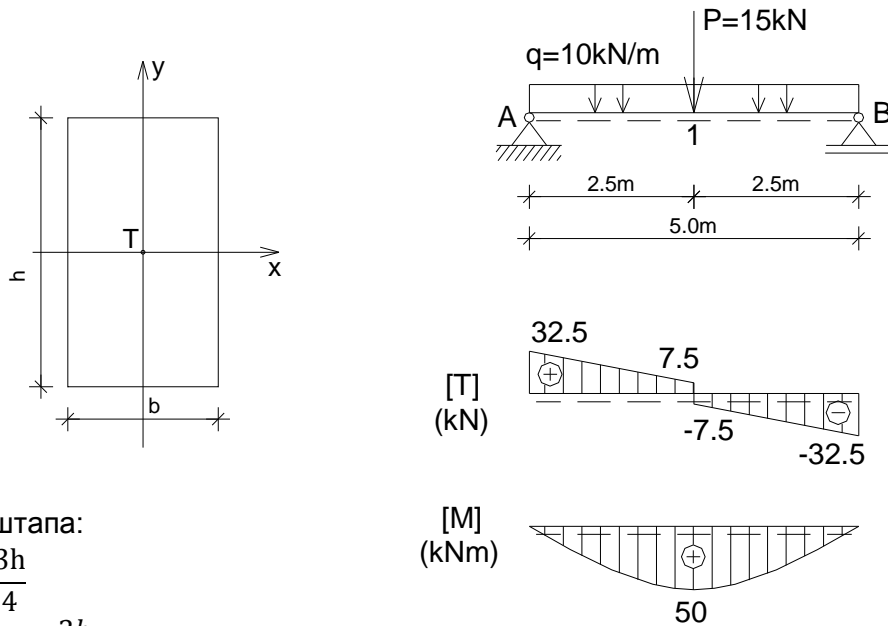
$$I_x = 260416.6 + 9384.5 - (4218.75 + 52257.9)$$

$$I_x = 213324.4 \text{ cm}^4 = 21.33 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 = 0.00213324 \text{ m}^4$$



4.1.Б.г.5 – Димензионисање греде напрегнуте на право савијање силама (σ)

- За просту греду оптерећену према скици дати су статички утицаји. Извршити димензионисање греде правоугаоног попречног пресека за однос страна $b:h=3:4$ и $\sigma_{doz}=9\text{MPa}$ и нацртати дијаграм нормалних напона.



Димензионисање штапа:

$$b:h = 3:4 \Rightarrow b = \frac{3h}{4}$$

$$W = \frac{I_x}{y} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{\frac{3h}{4}h^2}{6} = \frac{3h^3}{24} = \frac{h^3}{8} \Rightarrow h = \sqrt[3]{8W}$$

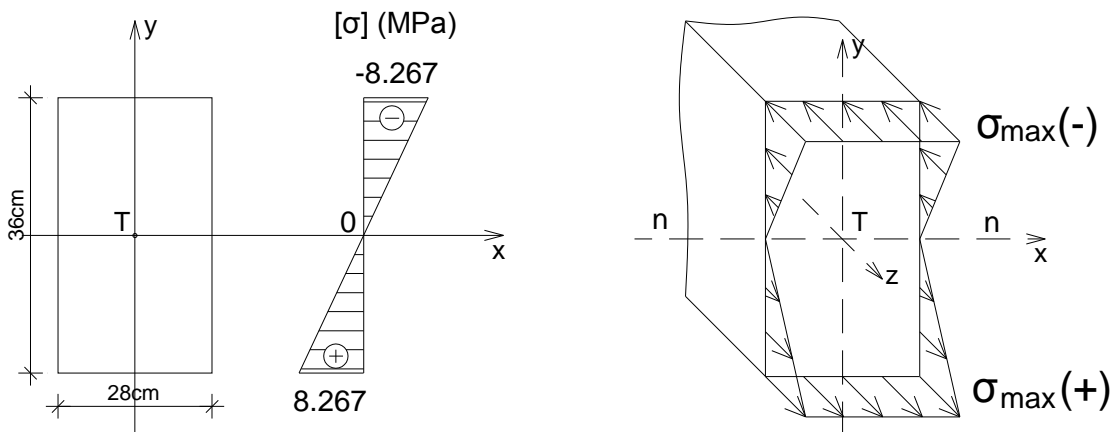
$$W_{pot} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} = \frac{50 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^6} = 5.55 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 \Rightarrow h_{pot} = \sqrt[3]{8 \cdot 5.55 \cdot 10^{-3}} = 0,354\text{m} = 35,4\text{cm}$$

$$b_{pot} = \frac{3h}{4} = \frac{3 \cdot 35,4}{4} = 26,5\text{cm} \quad \text{Усваја се } b/h = 28/36\text{cm}$$

Контрола нормалних напона за усвојене димензије:

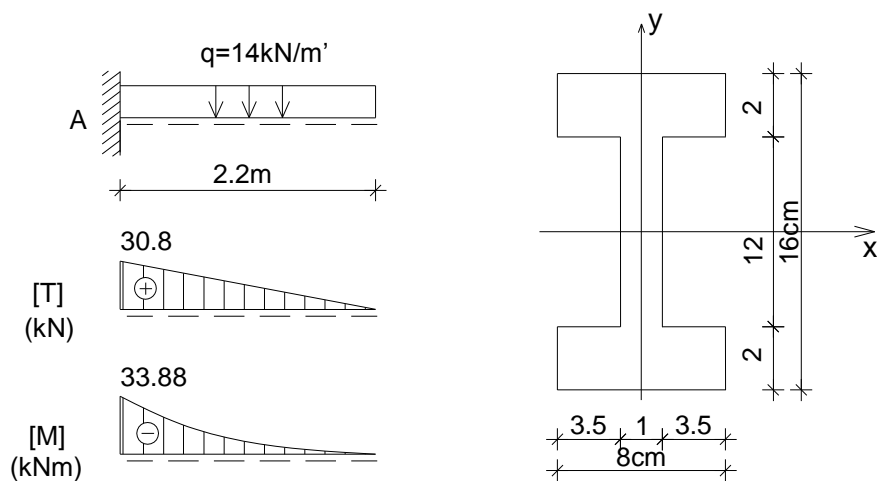
$$W_{usv} = \frac{b_{usv} h_{usv}^2}{6} = \frac{0,28 \cdot 0,36^2}{6} = 0,006048\text{m}^3 = 6,048 \cdot 10^{-3} \text{m}^3$$

$$\sigma_{usv} = \frac{M_{max}}{W_{usv}} = \frac{50 \cdot 10^3}{6,048 \cdot 10^{-3}} = 8,267 \text{MPa} < \sigma_{doz} = 9 \text{MPa}$$



4.1.Б.г.6 – Одређивање нормалних напона у греди при правом савијању силама

- За конзолу оптерећену према скици дати су статички утицаји. Одредити величине нормалних напона у пресеку у коме се јављају њихове апсолутно максималне вредности и нацртати дијаграм напона.

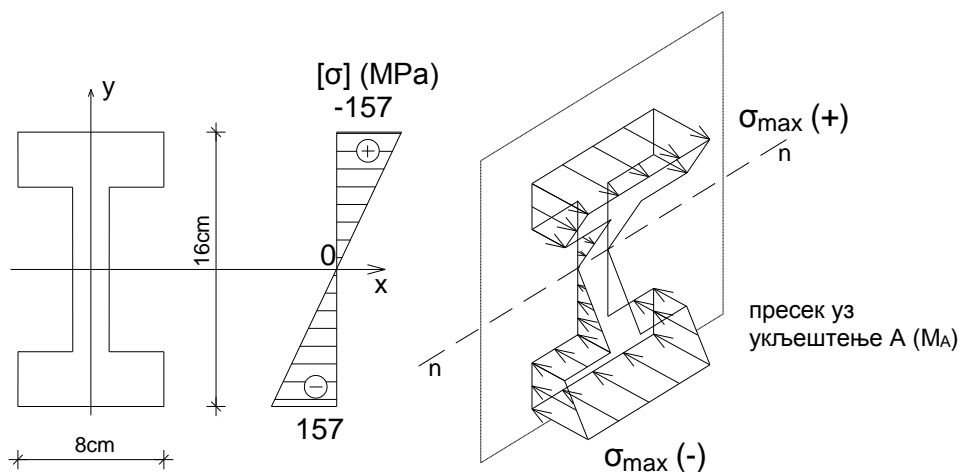


Аксијални момент инерције попречног пресека I_x :

$$I_x = \frac{8 \cdot 16^3}{12} - 2 \cdot \frac{3.5 \cdot 12^3}{12} = 1723 \text{ cm}^4$$

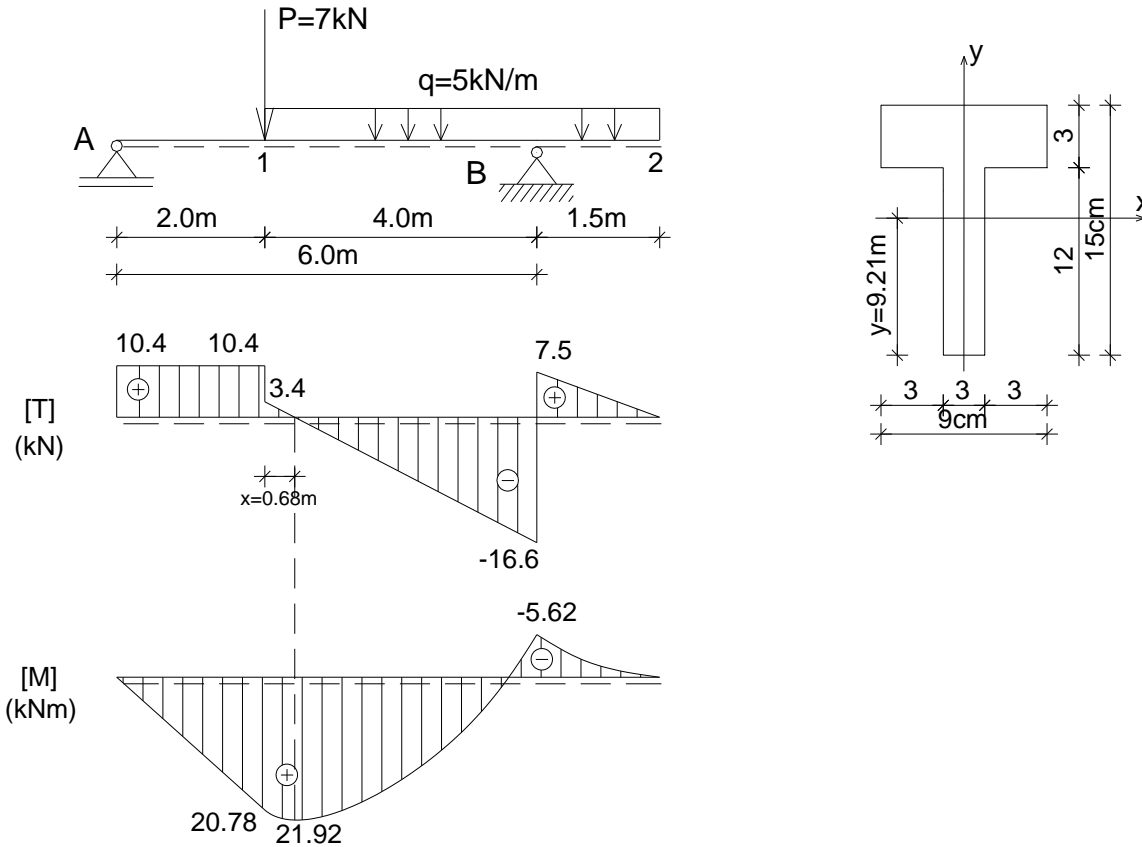
Максимални нормални напон:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_x} \cdot y_{max} = \frac{33.88 \cdot 10^{-3}}{1723 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.08 = 157.3 \text{ MPa}$$



4.1.Б.г.7 – Одређивање нормалних напона у греди при правом савијању силама

- За греду са препустом оптерећену према скици дати су статички утицаји. Одредити величине нормалних напона у пресеку у пољу у коме се јављају њихове апсолутно максималне вредности и нацртати дијаграм напона. Одредити и величине нормалних напона у пресеку над непокретним лежиштем В и нацртати дијаграм напона.



Тежиште попречног пресека штапа:

$$y_t = \frac{9 \cdot 3 \cdot 13.5 + 3 \cdot 12 \cdot 6}{63} = \frac{580.5}{63} = 9.21 \text{ cm}$$

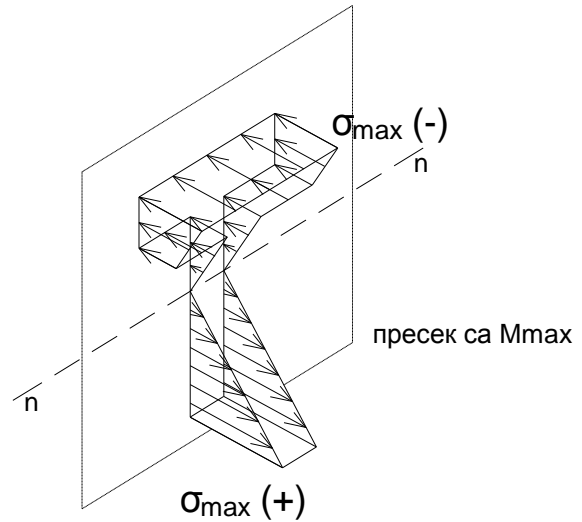
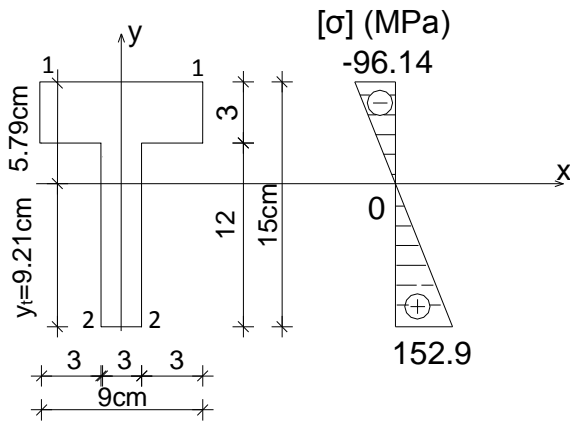
Аксијални момент инерције попречног пресека I_x:

$$I_x = \frac{3 \cdot 12^3}{12} + 36 \cdot 3.21^2 + \frac{9 \cdot 3^3}{12} + 27 \cdot 4.29^2 = 1320 \text{ cm}^4 = 1.32 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Максималне вредности нормалних напона у пољу:

$$\sigma_{max}^{1-1} = -\frac{M_{max}}{I_x} \cdot y_{1-1} = -\frac{21.92 \cdot 10^{-3}}{1.32 \cdot 10^{-5}} \cdot 0.0579 = -96.14 \text{ MPa}$$

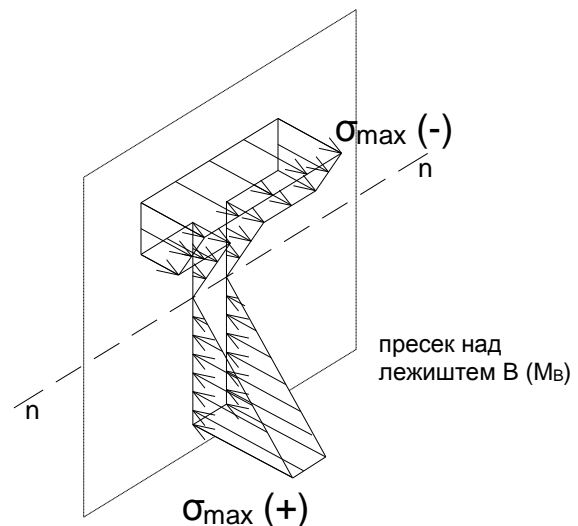
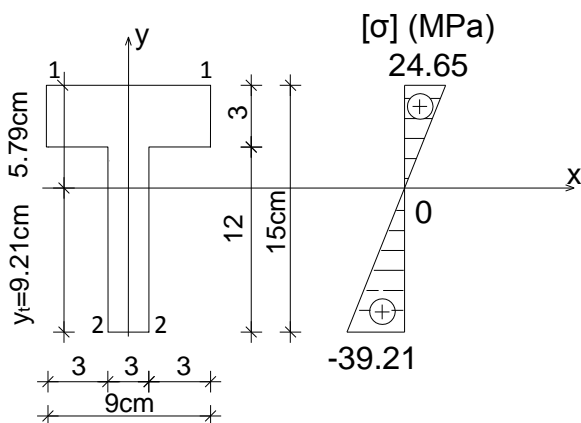
$$\sigma_{max}^{2-2} = \frac{M_{max}}{I_x} \cdot y_{2-2} = \frac{21.92 \cdot 10^{-3}}{1.32 \cdot 10^{-5}} \cdot 0.0921 = 152.9 \text{ MPa}$$



Вредности нормалних напона у пресеку над лежиштем В:

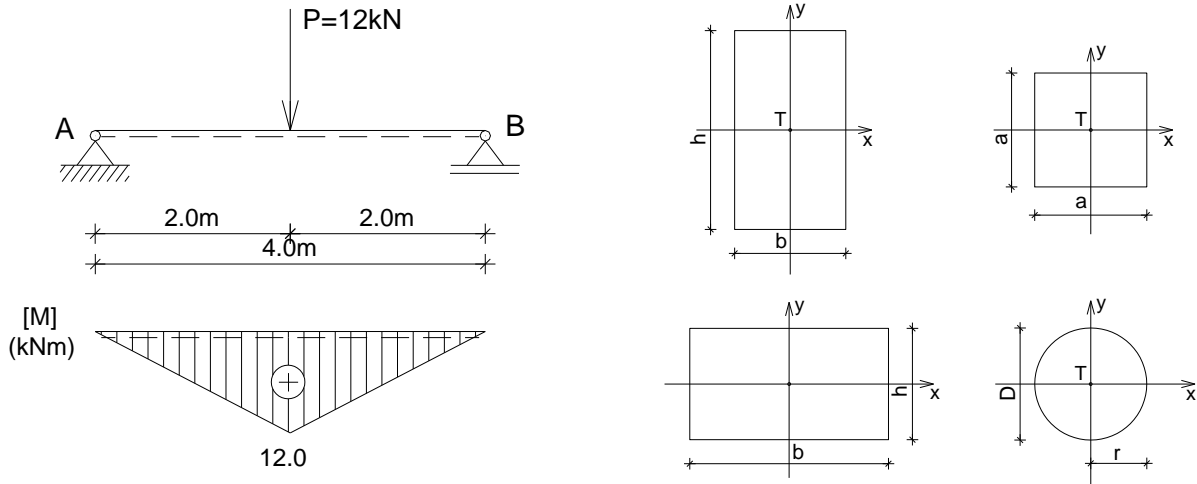
$$\sigma_B^{1-1} = \frac{M_B}{I_x} \cdot y_{1-1} = \frac{5.62 \cdot 10^{-3}}{1.32 \cdot 10^{-5}} \cdot 0.0579 = 24.65 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B^{2-2} = -\frac{M_B}{I_x} \cdot y_{2-2} = -\frac{5.62 \cdot 10^{-3}}{1.32 \cdot 10^{-5}} \cdot 0.0921 = -39.21 \text{ MPa}$$



4.1.Б.г.8 – Димензионисање греде напрегнуте на право савијање силама за различите облике попречног пресека штапа (σ)

- Одредити односе потребних површина попречног пресека просте греде оптерећене према скици, израђене од дрвета, за различите облике попречног пресека: правоугаони са односом страна $b:h=1:2$, квадратни a/a и кружни пречника D , за $\sigma_{doz} = 10MPa$. Анализирати и однос потребних површина за правоугаоне попречне пресеке са односом страна $b:h=1:2$ и $b:h=2:1$.



Максимални моменат савијања:

$$M_{max} = \frac{P \cdot l}{4} = \frac{12 \cdot 4.0}{4} = 12kNm$$

а) Правоугаони попречни пресек – однос страна $b:h=1:2$

Потребан отпорни момент попречног пресека:

$$\sigma = \frac{M}{W} \rightarrow W_{pot} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{\frac{h}{2} \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{12}$$

$$W_{pot} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} \rightarrow \frac{h^3}{12} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} \rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{12M_{max}}{\sigma_{doz}}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 12 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0.243m = 24.3cm \rightarrow b = 12.15cm$$

Потребна површина попречног пресека:

$$A_{pot} = 24.3 \cdot 12.5 \sim 295cm^2$$

б) Квадратни попречни пресек - a/a

Потребан отпорни момент попречног пресека:

$$\sigma = \frac{M}{W} \rightarrow W_{pot} = \frac{a^3}{6}$$

$$W_{pot} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} \rightarrow \frac{a^3}{6} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} \rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{6M_{max}}{\sigma_{doz}}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 12 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0.193m = 19.3cm$$

Потребна површина попречног пресека:

$$A_{pot} = 19.3^2 \sim 372cm^2$$

в) Кружни попречни пресек пречника D

Потребан отпорни момент попречног пресека:

$$\sigma = \frac{M}{W} \rightarrow W_{pot} = \frac{r^3 \pi}{4}$$

$$W_{pot} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} \rightarrow \frac{r^3 \pi}{4} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{4M_{max}}{\pi \sigma_{doz}}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 12 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 10 \cdot 10^6}} = 0.115m = 11.5cm$$

Потребна површина попречног пресека:

$$A_{pot} = 11.5^2 \pi \sim 415cm^2$$

За дати случај најефикаснији је правоугаони попречни пресек који има ~20% мању површину од квадратног и ~30% мању од кружног (због облика пресека где је већи део материјала распоређен на већем удаљењу од неутралне линије).

д) Правоугаони попречни пресек – однос страна b:h=2:1

Потребан отпорни момент попречног пресека:

$$\sigma = \frac{M}{W} \rightarrow W_{pot} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{2h \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{3}$$

$$W_{pot} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} \rightarrow \frac{h^3}{3} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} \rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{3M_{max}}{\sigma_{doz}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 12 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0.153m = 15.3cm \rightarrow b = 30.6cm$$

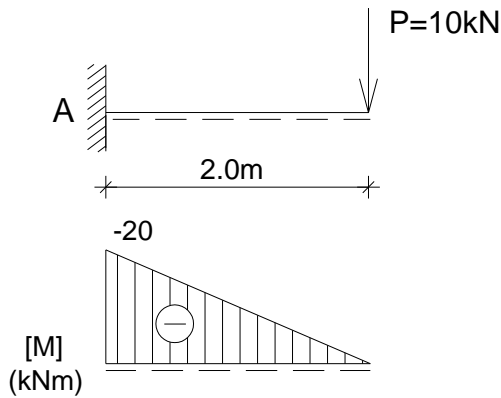
Потребна површина попречног пресека:

$$A_{pot} = 15.3 \cdot 30.6 \sim 468cm^2$$

За положен правоугаони попречни пресек потребна је ~40% већа површина попречног пресека него у случају вертикално постављеног пресека (имајући у виду да је мањи део материјала распоређен на већем удаљењу од неутралне линије).

4.1.Б.г.9 – Димензионисање греде напрегнуте на право савијање силама за различите материјале (σ)

- Димензионисати конзолу оптерећену према скици као дрвену греду правоугаоног попречног пресека и као челичну греду кутијастог попречног пресека, за однос страна $b:h=1:2$, $\sigma_{doz D} = 10MPa$, $\sigma_{doz \check{c}} = 160MPa$



Максимални моменат савијања:

$$M_A = -P \cdot 2.0 = -10 \cdot 2.0 = -20kNm$$

а) Дрво

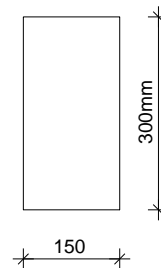
Димензионисање штапа:

$$\sigma = \frac{M}{W} \rightarrow W_{pot} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{\frac{h}{2} \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{12}$$

$$W_{pot} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} \rightarrow \frac{h^3}{12} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} \rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{12M_{max}}{\sigma_{doz}}} = \sqrt[3]{\frac{12 \cdot 20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0.288m = 28.8cm \rightarrow b = 14.4cm$$

Усваја се $b_{usv}/h_{usv} = 15/30cm$

(контрола: $\tau = \frac{3T}{2A} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0.15 \cdot 0.3} = 0.333 < \tau_{doz} = 0.9MPa$)



б) Челик

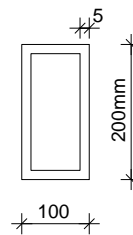
Димензионисање штапа:

$$W_{pot} = \frac{M_{max}}{\sigma_{doz}} = \frac{20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 1.25 \cdot 10^{-4}m^3 = 125cm^3$$

Усваја се кутијаста профил 200/100/5mm

$$I_x = \frac{100 \cdot 200^3}{12} - \frac{90 \cdot 190^3}{12} = 15224166mm^4$$

$$W = \frac{I_x}{y_{max}} = \frac{15224166}{100} = 152241.66mm^3 = 152cm^3 > W_{pot}$$

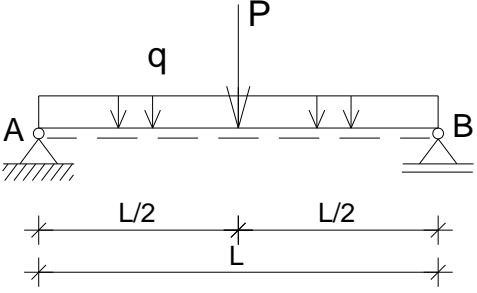


4.1.B.г Вежба 4.1.г (VI предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

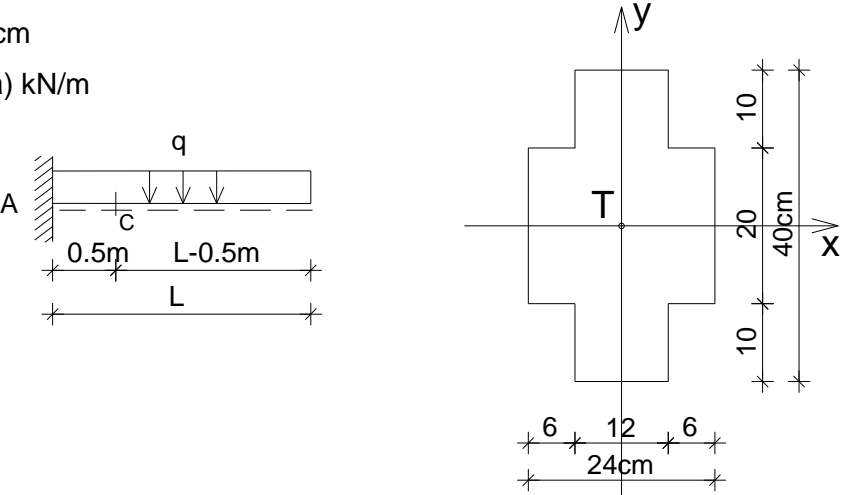
а) За просту греду оптерећену према скици одредити реакције веза, пресечне силе у карактеристичним пресецима и нацртати дијаграме пресечних сила. Извршити димензионисање правоугаоног попречног пресека за задати однос страна $b:h = 3:4$ и $\sigma_{doz} = 9\text{MPa}$ (критеријум σ). Нацртати дијаграм нормалних напона.

$L = (250 + \text{број индекса}) \text{ cm}$
 $P = (10 + \text{цифра десетица}) \text{ kN}$
 $q = (5 + \text{цифра јединица}) \text{ kN/m}$



б) За конзолу оптерећену према скици одредити реакције веза, пресечне силе у карактеристичним пресецима и нацртати дијаграме пресечних сила. За пресек С-С извршити анализу расподеле нормалних напона по пресеку и нацртати дијаграм напона.

$L = (150 + \text{број индекса}) \text{ cm}$
 $q = (10 + \text{цифра јединица}) \text{ kN/m}$
 $A-C = 0.5\text{m}$

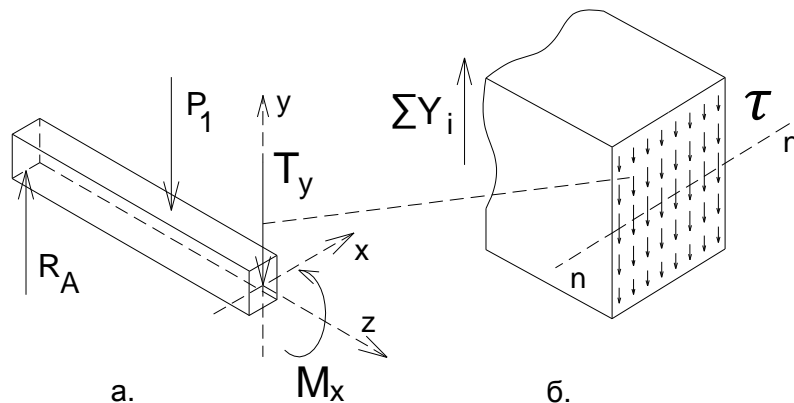


4.1.А.д Анализа случајева

4.1.А.д) Расподела тангенцијалних напона – статички моменат површине

Штап анализираниог носача на које делују спољне силе на правцима управним на осу штапа је **напрегнут на право савијање силама**. У пресецима штапа се јавља трансверзална сила T_y , односно тангенцијални напони (Сл. 4.1.А_д.1а). У пресеку се јавља и моменат савијања M_x , односно нормални напони (чија је расподела анализирана у потпоглављу 4.1.А.г).

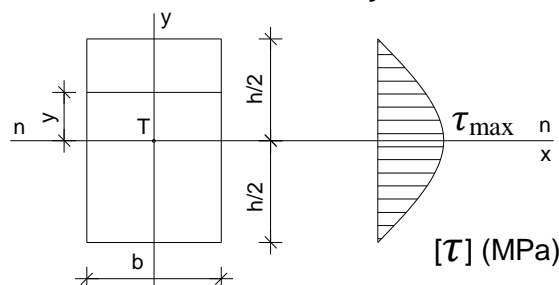
У случају правог савијања силама претпоставља се да су **тангенцијални напони** који се јављају у равни попречног пресека²⁵ константни дуж праве паралелне са неутралном линијом n-n (хипотеза Журавског). Њихова величина се мења са удаљењем посматраних тачака од неутралне линије (y), по параболичној расподели (Сл. 4.1.А_д.1б). У анализираниом случају, максимални тангенцијални напони τ се јављају дуж неутралне линије, док су у најудаљенијим тачкама од неутралне линије (тачкама на горњој и доњој спољној површини) једнаки нули.



Сл. 4.1.А_д.1 Расподела тангенцијалних напона при правом савијању силама.

Интензитет тангенцијалног напона у тачки попречног пресека штапа напрегнутог на савијање, на растојању y од неутралне линије, добија се на основу датог израза, у коме је T_y – трансверзална сила (очитана са дијаграма трансверзалних сила за анализирани попречни пресек штапа $i-i$), S_x – статички моменат дела површине попречног пресека изнад или испод анализирание тачке у односу на осу X, I_x – аксијални момент инерције попречног пресека за осу X и b_y – ширина попречног пресека на месту анализирание тачке. На слици је дат дијаграм тангенцијалних напона τ за анализирани случај штапа правоугаоног попречног пресека (Сл. 4.1.А_д.2).

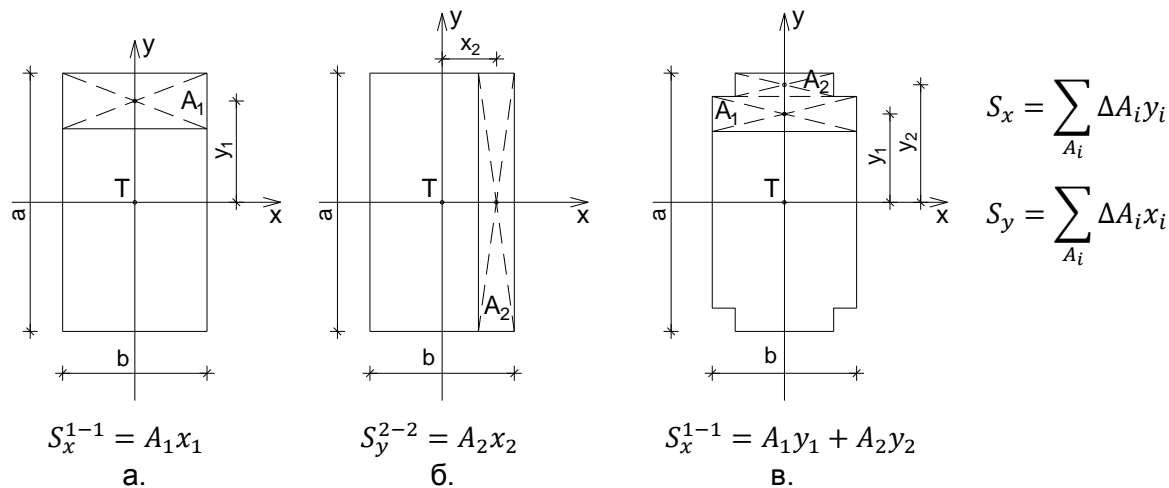
$$\tau = \frac{T_y \cdot S_x}{I_x \cdot b_y}$$



Сл. 4.1.А_д.2 Дијаграм тангенцијалних напона при правом савијању силама за правоугаони попречни пресек.

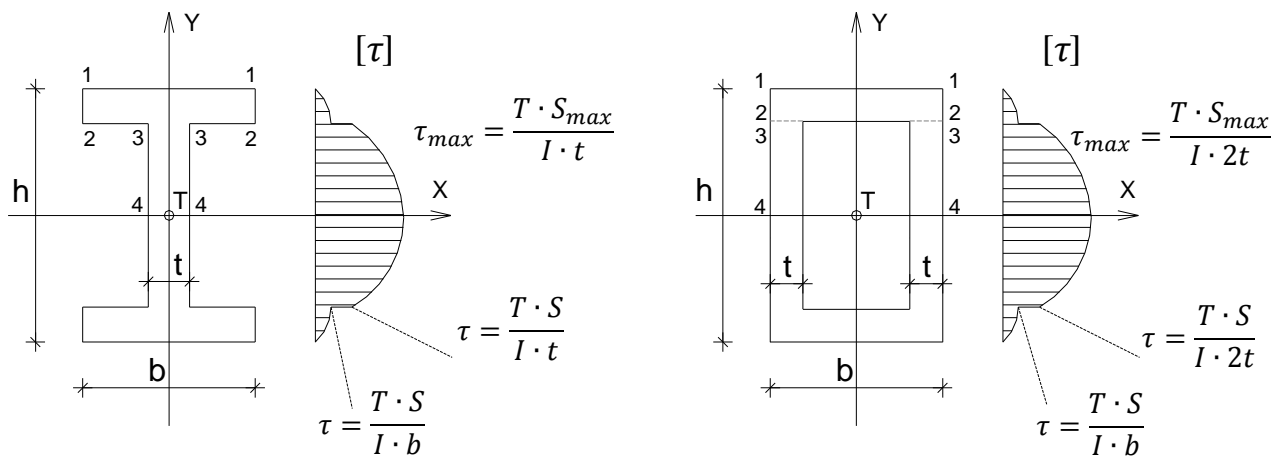
²⁵ Према ставу о коњугованости тангенцијалних напона, тангенцијални напони при савијању који се јављају у равни попречног пресека штапа праћени су тангенцијалним напонима исте величине који се јављају у уздужним равнима.

Физичка величина S (m^3) назива се статички моменат дела површине попречног пресека. Статички моменат дела површине пресека у односу на осу X (S_x) једнак је производу површине геометријске фигуре изнад или испод анализиране тачке и удаљења од тежишта те фигуре до X осе (Сл. 4.1.А_д.3а). Статички моменат дела површине пресека у односу на осу Y (S_y) једнак је производу површине геометријске фигуре лево или десно од анализиране тачке и удаљења од тежишта те фигуре до Y осе (Сл. 4.1.А_д.3б). Статички моменат дела површине попречног пресека коју чини више основних геометријских фигура рачуна се као сума статичких момената површина појединачних фигура (Сл. 4.1.А_д.3в).



Сл. 4.1.А_д.3 Статички моменат дела површине попречног пресека.

Из претходног следи да облик дијаграма тангенцијалног напона τ зависи од облика попречног пресека штапа (Сл. 4.1.А_д.4). На датим сликама су означени карактеристични низови тачака, једнако удаљених од тежишне осе X (1-1, 2-2, 3-3 и 4-4), у којима треба одредити вредност тангенцијалног напона како би се нацртао дијаграм напона $[\tau]$.



Сл. 4.1.А_д.4 Дијаграми тангенцијалних напона при правом савијању силама.

При димензионисању штапа напрегнутог на право савијање силама, када су у питању тангенцијални напони, потребно је да буде задовољен услов да највећа вредност тангенцијалног напона не прекорачи вредност дозвољеног за дати материјал и случај оптерећења.

$$\tau_{max} = \frac{T_{y_{max}} \cdot S_{x_{max}}}{I_x \cdot b_{y_{min}}} \leq \tau_{doz}$$

4.1.Б.д Бројни примери

4.1.Б.д.1 – Одређивање статичких момената делова површине пуног попречног пресека

- За пун попречни пресек дат на скици одредити статичке моменте делова површине попречног пресека за карактеристичне низове тачака једнако удаљених од осе X.

Статички моменте делова површине попречног пресека:

$$S_x^{1-1} = 0$$

$$S_x^{2-2} = A^{2-2} \cdot y^{2-2} = 600 \cdot (60 - 39.64 - 7.5)$$

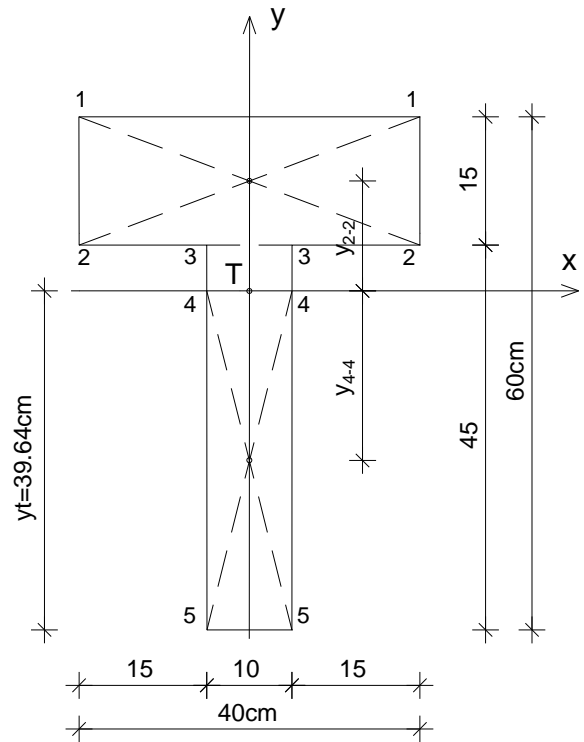
$$S_x^{2-2} = 600 \cdot 12.86 = 7716.0 \text{ cm}^2$$

$$S_x^{3-3} = S_z^{2-2} = 7716.0 \text{ cm}^2$$

$$S_x^{4-4} = A^{4-4} \cdot y^{4-4} = (10 \cdot 39.64) \cdot \frac{39.64}{2}$$

$$S_x^{4-4} = 396.4 \cdot 19.82 = 7856.65 \text{ cm}^2$$

$$S_x^{5-5} = 0$$



4.1.Б.д.2 – Одређивање статичких момената делова површине ошупљеног попречног пресека

- За ошупљен попречни пресек дат на скици одредити статичке моменте делова површине попречног пресека за карактеристичне низове тачака једнако удаљених од осе X.

Статички моменте делова површине попречног пресека:

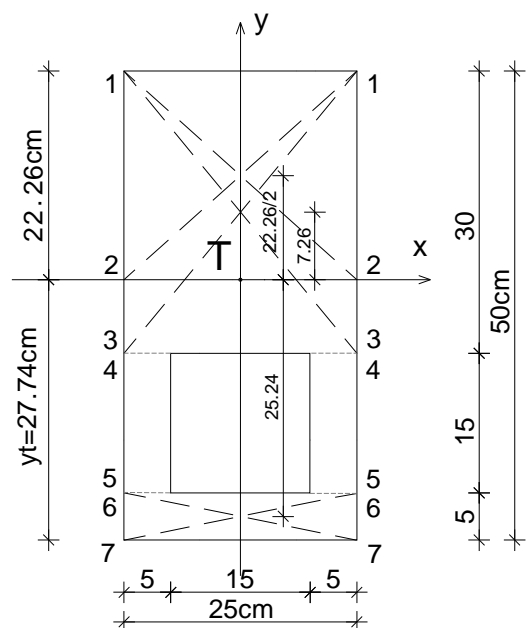
$$S_x^{1-1} = 0$$

$$S_x^{2-2} = 25 \cdot 22.26 \cdot \frac{22.26}{2} = 6193 \text{ cm}^2 = 0.00619 \text{ m}^2$$

$$S_x^{3-3} = S_x^{4-4} = 30 \cdot 25 \cdot 7.26 = 5445 \text{ cm}^2 = 0.005445 \text{ m}^2$$

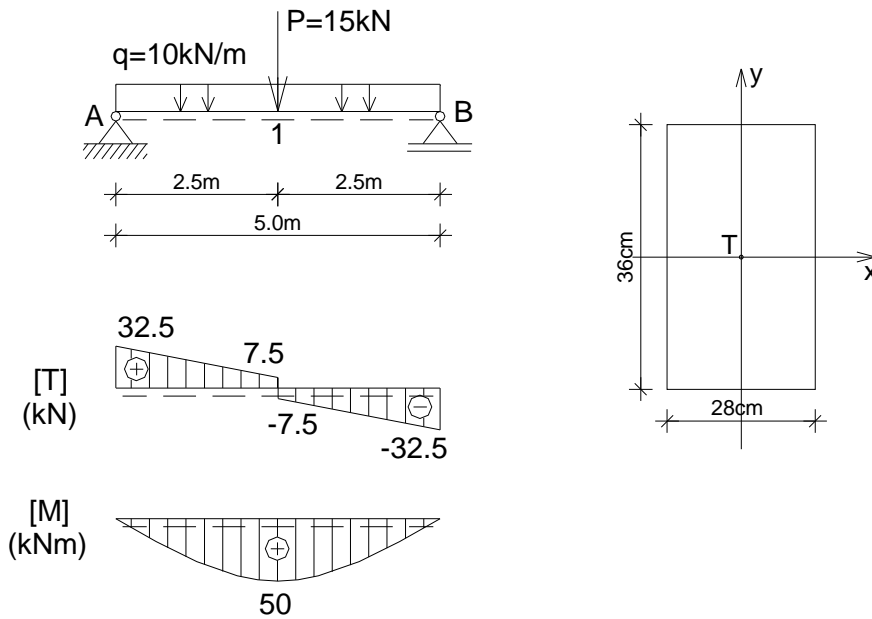
$$S_x^{5-5} = S_x^{6-6} = 25 \cdot 5 \cdot 25.24 = 3155 \text{ cm}^2 = 0.003155 \text{ m}^2$$

$$S_x^{7-7} = 0$$



4.1.Б.д.3 – Димензионисање греде напрегнуте на право савијање силама (τ)

- За дату просту греду оптерећену према скици дати су статички утицаји. За усвојене димензија правоугаоног попречног пресека $b/h=28/36\text{cm}$ извршити контролу тангенцијалних напона. $\tau_{doz} = 0.9\text{MPa}$

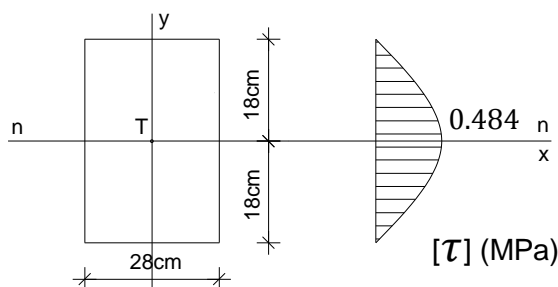


Контрола максималног тангенцијалног напона τ_{max} за усвојене димензије:

$$\tau_{max} = \frac{T_{y_{max}} \cdot S_{x_{max}}}{I_x \cdot b} = \frac{32.5 \cdot 10^{-3} \cdot (0.28 \cdot 0.18 \cdot 0.09)}{\frac{0.28 \cdot 0.36^3}{12} \cdot 0.28} = 0.484\text{MPa} \leq \tau_{doz} = 0.9\text{MPa}$$

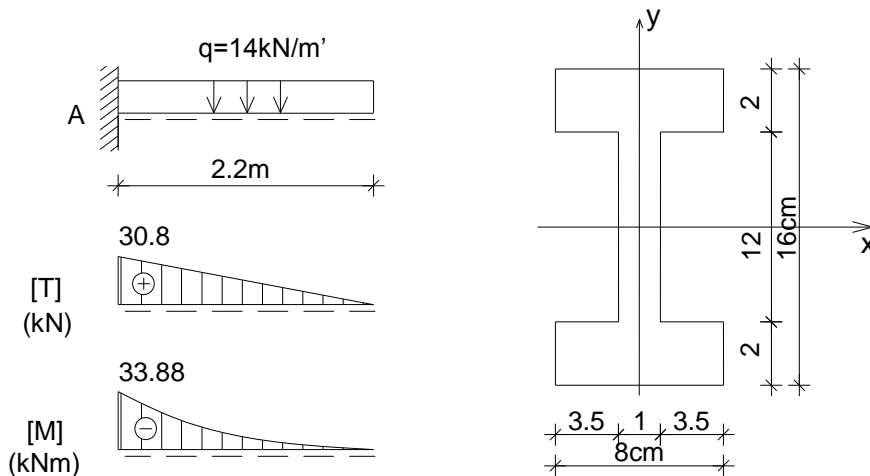
Контрола преко израза који важи за правоугаони попречни пресек:

$$\tau_{max} = \frac{3 \cdot T_{y_{max}}}{2 \cdot A} = \frac{3 \cdot 32.5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0.28 \cdot 0.36} = 0.484\text{MPa} \leq \tau_{doz} = 0.9\text{MPa}$$



4.1.Б.д.4 – Одређивање тангенцијалних напона у греди при правом савијању силама

- За конзолу оптерећену према скици дати су статички утицаји и усвојене су димензије попречног пресека. Одредити величине тангенцијалних напона у пресеку у коме се јављају њихове апсолутно максималне вредности и нацртати дијаграм напона.



Аксијални момент инерције попречног пресека I_x :

$$I_x = \frac{8 \cdot 16^3}{12} - 2 \cdot \frac{3.5 \cdot 12^3}{12} = 1723 \text{ cm}^4$$

Статички моменти површина за делове површине попречног пресека:

$$S_x^{2-2} = 8 \cdot 2 \cdot 7 = 112 \text{ cm}^3 = S_x^{3-3}$$

$$S_x^{4-4} = 112 \text{ cm}^3 + 1 \cdot 6 \cdot 3 = 130 \text{ cm}^3$$

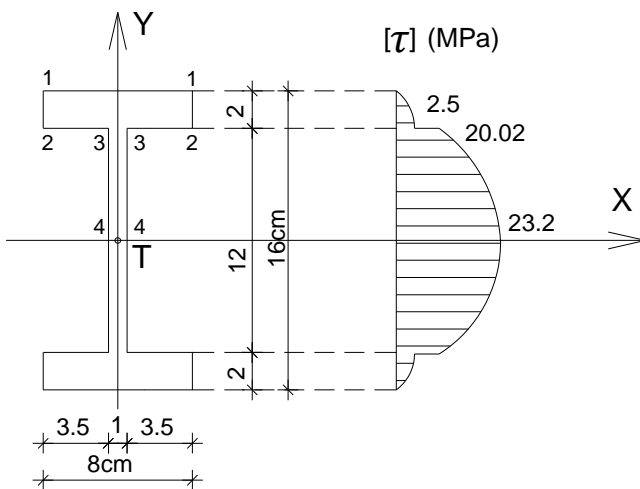
Тангенцијални напони у нивовима тачака једнако удаљених од осе X:

$$\tau_{1-1} = 0$$

$$\tau_{2-2} = \frac{T_{max} \cdot S_x^{2-2}}{I_x \cdot b_{2-2}} = \frac{30.8 \cdot 10^{-3} \cdot 112 \cdot 10^{-6}}{1723 \cdot 10^{-8} \cdot 0.08} = 2.5 \text{ MPa}$$

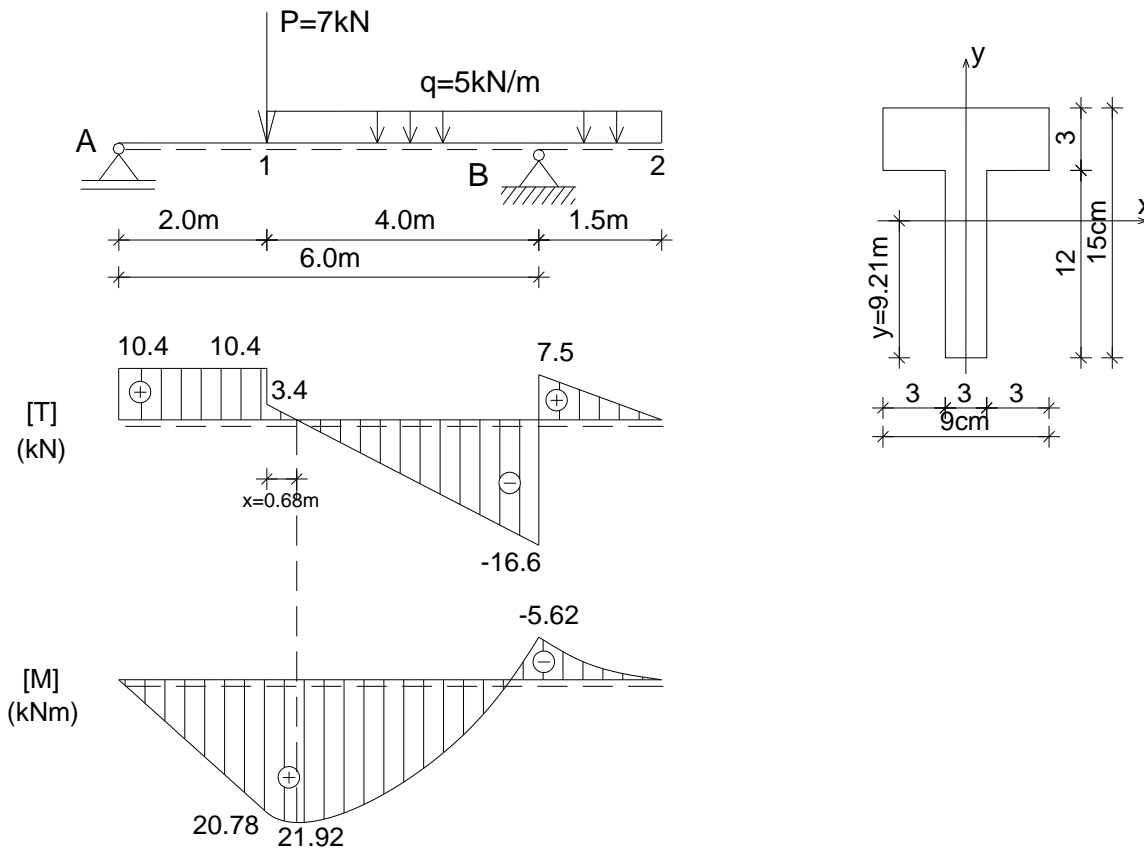
$$\tau_{3-3} = \frac{T_{max} \cdot S_x^{3-3}}{I_x \cdot b_{3-3}} = \frac{30.8 \cdot 10^{-3} \cdot 112 \cdot 10^{-6}}{1723 \cdot 10^{-8} \cdot 0.01} = 20.02 \text{ MPa}$$

$$\tau_{4-4} = \frac{T_{max} \cdot S_x^{4-4}}{I_x \cdot b_{4-4}} = \frac{30.8 \cdot 10^{-3} \cdot 130 \cdot 10^{-6}}{1723 \cdot 10^{-8} \cdot 0.01} = 23.2 \text{ MPa}$$



4.1.Б.д.5 – Одређивање тангенцијалних напона у греди при правом савијању силама

- За греду са препустом оптерећену према скици дати су статички утицаји и усвојене су димензије попречног пресека. Одредити величине тангенцијалних напона у пресеку у коме се јављају њихове апсолутно максималне вредности и нацртати дијаграм напона.



Положај тежишта и аксијални момент инерције попречног пресека:

$$y_t = \frac{9 \cdot 3 \cdot 13.5 + 3 \cdot 12 \cdot 6}{63} = \frac{580.5}{63} = 9.21 \text{ cm}$$

$$I_x = \frac{3 \cdot 12^3}{12} + 36 \cdot 3.21^2 + \frac{9 \cdot 3^3}{12} + 27 \cdot 4.29^2 = 1320 \text{ cm}^4 = 1.32 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

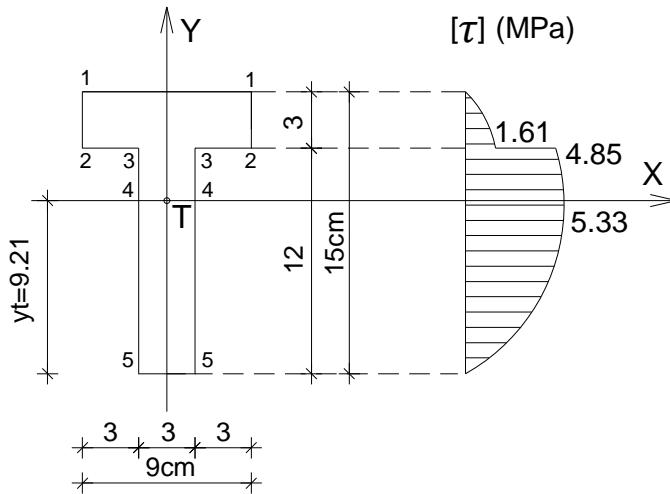
Статички моменти површина за делове површине попречног пресека:

$$S_x^{2-2} = 9 \cdot 3 \cdot 4.29 = 115.83 \text{ cm}^3 = S_x^{3-3}$$

$$S_x^{4-4} = 3 \cdot 9.21 \cdot \frac{9.21}{2} = 127.23 \text{ cm}^3$$

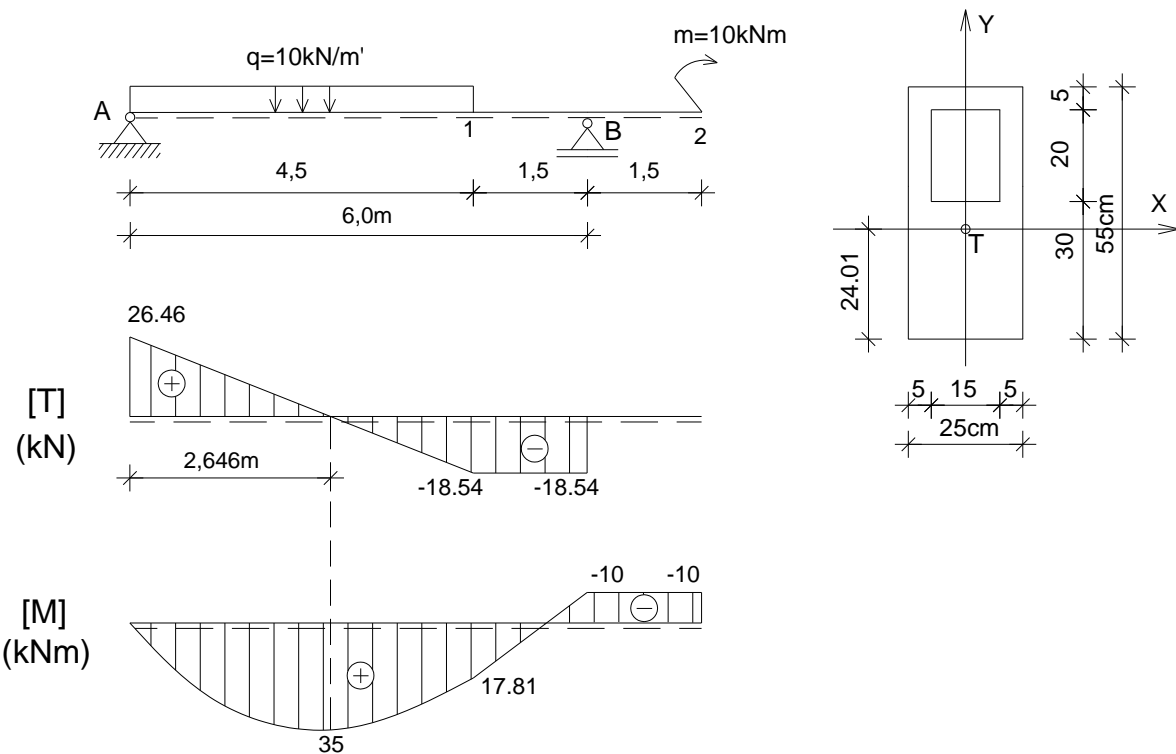
Тангенцијални напони у низовима тачака једнако удаљених од осе X:

$$\begin{aligned} \tau_{1-1} &= \tau_{5-5} = 0 \\ \tau_{2-2} &= \frac{T_{max} \cdot S_x^{2-2}}{I_x \cdot b_{2-2}} = \frac{16.6 \cdot 10^{-3} \cdot 115.8 \cdot 10^{-6}}{1.32 \cdot 10^{-5} \cdot 0.09} = 1.61 \text{ MPa} \\ \tau_{3-3} &= \frac{T_{max} \cdot S_x^{3-3}}{I_x \cdot b_{3-3}} = \frac{16.6 \cdot 10^{-3} \cdot 115.8 \cdot 10^{-6}}{1.32 \cdot 10^{-5} \cdot 0.03} = 4.85 \text{ MPa} \\ \tau_{4-4} &= \frac{T_{max} \cdot S_x^{4-4}}{I_x \cdot b_{4-4}} = \frac{16.6 \cdot 10^{-3} \cdot 127.2 \cdot 10^{-6}}{1.32 \cdot 10^{-5} \cdot 0.03} = 5.33 \text{ MPa} \end{aligned}$$



4.1.Б.д.6 – Одређивање тангенцијалних напона у греди при правом савијању силама

- За греду са препустом оптерећену према скици дати су статички утицаји и димензије попречног пресека. Одредити величине тангенцијалних напона у пресеку у коме се јављају њихове апсолутно максималне вредности и нацртати дијаграм напона.



Положај тежишта и аксијални момент инерције попречног пресека:

$$A_1 = 25 \cdot 55 = 1375 \text{ cm}^2 \quad A_2 = 15 \cdot 20 = 300 \text{ cm}^2 \quad A = 1375 - 300 = 1075 \text{ cm}^2$$

$$y_t = \frac{1375 \cdot 27.5 - 300 \cdot 40}{1075} = 24.01 \text{ cm}$$

$$I_x = \frac{25 \cdot 55^3}{12} + 1375 \cdot 3.49^2 - \left(\frac{15 \cdot 20^3}{12} + 300 \cdot 15.99^2 \right) = 276657 \text{ cm}^4$$

Статички моменти површина за делове површине попречног пресека:

$$S_x^{2-2} = S_x^{3-3} = 25 \cdot 5 \cdot 28.49 = 3561 \text{ cm}^3$$

$$S_x^{4-4} = S_x^{5-5} = 3561 + 2 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 15.99 = 3561 + 3198 = 6759 \text{ cm}^3$$

$$S_x^{6-6} = 25 \cdot 24.01 \cdot \frac{24.01}{2} = 7206 \text{ cm}^3$$

Тангенцијални напони у нивовима тачака једнако удаљених од осе X:

$$\tau_{1-1} = \tau_{7-7} = 0$$

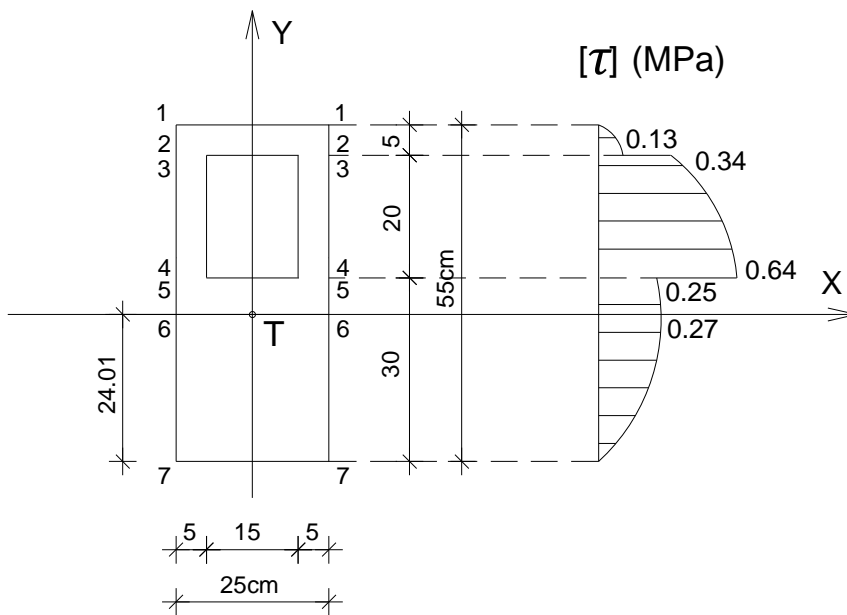
$$\tau_{2-2} = \frac{T_{max} \cdot S_x^{2-2}}{I_x \cdot b_{2-2}} = \frac{26.46 \cdot 10^{-3} \cdot 3561 \cdot 10^{-6}}{276657 \cdot 10^{-8} \cdot 0.25} = 0.13 \text{ MPa}$$

$$\tau_{3-3} = \frac{T_{max} \cdot S_x^{3-3}}{I_x \cdot b_{3-3}} = \frac{26.46 \cdot 10^{-3} \cdot 3561 \cdot 10^{-6}}{276657 \cdot 10^{-8} \cdot 0.10} = 0.34 \text{ MPa}$$

$$\tau_{4-4} = \frac{T_{max} \cdot S_x^{4-4}}{I_x \cdot b_{4-4}} = \frac{26.46 \cdot 10^{-3} \cdot 6759 \cdot 10^{-6}}{276657 \cdot 10^{-8} \cdot 0.10} = 0.64 \text{ MPa}$$

$$\tau_{5-5} = \frac{T_{max} \cdot S_x^{5-5}}{I_x \cdot b_{5-5}} = \frac{26.46 \cdot 10^{-3} \cdot 6759 \cdot 10^{-6}}{276657 \cdot 10^{-8} \cdot 0.25} = 0.25 \text{ MPa}$$

$$\tau_{6-6} = \frac{T_{max} \cdot S_x^{6-6}}{I_x \cdot b_{6-6}} = \frac{26.46 \cdot 10^{-3} \cdot 7206 \cdot 10^{-6}}{276657 \cdot 10^{-8} \cdot 0.25} = 0.27 \text{ MPa}$$



4.1.B.d. Вежба 4.1.d (VII предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

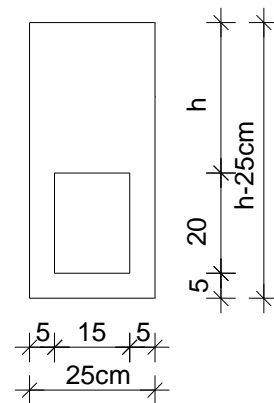
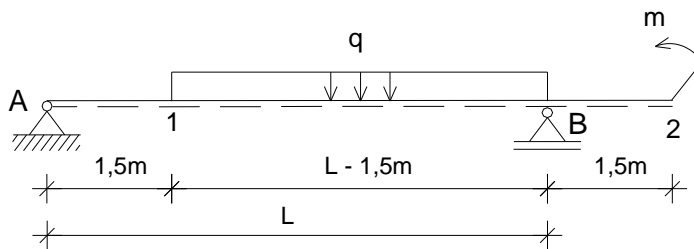
За греду с препустом оптерећену према скици датих димензија попречног пресека одредити пресечне силе у карактеристичним пресецима и нацртати дијаграме пресечних сила. Одредити величине тангенцијалних напона у пресеку у коме се јављају њихове апсолутно максималне вредности и нацртати дијаграм напона.

$$L = (350 + \text{број индекса})/100 \text{ m}$$

$$q = (2 + \text{цифра јединица}) \text{ kN/m}$$

$$m = (3 + \text{цифра десетица}) \text{ kNm}$$

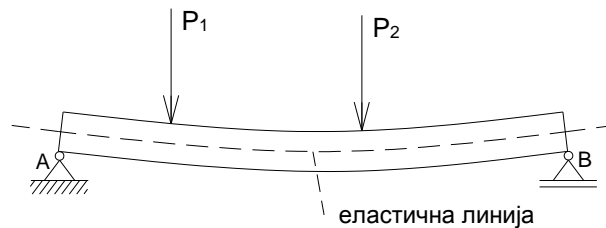
$$h = (60 + \text{цифра стотина}) \text{ cm}$$



4.1.A.Ћ Анализа случајева

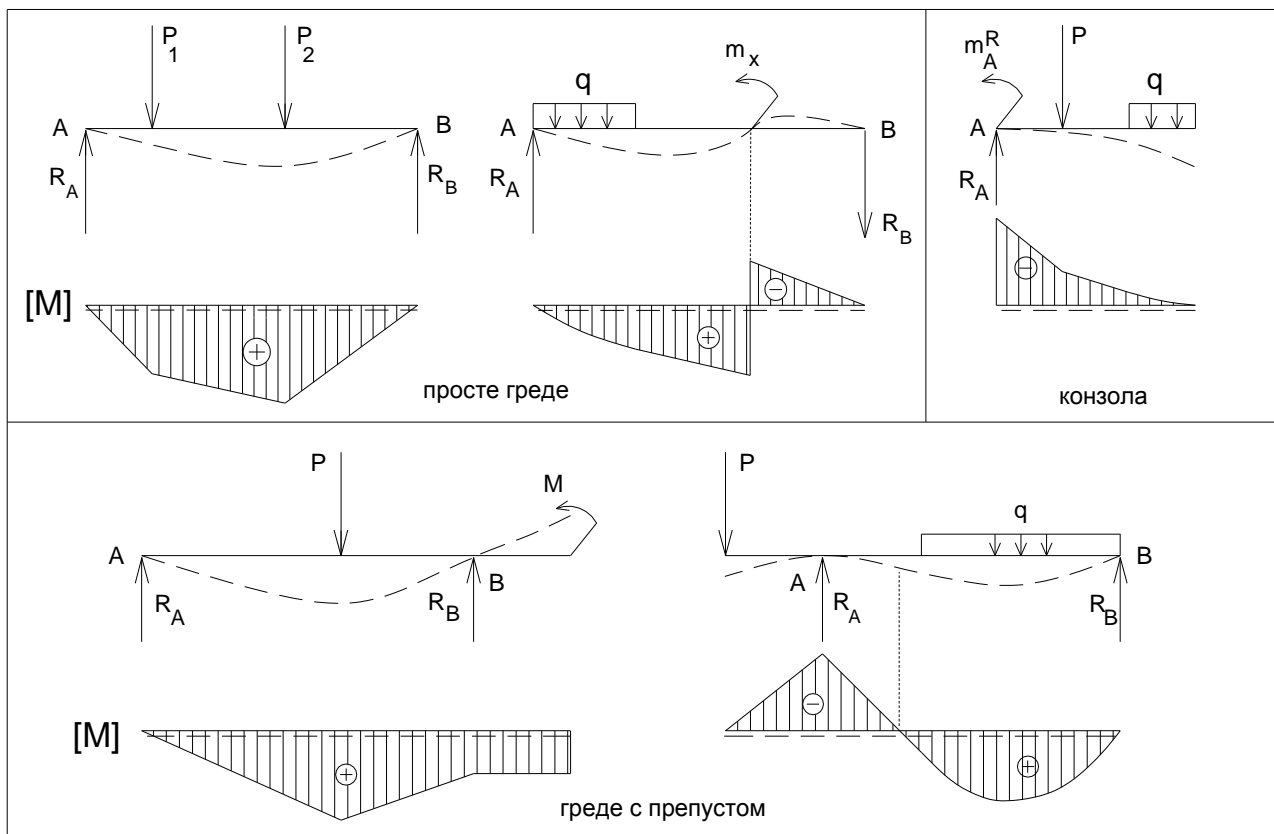
4.1.A.Ћ) Деформација - Угиб

При правом савијању силама подужна оса штапа постаје крива линија. Деформисани облик подужне осе назива се еластична линија (Сл. 4.1.A.Ћ.1 и 4.1.A.Ћ.2). У анализираном случају (Сл. 4.1.A.Ћ.1) долази до издужења влакана у зони испод еластичне линије (нормални напони затезања) и скраћења влакана у зони изнад еластичне линије (нормални напони притиска). Највише се издужеју, односно скраћују ивична влакна. Еластична линија лежи у неутралној равни у којој влакна не мењају дужину (нормални напони су једнаки нули). Деформација штапа у еластичном подручју траје све дотле док се не успостави равнотежа између спољних и унутрашњих сила које се опирају дејству спољних и које теже да честице штапа врате у првобитни положај.



Сл. 4.1.A.Ћ.1 Еластична линија штапа при правом савијању силама.

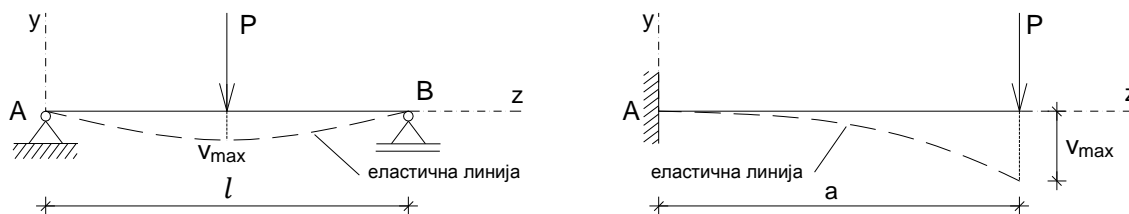
На слици су дате еластичне линије за анализиране случајеве²⁶ (Сл. 4.1.A.Ћ.2).



Сл. 4.1.A.Ћ.2 Еластичне линије анализираних случајева правог савијања силама.

²⁶ У дијаграмима се вредности момента савијања наносе на страни штапа која је затегнута.

При димензионасању штапа напрегнутог на савијање потребно је извршити и контролу деформације. У већини практичних случајева, када се не тражи једначина еластичне линије, при прорачуну штапа напрегнутог на савијање довољно је извршити контролу угиба у тачки дуж штапа где се јавља његова максимална вредност и упоредити га са дозвољеним. Угиб еластичне линије v у тачки дуж штапа представља дужину за коју се померило тежиште попречног пресека штапа у правцу осе Y (Сл. 4.1.A_ђ.3).



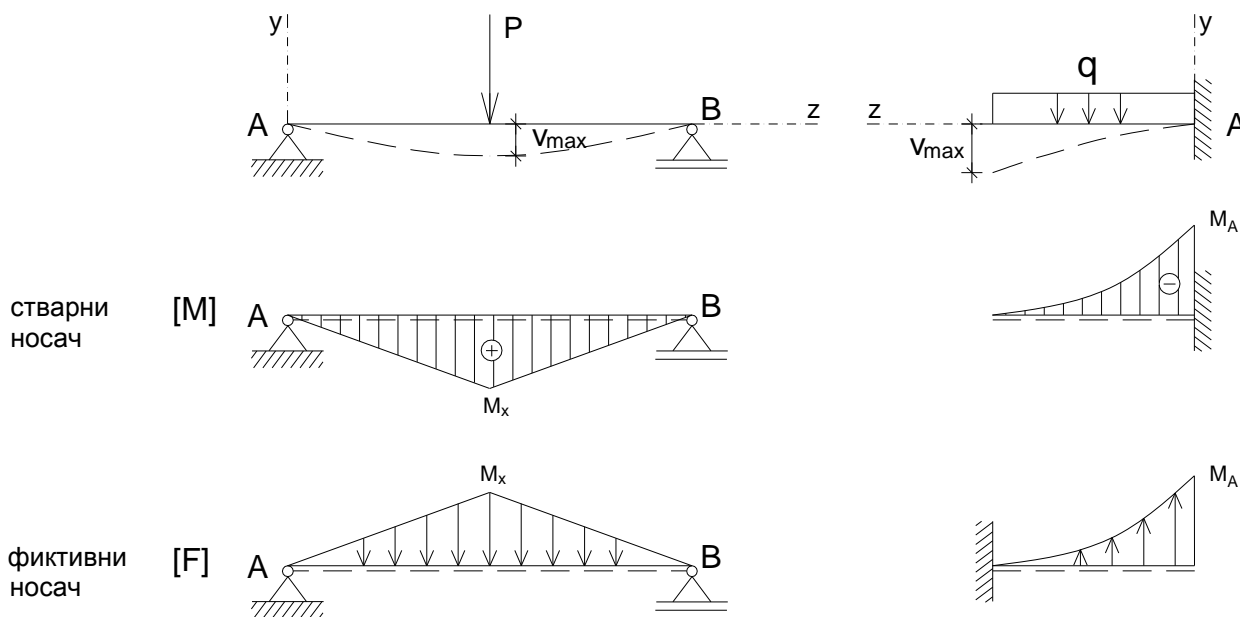
Сл. 4.1.A_ђ.3 Угиб просте греде и угиб конзоле.

Вредности допуштених угиба су дате у следећем облику, где је l дужина штапа, а m параметар којим се дефинише строгост критеријума.

$$v_{max} \leq v_{dop} = \frac{l}{m}$$

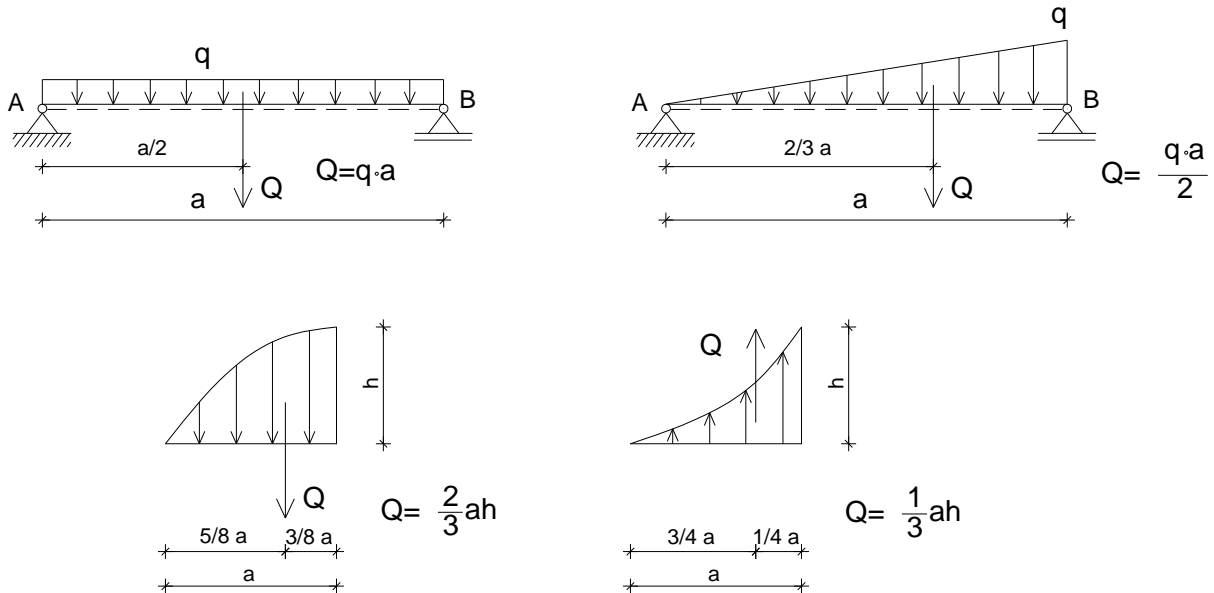
Угиби у било којој тачки гредног носача може се срачунати, поред осталих метода, и применом **Мор-Максвелове методе**, односно методом фиктивног носача или методом моментне површине. Дијаграм момената носача користи се, у том смислу, као фиктивно оптерећење на фиктивном носачу (Сл. 4.1.A_ђ.4). За позитивни дијаграм момената савијања на стварном носачу фиктивно оптерећење на фиктивном носачу усмерено је према доле (и обрнуто). Да би се задовољили гранични услови, при формирању фиктивног носача, у случају конзоле треба слободан крај заменити укљештењем, а укљештење слободним крајем. Угиб у неком пресеку стварног носача једнак је количнику фиктивног момента савијања \hat{M}_x , на фиктивном носачу услед фиктивног оптерећења које је дато у облику моментног дијаграма за стварни носач, и крутости на савијање стварног носача EI_x .

$$v = \frac{\hat{M}_x}{EI_x}$$



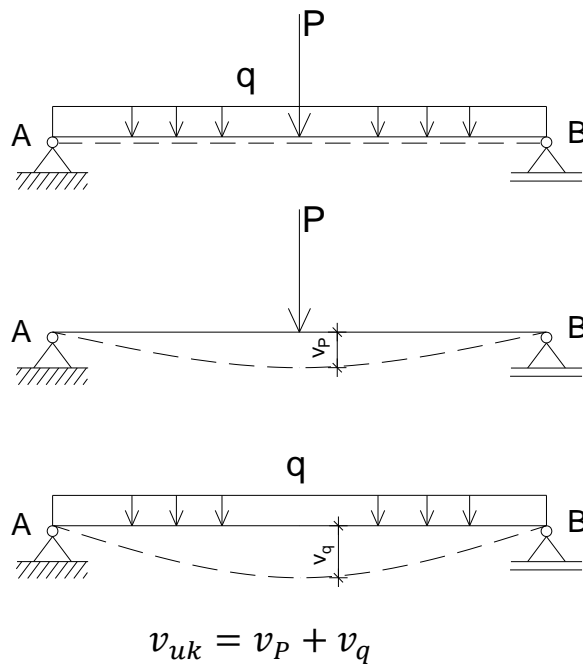
Сл. 4.1.A_ђ.4 Стварни и фиктивни носач за просту греду и конзолу.

Имајући у виду да дијаграм момената савијања постаје расподељено фиктивно оптерећење на фиктивном носачу, потребно је познавати величину и положај резултујуће фиктивне силе. Интензитет резултујућих фиктивних сила и њихови положаји дати су за карактеристичне случајеве (интензитет је једнак површини геометријске фигуре расподељеног оптерећења, а нападна линија пролази кроз тежиште фигуре) (Сл. 4.1.A_ђ.5).



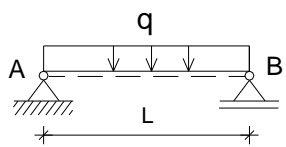
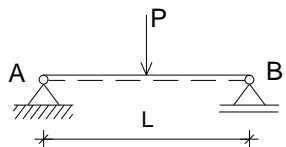
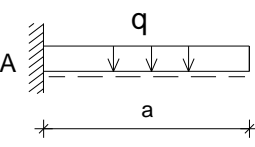
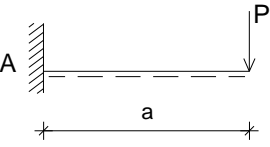
Сл. 4.1.A_ђ.5 Интензитети и положаји резултанти различитих расподељених оптерећења.

У области еластичне деформације, угиб у било којој тачки штапа који се јавља услед различитих оптерећења која делују истовремено може се добити алгебарским сабирањем угиба које су у тој тачки произвела појединачна оптерећења (Сл. 4.1.A_ђ.6).



Сл. 4.1.A_ђ.6 Укупан угиб носача за истовремено дејство различитих оптерећења.

За одређивање максималог угиба за носаче система просте греде и конзолне носаче, константног попречног пресека, за поједине шеме оптерећења, могу се користити изведени изрази²⁷, дати табеларно.

Шема оптерећења	v_{max}
	$\frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$
	$\frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I}$
	$\frac{q \cdot a^4}{8 \cdot E \cdot I}$
	$\frac{P \cdot a^3}{3 \cdot E \cdot I}$

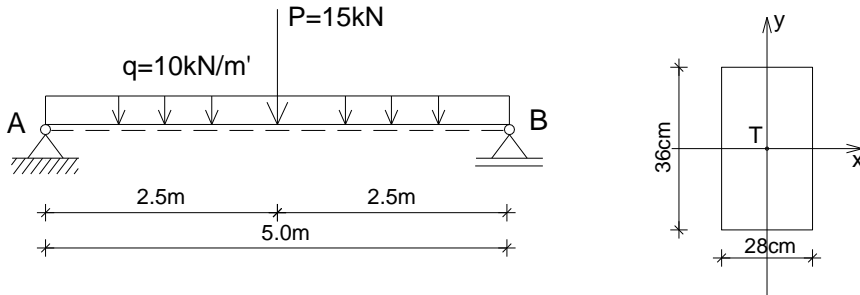
Табела 1. Изрази за израчунавање угиба носача.

²⁷ Изрази су преузети из књиге аутора Димитрија Рајића и Живорада Бојовића под насловом „Отпорност материјала“ (Издавач: Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1994).

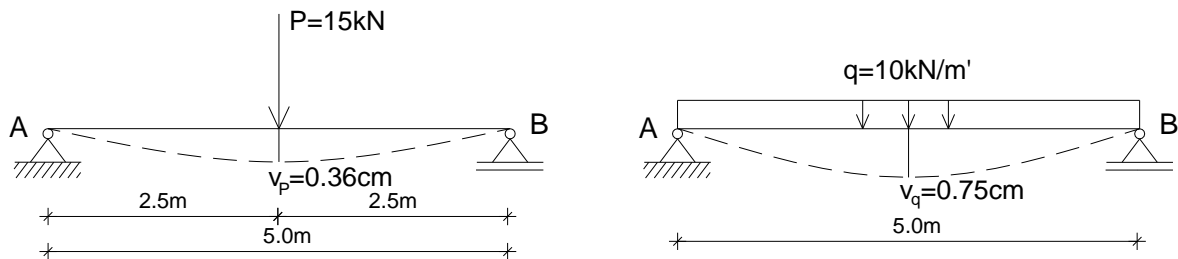
4.1.Б.ђ Бројни примери

4.1.Б.ђ.1 – Одређивање угиба греде при правом савијању силама

- За дату просту греду оптерећену према скици, усвојених димензија правоугаоног попречног пресека $b/h=28/36\text{cm}$, извршити контролу угиба. $E=10\text{GPa}$, $m=300$



Контрола угиба за усвојене димензије, применом израза датих у Табели 1 (стр. 65):



Аксијални момент инерције попречног пресека I_x :

$$I_x = \frac{0.28 \cdot 0.36^3}{12} = 1.088 \cdot 10^{-3}$$

Угиб од дејства силе P :

$$v_P = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 5^3}{48 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 1.088 \cdot 10^{-3}} = 0.00359\text{m} = 0.359\text{cm}$$

Угиб од дејства расподељеног оптерећења q :

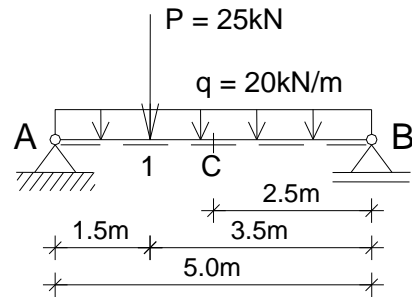
$$v_q = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 10^3 \cdot 5^4}{384 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 1.088 \cdot 10^{-3}} = 0.00747\text{m} = 0.747\text{cm}$$

Укупан угиб:

$$v_{uk} = v_P + v_q = 0.359 + 0.747 = 1.106\text{cm} < v_{doz} = \frac{l}{m} = \frac{500}{300} = 1.66\text{cm}$$

4.1.Б.ђ.2 – Одређивање угиба греде при правом савијању силама

- За просту греду оптерећену према скици, датог момента инерције попречног пресека $I_x = 2.211 \cdot 10^{-3} \text{m}^4$, одредити угиб у тачки С, користећи Морову аналогију. $E = 9 \text{GPa}$, $m = 300$



Угиб у тачки С од дејства концентрисане силе P:

$$R_A^P = \frac{25 \cdot 3,5}{5,0} = 17,5 \text{kN}$$

$$R_B^P = \frac{25 \cdot 1,5}{5,0} = 7,5 \text{kN}$$

$$M_1^P = 17,5 \cdot 1,5 = 26,25 \text{kNm}$$

$$M_C^P = 7,5 \cdot 2,5 = 18,75 \text{kNm}$$

$$\hat{Q}_1^P = \frac{26,25 \cdot 1,5}{2} = 19,687 \text{kNm}^2$$

$$\hat{Q}_2^P = \frac{26,25 \cdot 3,5}{2} = 45,937 \text{kNm}^2$$

$$\hat{Q}_C^P = \frac{18,75 \cdot 2,5}{2} = 23,437 \text{kNm}^2$$

$$\sum \hat{M}_A^P = 0 \Rightarrow \hat{R}_B^P$$

$$\hat{Q}_1^P \cdot 1,0 + \hat{Q}_2^P \cdot 2,667 - \hat{R}_B^P \cdot 5,0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{R}_B^P = \frac{19,687 \cdot 1,0 + 45,937 \cdot 2,667}{5,0} = 28,44 \text{kNm}^2$$

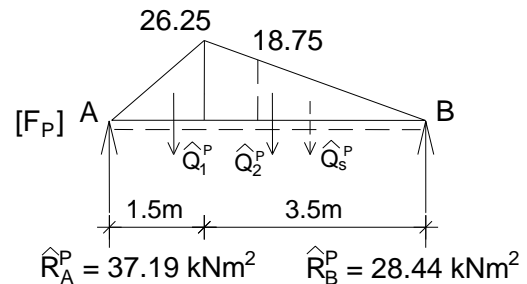
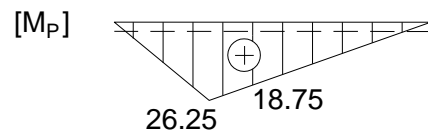
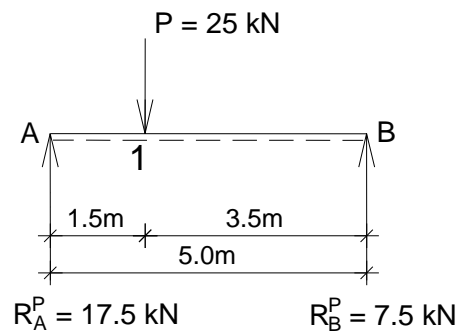
$$\sum \hat{M}_B^P = 0 \Rightarrow \hat{R}_A^P$$

$$-\hat{Q}_1^P \cdot 4,0 - \hat{Q}_2^P \cdot 2,333 + \hat{R}_A^P \cdot 5,0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{R}_A^P = \frac{19,687 \cdot 4,0 + 45,937 \cdot 2,333}{5,0} = 37,19 \text{kNm}^2$$

$$\hat{M}_C^P = -\hat{Q}_C^P \cdot 0,833 + \hat{R}_B^P \cdot 2,5 = -23,437 \cdot 0,833 + 28,44 \cdot 2,5 = 51,56 \text{kNm}^3$$

$$v_C^P = \frac{\hat{M}_S^P}{E \cdot J_z} = \frac{51,56 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^9 \cdot 2,211 \cdot 10^{-3}} = 0,00259 \text{m} = 0,259 \text{cm}$$



Угиб у тачки С од дејства расподељеног оптерећења q :

$$R_A^q = R_B^q = \frac{q \cdot \ell}{2} = \frac{20 \cdot 5,0}{2} = 50 \text{ kN}$$

$$M_S^q = \frac{q \cdot \ell^2}{8} = \frac{20 \cdot 5,0^2}{8} = 62,5 \text{ kNm}$$

$$\hat{Q}^q = \frac{2}{3} \cdot 2,5 \cdot 62,5 = 104,17 \text{ kNm}^2$$

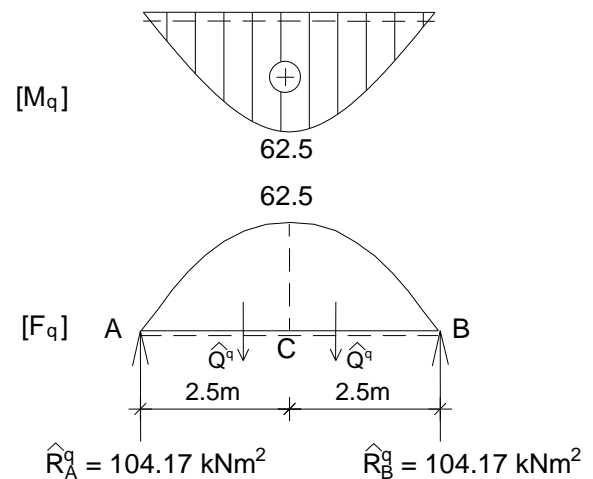
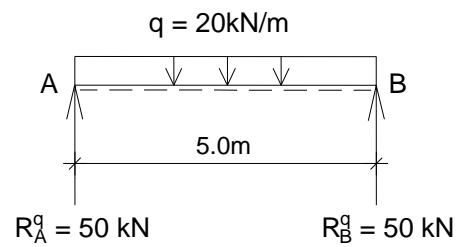
$$\hat{R}_A^q = \hat{R}_B^q = \hat{Q}^q = 104,17 \text{ kNm}^2$$

$$\hat{M}_C^q = \hat{R}_A^q \cdot 2,5 - \hat{Q}^q \cdot \frac{3}{8} \cdot 2,5$$

$$\hat{M}_C^q = 104,17 \cdot 2,5 - 104,17 \cdot 0,937 = 162,76 \text{ kNm}^3$$

$$v_C^q = \frac{\hat{M}_C^q}{E \cdot J_z} = \frac{162,76 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^9 \cdot 2,211 \cdot 10^{-3}}$$

$$v_C^q = 0,00818 \text{ m} = 0,818 \text{ cm}$$



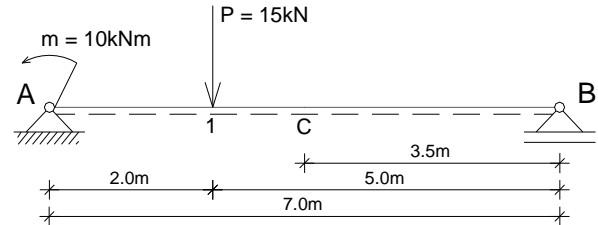
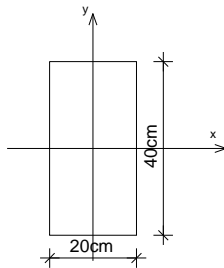
Укупан угиб у тачки С:

$$v_C = v_C^p + v_C^q = 0,259 \text{ cm} + 0,818 \text{ cm} = 1,077 \text{ cm}$$

$$v_C = 1,077 \text{ cm} < v_{\text{доп}} = \frac{\ell}{300} = \frac{500}{300} = 1,666 \text{ cm}$$

4.1.Б.ђ.3 – Одређивање угиба греде при правом савијању силама

- За просту греду оптерећену према скици, датог попречног пресека, одредити угиб у тачки С, користећи Морову аналогију. $E=9\text{GPa}$



Аксијални момент инерције попречног пресека I_x :

$$I_x = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 106666 \text{ cm}^4$$

Угиб у тачки С од дејства концентрисане силе P :

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A^P \cdot 7,0 - P \cdot 5,0 = 0$$

$$R_A^P = \frac{15 \cdot 5,0}{7,0} = 10.714 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$P \cdot 2,0 - R_B^P \cdot 7,0 = 0$$

$$R_B^P = \frac{15 \cdot 2,0}{7,0} = 4.286 \text{ kN}$$

$$M_C^P = 4.286 \cdot 3,5 = 15 \text{ kNm}$$

$$M_1^P = 10.714 \cdot 2,0 = 21.43 \text{ kNm}$$

$$\hat{Q}_1^P = \frac{21.43 \cdot 2,0}{2} = 21.43 \text{ kNm}^2$$

$$\hat{Q}_2^P = \frac{21.43 \cdot 5,0}{2} = 53.57 \text{ kNm}^2$$

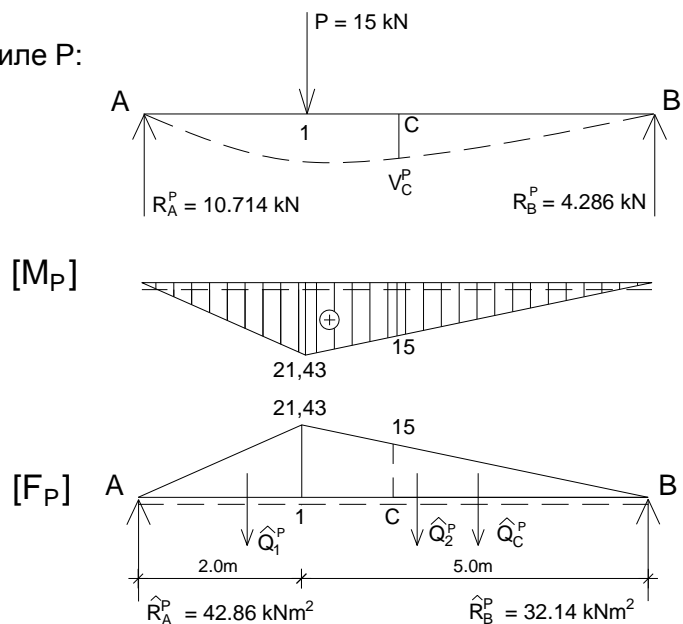
$$\hat{Q}_C^P = \frac{15,0 \cdot 3,5}{2} = 26.25 \text{ kNm}^2$$

$$\sum \hat{M}_B^P = 0 \Rightarrow \hat{R}_A^P \cdot 7,0 - \hat{Q}_1^P \cdot 5,666 - \hat{Q}_2^P \cdot 3,333 = 0 \quad \hat{R}_A^P = 42.86 \text{ kNm}^2$$

$$\sum \hat{M}_A^P = 0 \Rightarrow -\hat{R}_B^P \cdot 7,0 + \hat{Q}_1^P \cdot 1,333 + \hat{Q}_2^P \cdot 3,666 = 0 \quad \hat{R}_B^P = 32.14 \text{ kNm}^2$$

$$\hat{M}_C^P = \hat{R}_B^P \cdot 3,5 - \hat{Q}_C^P \cdot 1,1666 = 81.84 \text{ kNm}^3$$

$$v_C^P = \frac{81.84 \cdot 10^3}{9,0 \cdot 10^9 \cdot 106666 \cdot 10^{-8}} = 0.00853 \text{ m}$$



Угиб у тачки С од дејства концентрисаног момента m :

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A^m \cdot 7,0 - m = 0$$

$$R_A^m = \frac{m}{7,0} = \frac{10}{7,0} = 1.428 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B^m \cdot 7,0 - m = 0$$

$$R_B^m = \frac{m}{7,0} = \frac{10}{7,0} = 1.428 \text{ kN}$$

$$M_A^m = -m = -10 \text{ kNm}$$

$$M_C^m = -R_B^m \cdot 3,5 = -1.428 \cdot 3,5 = -5 \text{ kNm}$$

$$\hat{Q}^m = \frac{10,0 \cdot 7,0}{2} = 35 \text{ kNm}^2$$

$$\hat{Q}_C^m = \frac{5,0 \cdot 3,5}{2} = 8,75 \text{ kNm}^2$$

$$\sum \hat{M}_B^m = 0$$

$$-\hat{R}_A^m \cdot 7,0 + \hat{Q}^m \cdot 4,666 = 0$$

$$\hat{R}_A^m = \frac{35 \cdot 4,666}{7,0} = 23.335 \text{ kNm}^2$$

$$\sum \hat{M}_A^m = 0$$

$$\hat{R}_B^m \cdot 7,0 - \hat{Q}^m \cdot 2,333 = 0$$

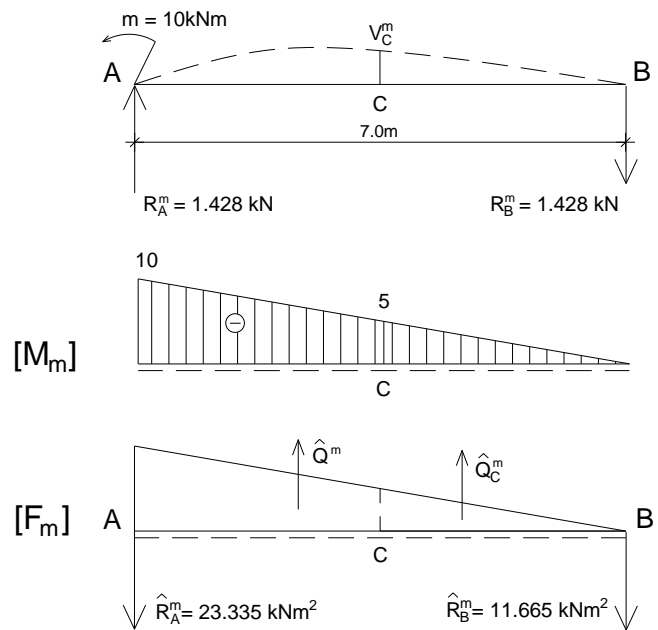
$$\hat{R}_B^m = \frac{35 \cdot 2,333}{7,0} = 11.665 \text{ kNm}^2$$

$$\hat{M}_C^m = -\hat{R}_B^m \cdot 3,5 + \hat{Q}_C^m \cdot 1,1666 = -30.625 \text{ kNm}^3$$

$$v_C^m = \frac{-30.625 \cdot 10^3}{9,0 \cdot 10^9 \cdot 106666 \cdot 10^{-8}} = -0.00319 \text{ m}$$

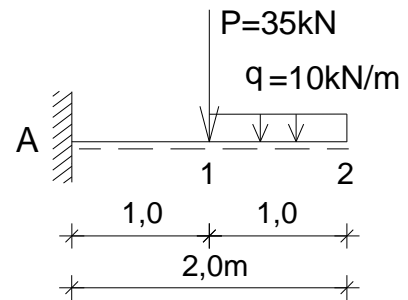
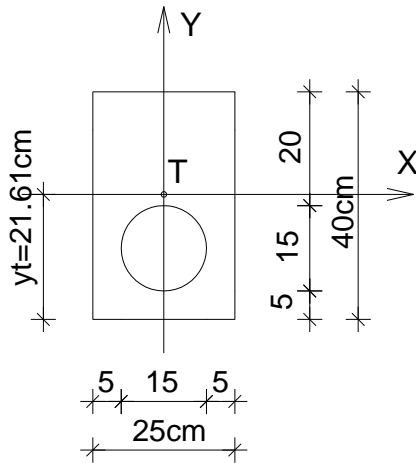
Укупан угиб у тачки С:

$$v_C = v_C^P + v_C^m = 0.00853 - 0.00319 = 0.00534 \text{ m} = 0.534 \text{ cm}$$



4.1.Б.ђ.4 – Одређивање угиба греде при правом савијању силама

- За конзолу оптерећену према скици, датог попречног пресека, одредити угиб на слободном крају. $E = 9\text{GPa}$



Површина попречног пресека:

$$A = 25 \cdot 40 - 7.5^2 \pi = 1000 - 176.6 = 823.3 \text{ cm}^2$$

Положај тежишта попречног пресека:

$$y_t = \frac{1000 \cdot 20 - 176.6 \cdot 12.5}{823.3} = 21.61 \text{ cm}$$

Момент инерције попречног пресека:

$$I_x = \frac{25 \cdot 40^3}{12} + 1000 \cdot 1.61^2 - \left(\frac{7.5^4 \cdot 3.14}{4} + 176.6 \cdot 9.11^2 \right)$$

$$I_x = 118786 \text{ cm}^4$$

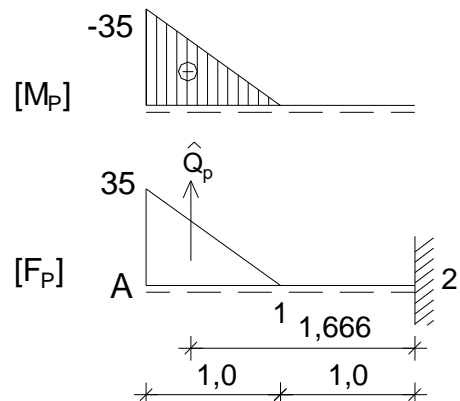
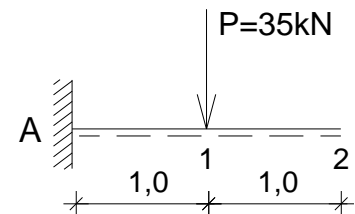
Угиб за дејство силе P:

$$M_A^P = -P \cdot 1.0 = -35 \cdot 1.0 = -35 \text{ kNm}$$

$$\hat{Q}_p = \frac{35 \cdot 1.0}{2} = 17.5 \text{ kNm}^2$$

$$\hat{M}_p = 17.5 \cdot 1.666 = 29.16 \text{ kNm}^3$$

$$v_P = \frac{\hat{M}_p}{EI_x} = \frac{29.16 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^9 \cdot 0.001187} = 0.00273 \text{ m} = 0.273 \text{ cm}$$



Угиб за дејство расподељеног оптерећења q :

$$M_A^q = -q \cdot 1,0 \cdot 1,5 = -10 \cdot 1,0 \cdot 1,5 = -15 \text{ kNm}$$

$$M_1^q = -q \cdot 1,0 \cdot 0,5 = -10 \cdot 1,0 \cdot 0,5 = -5 \text{ kNm}$$

$$\hat{Q}_1^q = \frac{10 \cdot 1,0}{2} = 5 \text{ kNm}^2$$

$$\hat{Q}_2^q = 5 \cdot 1,0 = 5 \text{ kNm}^2$$

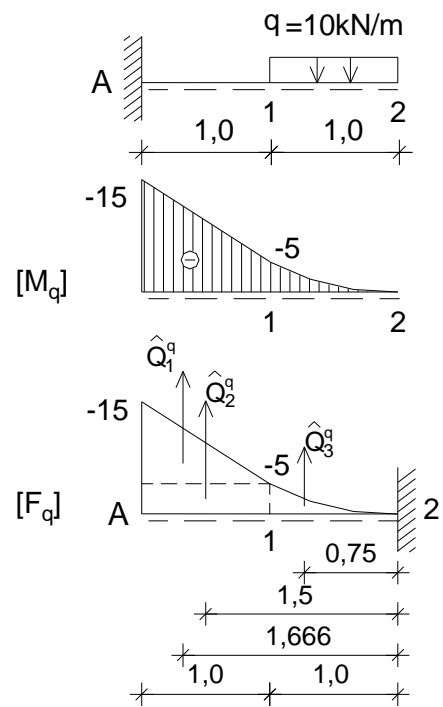
$$\hat{Q}_3^q = \frac{5 \cdot 1,0}{3} = 1.666 \text{ kNm}^2$$

$$\hat{M}_q = \hat{Q}_1^q \cdot 1,666 + \hat{Q}_2^q \cdot 1,5 + \hat{Q}_3^q \cdot 0,75 = 17.07 \text{ kNm}^3$$

$$v_q = \frac{\hat{M}_q}{EI_x} = \frac{17.07 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^9 \cdot 0.001187} = 0.00159 \text{ m} = 0.159 \text{ cm}$$

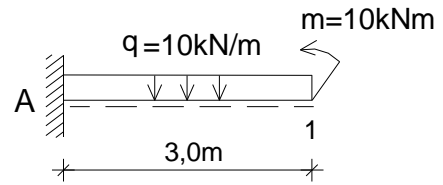
Укупан угиб на слободном крају:

$$v_{uk} = v_P + v_q = 0.273 + 0.159 = 0.433 \text{ cm}$$



4.1.Б.ђ.5 – Одређивање угиба греде при правом савијању силама

- За конзолу оптерећену према скици и дати аксијални момента инерције попречног пресека, одредити угиб на слободном крају. $E = 210\text{GPa}$, $I_x = 0,0000306\text{m}^4$



Угиб за дејство расподељеног оптерећења q :

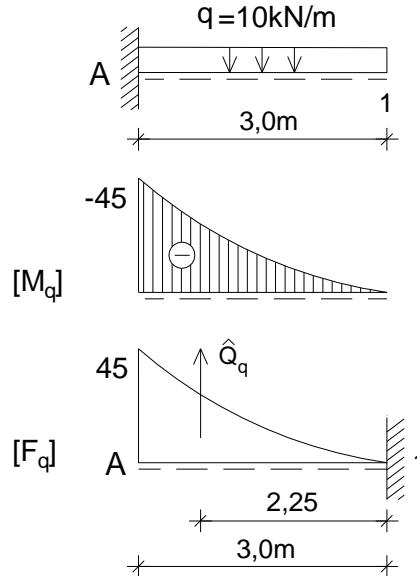
$$M_A^q = -q \cdot 3,0 \cdot 1,5 = -10 \cdot 3,0 \cdot 1,5 = -45\text{kNm}$$

$$\hat{Q}_q = \frac{1}{3} \cdot 3,0 \cdot 45 = 45\text{kNm}^2$$

$$\hat{M}_q = \hat{Q}_q \cdot \frac{3}{4} a = 45 \cdot 2,25 = 101,25\text{kNm}^3$$

$$v_q = \frac{\hat{M}_q}{EI} = \frac{101,25}{210 \cdot 10^9 \cdot 0,0000306} = 0,01575\text{m}$$

$$v_q = 1,575\text{cm}$$



Угиб за дејство концентрисаног момента m :

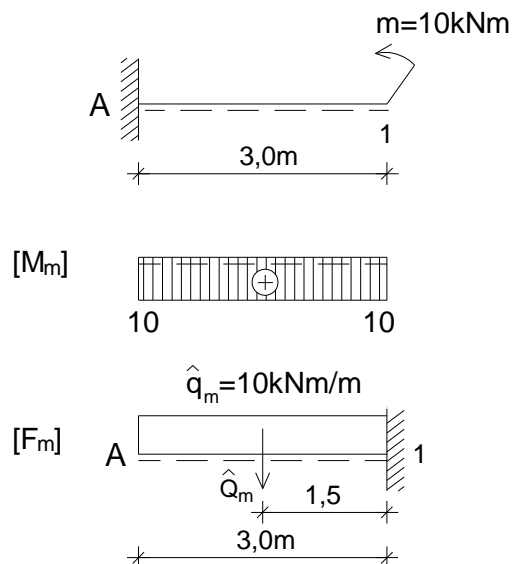
$$M_A^m = M_1^m = m = 10\text{kNm}$$

$$\hat{Q}_m = 10 \cdot 3,0 = 30\text{kNm}^2$$

$$\hat{M}_m = -\hat{Q}_m \cdot 1,5 = -30 \cdot 1,5 = -45\text{kNm}^3$$

$$v_m = \frac{-\hat{M}_m}{EI} = \frac{-45}{210 \cdot 10^9 \cdot 0,0000306} = -0,007\text{m}$$

$$v_m = -0,7\text{cm}$$



Укупан угиб:

$$v = v_q + v_m = 1,575 - 0,7 = 0,875\text{cm}$$

4.1.B.ñ Вежба 4.1.ñ (VIII предавање)

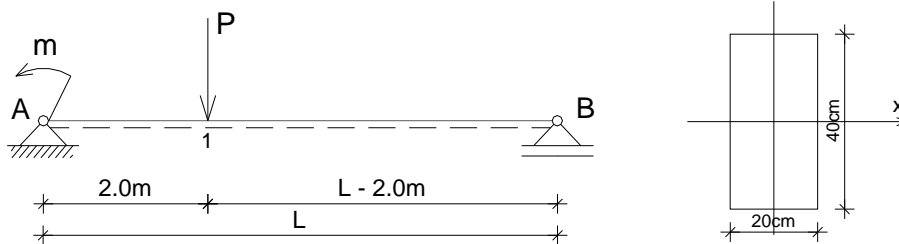
Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

За просту греду оптерећену према скици одредити угиб у тачки 1 (v_1) користећи Морову аналогију.

$$L = (500 + \text{број индекса})/100 \text{ m}$$

$$P = (15 + \text{цифра јединица}) \text{ kN}$$

$$m = (10 + \text{цифра десетица}) \text{ kNm}$$

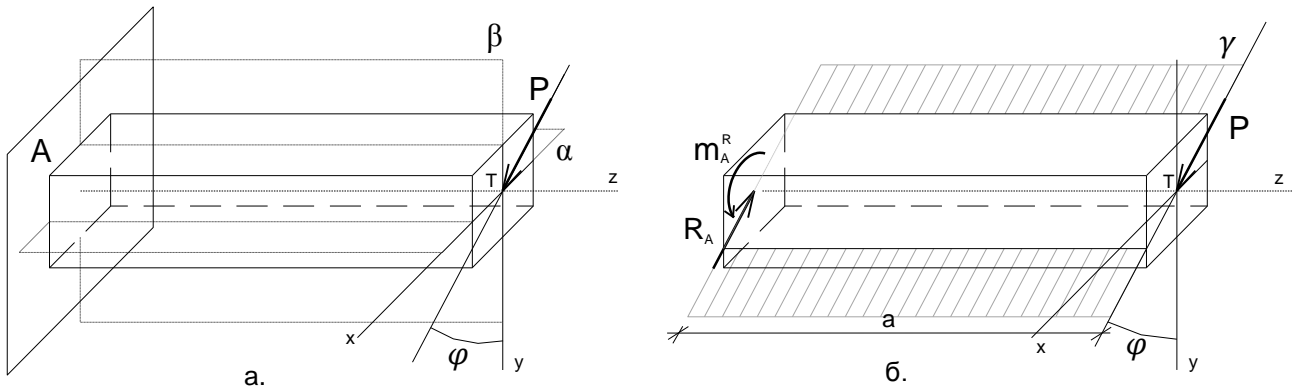


4.2 ЗАДАТАК 4.2 - Елементи напрегнути на косо савијање силама

На основу Анализе случаја у општим бројевима и анализе Бројних примера, решити постављени задатак у оквиру дате Вежбе.

4.2.А Анализа случајева

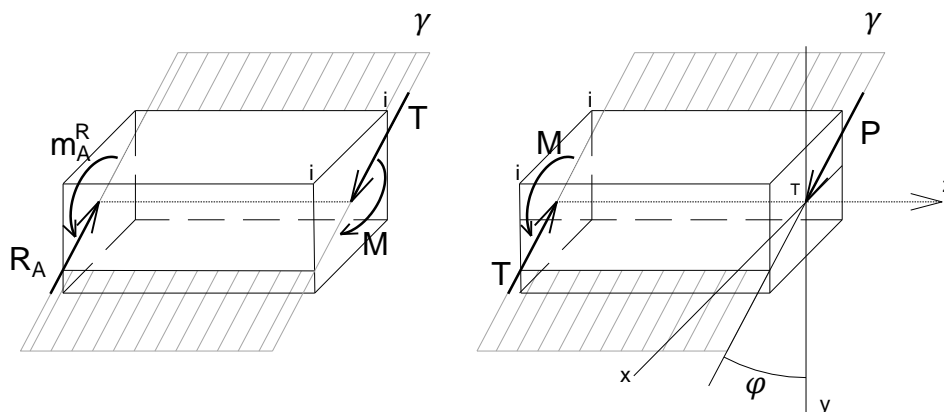
4.2.А.а) **Дејство - Оптерећење** – Дат је случај носача на који делује спољна концентрисана сила P на правцу управном на осу штапа, у равни (γ) која се на поклапа са једном од главних равни инерције (α и β)²⁸ (Сл. 4.2.А.1а и б).



Сл. 4.2.А.1 Елемент напрегнут на косо савијање силама.

4.2.А.б) **Реакција везе - Равнотежа** – Штап је у стању статичке равнотеже захваљујући појави реакција везе²⁹, односно силе R_A и момента укљештења m_{AR} , у укљештењу A (Сл. 4.2.А.1б). Из услова статичке равнотеже крутог тела следи да је $R_A=P$ и $m_{AR} = P \cdot a$ (занемарено је дејство сопствене тежине штапа).

4.2.А.в) **Сила и момент у пресеку штапа** – У попречном пресеку штапа управном на осу штапа $i-i$, услед дејства спољних сила на правцима управним на осу штапа (у случају датом на слици активне P и реактивне R_A), јавља се унутрашња сила или сила у пресеку T – трансверзала сила (Сл. 4.2.А.2). У попречном пресеку штапа управном на осу штапа $i-i$, услед дејства момената спољних сила, јавља се унутрашњи момент или момент у пресеку M – момент савијања (Сл. 4.2.А.2). За одређивање силе T_y и момента савијања M у пресеку штапа користи се метода пресека (обрађена у претходним поглављима).



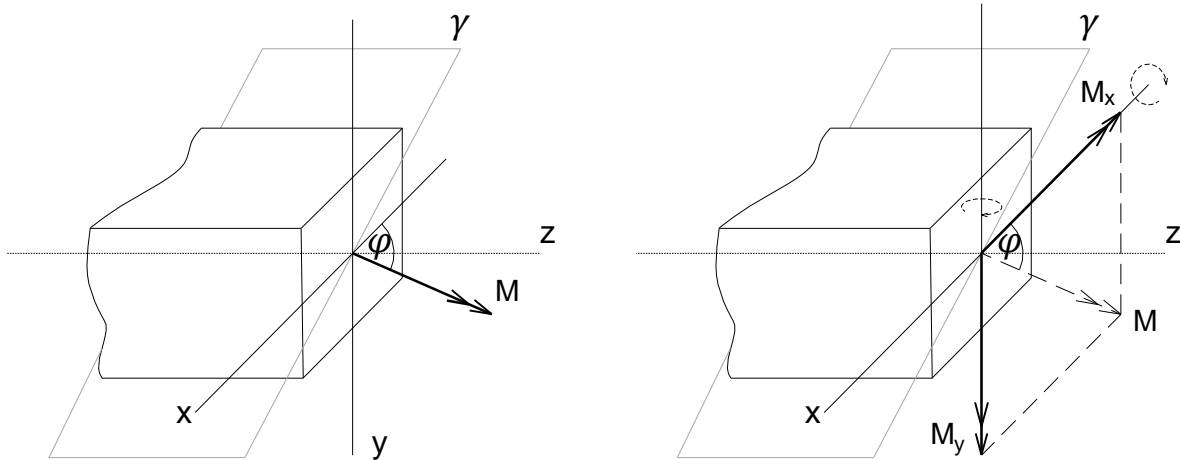
Сл. 4.2.А.2 Сила и момент у пресеку штапа при косом савијању силама.

²⁸ У практикуму се анализирају попречни пресеци код којих је бар једна од тежишних оса (X и Y) уједно и оса симетрије пресека (главна оса).

²⁹ Веза се замени реакцијама везе што омогућава да се штап анализира као слободно круто тело које је у статичкој равнотежи (Сл. 4.2.А.1б).

4.2.A.г) Распoдела нормалних напона при косом савијању силама

Момент савијања M у пресеку (момент је представљен својим вектором управним на раван γ), разлаже се на компоненте M_x и M_y (Сл. 4.2.A.3).

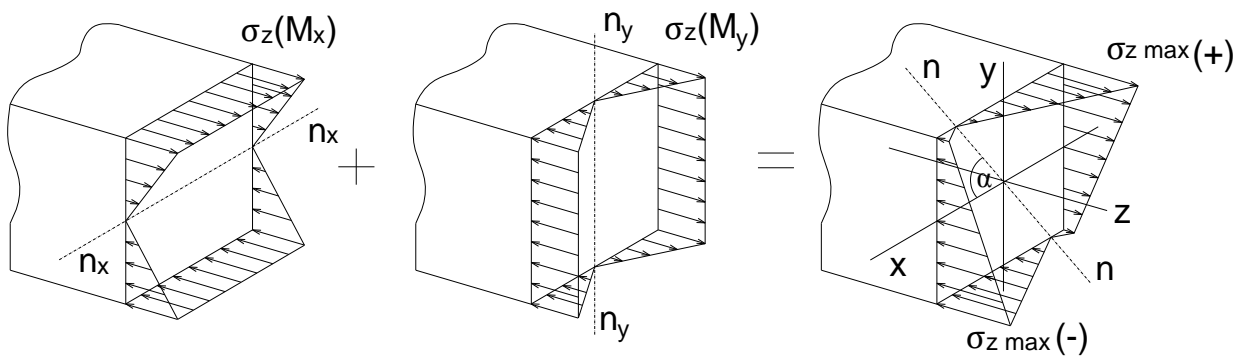


$$M_x = M \cdot \cos\varphi \quad M_y = M \cdot \sin\varphi$$

Сл. 4.2.A.3 Разлагање момента савијања на компоненте.

На основу принципа суперпозиције, нормални напон у посматраној тачки попречног пресека добија се као алгебарски збир нормалног напона за савијање око X тежишне осе и нормалног напона за савијање око Y тежишне осе (Сл. 4.2.A.4). Знак напона је позитиван (+) уколико се посматрана тачка налази у затегнутој зони или негативан (-) уколико се налази у притиснутој зони.

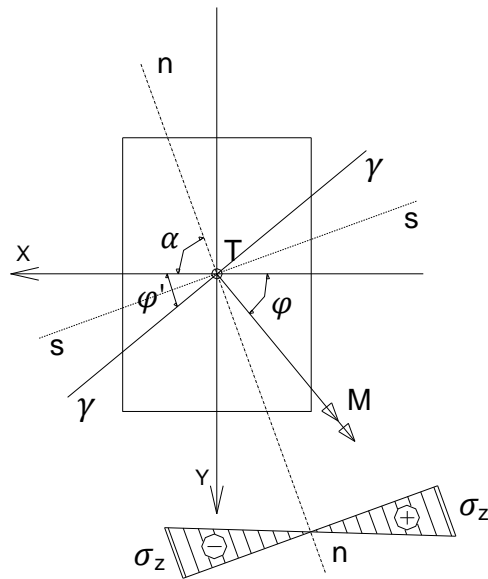
$$\sigma_z = \pm \sigma_z^{M_x} \pm \sigma_z^{M_y} = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x \quad \sigma_{z_{max}} \leq \sigma_{doz}$$



Сл. 4.2.A.4 Распoдела нормалних напона при косом савијању силама.

Нормални напони су пропорционални удаљењима посматраних тачака од неутралне линије $n-n$ (линија дуж које су нормални напони једнаки нули, а која дели попречни пресек на зону притиска и зону затезања) (Сл. 4.2.A.4 и 4.2.A.5). Екстремне вредности нормалних напона јављају се у тачкама пресека које су најудаљеније од неутралне линије. Неутрална линија пролази кроз тежиште попречног пресека и кроз два супротна квадранта у односу на раван у којој делује оптерећење и у општем случају није управна на ову раван. Положај неутралне линије $n-n$ се код косог савијања одређује помоћу угла α који представља угао између неутралне линије и тежишне осе X (мерено од позитивног смера осе X).

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{ctg} \varphi' \cdot \frac{I_x}{I_y}$$

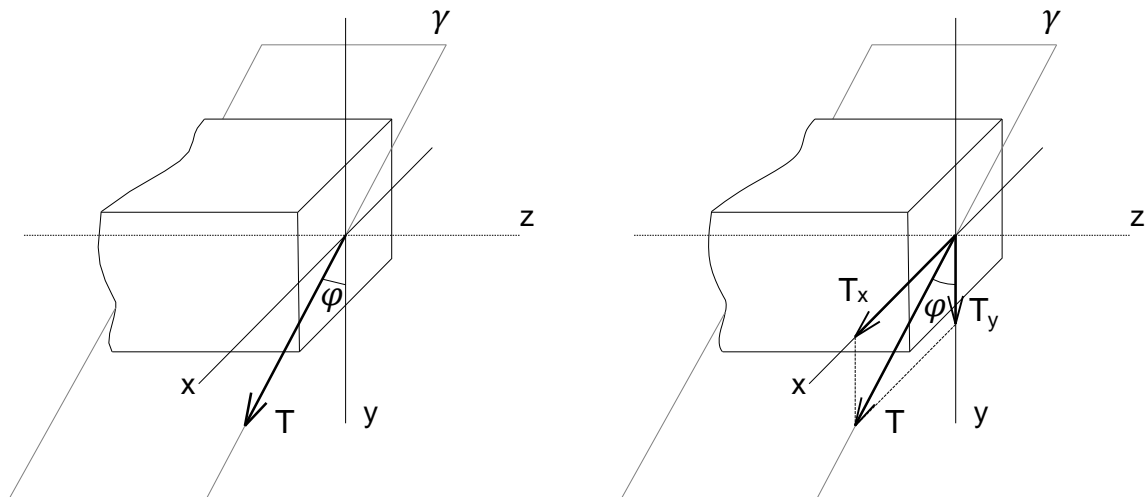


Сл. 4.2.A.5 Положај неутралне линије n-n при косом савијању силама.

Управно на правац неутралне линије n-n налази се траг равни s-s у којој се савија штап. Раван у којој се савија штап се не поклапа са равни γ у којој делује оптерећење.

4.2.A.д) Расподела тангенцијалних напона при косом савијању силама

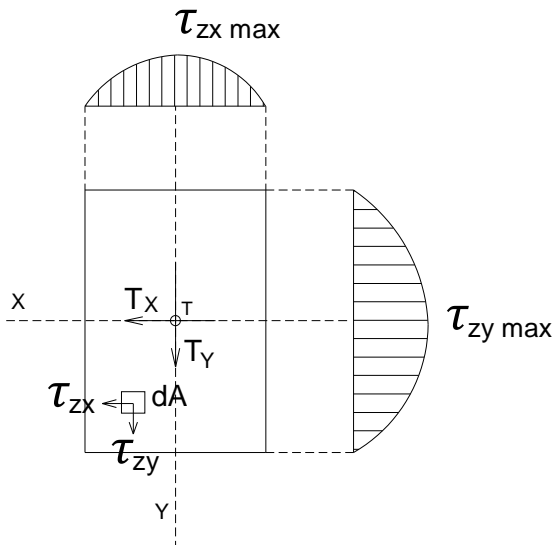
Трансверзална сила T која се јавља у равни γ у којој делује оптерећење, разлаже се на своје компоненте T_x и T_y (Сл. 4.2.A.6).



$$T_x = T \cdot \sin \varphi \quad T_y = T \cdot \cos \varphi$$

Сл. 4.2.A.6 Разлагање трансверзалне силе на компоненте.

На основу принципа суперпозиције, тангенцијални напон у посматраној тачки попречног пресека добија се на основу компоненталних тангенцијалних напона, тангенцијалног напона за савијање око Х тежишне осе и тангенцијалног напона за савијање око Y тежишне осе (Сл. 4.2.A.7).



$$\tau_{zx} = \frac{T_x \cdot S_y}{I_y \cdot b_x}$$

$$\tau_{zy} = \frac{T_y \cdot S_x}{I_x \cdot b_y}$$

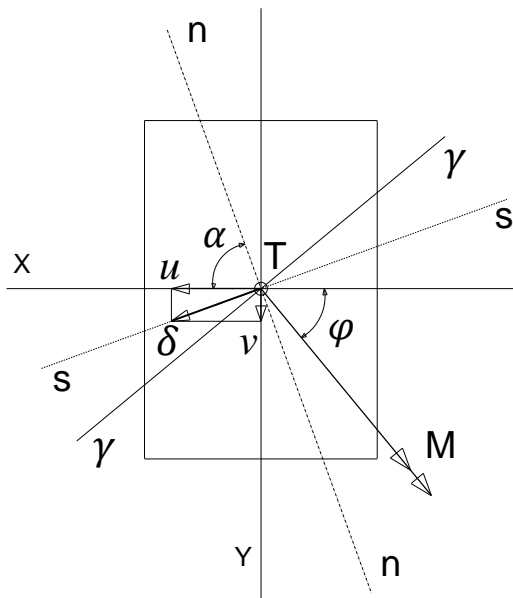
$$\tau = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}$$

$$\tau_{max} \leq \tau_{doz}$$

Сл. 4.2.A.7 Распредела компоненталних тангенцијалних напона за правоугаони попречни пресек при косом савијању силама.

4.2.A.8) Деформација при косом савијању силама – резултујуће померање

За одређивање померања такође се примењује принцип суперпозиције. Резултујуће померање се добија на основу компоненталних померања дуж Х осе (u) и дуж Y осе (v). Резултујуће померање је управно на неутралну осу (Сл. 4.2.A.8).



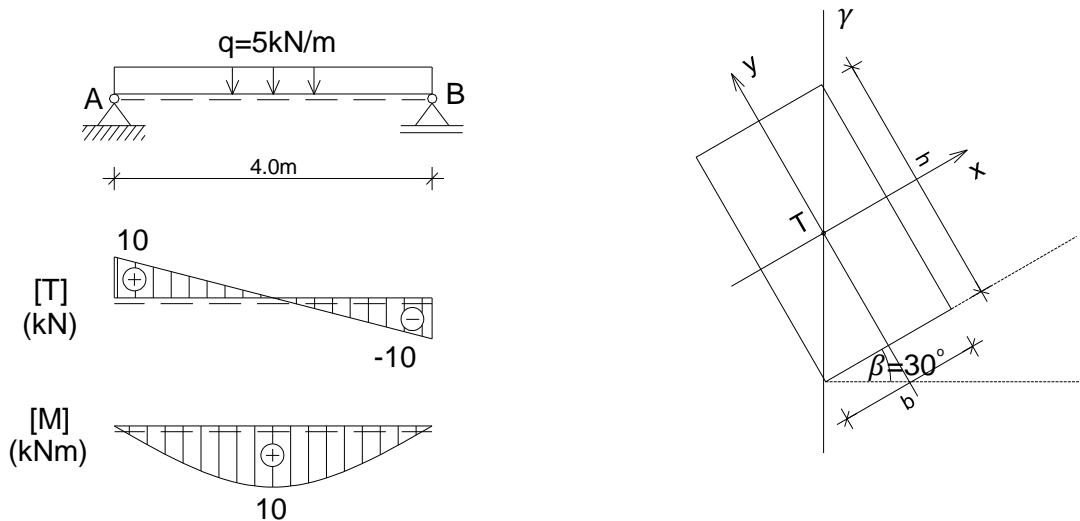
$$\delta = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Сл. 4.2.A.8 Резултујуће померање при косом савијању силама.

4.2.Б. Бројни примери

4.2.Б.1 – Димензионисање греде напрегнуте на косо савијање силама

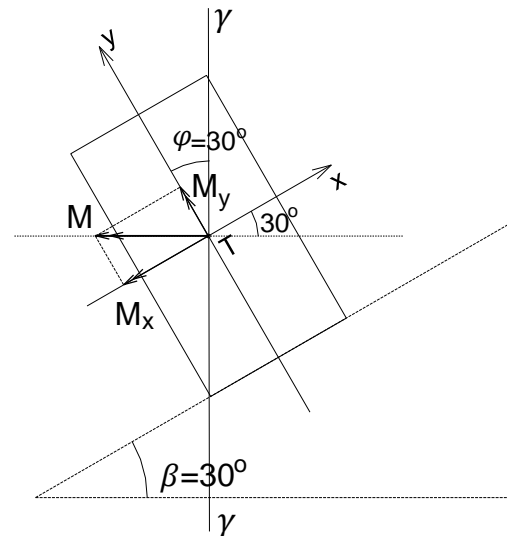
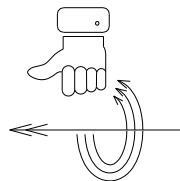
- За дрвену рожњачу оптерећену према скици дати су статички утицаји. Димензионисати рожњачу правоугаоног попречног пресека, за задати однос страна $b:h=1:2$ и за $\sigma_{doz}=10\text{MPa}$ и $\tau_{doz}=0.9\text{MPa}$. За усвојене димензије извршити контролу нормалног и тангенцијалног напона и израчунати максимално померање тежишта попречног пресека. $E=10\text{GPa}$



Разлагање момента савијања на компоненте:

$$M_x = M \cdot \cos\varphi = M \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0.866 = 8.66 \text{ kNm}$$

$$M_y = M \cdot \sin\varphi = M \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0.5 = 5 \text{ kNm}$$



Димензионисање штапа:

$$\frac{W_x}{W_y} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{b^2h}{6}} = \frac{h}{b} = C \rightarrow W_y = \frac{W_x}{C} \rightarrow \sigma_z = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{\frac{W_x}{C}} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{CM_y}{W_x} = \frac{M_x + CM_y}{W_x}$$

$$\frac{h}{b} = C = 2 \quad W_{x \text{ pot}} = \frac{M_x + CM_y}{\sigma_{z \text{ doz}}} = \frac{8.66 \cdot 10^3 + 2 \cdot 5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 1866 \text{ cm}^3$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{h}{2} \frac{h^2}{6} = \frac{h^3}{12} \rightarrow h = \sqrt[3]{12 \cdot W_{x \text{ pot}}} = \sqrt[3]{12 \cdot 1866} = 28.12 \text{ cm}$$

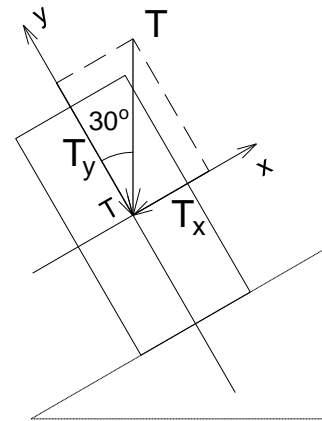
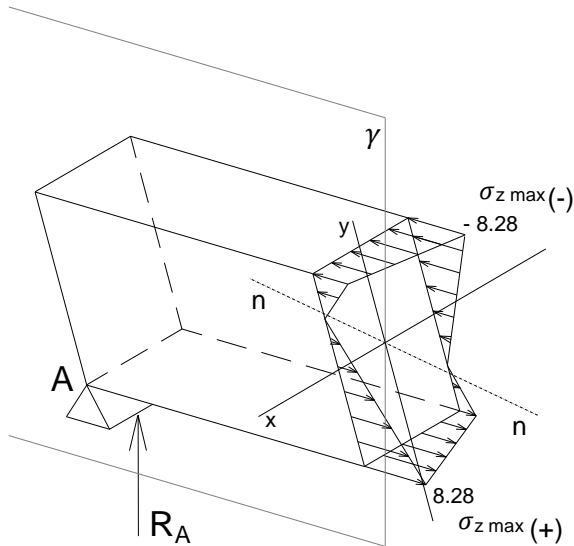
$$\text{Усваја се } b/h=15/30\text{cm} \quad A = 15 \cdot 30 = 450 \text{ cm}^2 = 0.045 \text{ m}^2$$

Отпорни моменти усвојеног попречног пресека:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{0.15 \cdot 0.3^2}{6} = 2.25 \cdot 10^{-3} m^3 \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{0.3 \cdot 0.15^2}{6} = 1.125 \cdot 10^{-3} m^3$$

Контрола нормалног напона:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{8.66 \cdot 10^{-3}}{2.25 \cdot 10^{-3}} \pm \frac{5 \cdot 10^{-3}}{1.125 \cdot 10^{-3}} = \pm 3.84 \pm 4.44 = \pm 8.28 MPa < \sigma_{doz} = 10 MPa$$



Контрола тангенцијалног напона:

$$T_x = T \cdot \sin \varphi = T \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0.5 = 5 kN$$

$$T_y = T \cdot \cos \varphi = T \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0.866 = 8.66 kN$$

$$\tau = \sqrt{\left(1.5 \cdot \frac{T_x}{A}\right)^2 + \left(1.5 \cdot \frac{T_y}{A}\right)^2} = \sqrt{\left(1.5 \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0.045}\right)^2 + \left(1.5 \cdot \frac{8.66 \cdot 10^{-3}}{0.045}\right)^2} = 0.332 MPa < \tau_{doz} = 0.9 MPa$$

Разлагање расподељеног оптерећења на компоненте:

$$q_x = q \cdot \sin \varphi = q \cdot \sin 30^\circ = 5 \cdot 0.5 = 2.5 kN/m$$

$$q_y = q \cdot \cos \varphi = q \cdot \cos 30^\circ = 5 \cdot 0.866 = 4.33 kN/m$$

Аксијални моменти инерције попречног пресека Ix и Iy:

$$I_x = \frac{0.15 \cdot 0.3^3}{12} = 3.375 \cdot 10^{-4} m^4$$

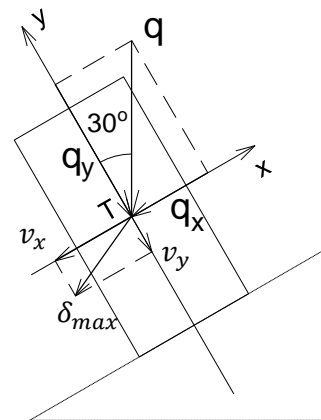
$$I_y = \frac{0.3 \cdot 0.15^3}{12} = 8.437 \cdot 10^{-5} m^4$$

Максимално померање тежишта попречног пресека:

$$v_x = \frac{5 \cdot q_x \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I_y} = \frac{5 \cdot 2.5 \cdot 10^3 \cdot 4.0^4}{384 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 8.437 \cdot 10^{-5}} = 0.00987 m$$

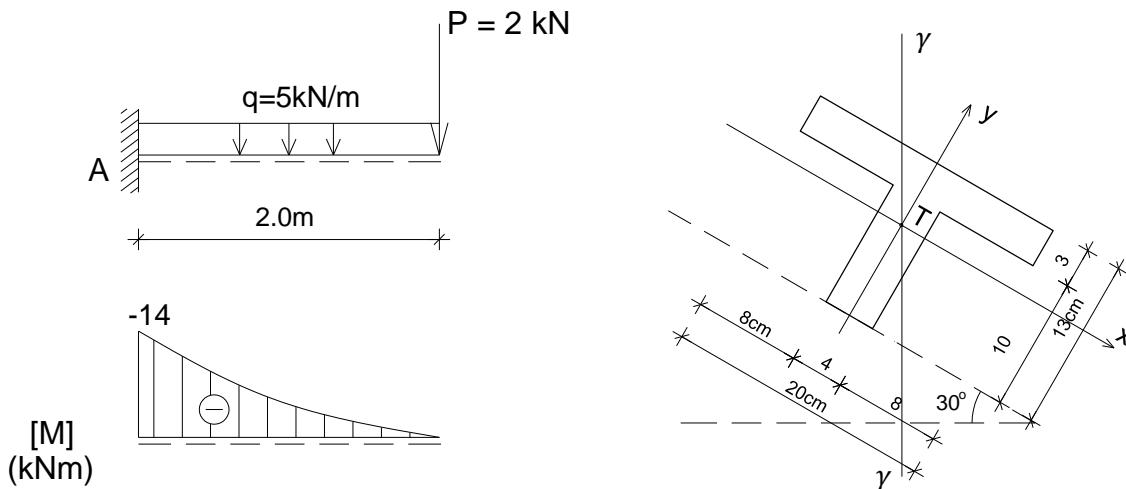
$$v_y = \frac{5 \cdot q_y \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I_x} = \frac{5 \cdot 4.33 \cdot 10^3 \cdot 4.0^4}{384 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 3.375 \cdot 10^{-4}} = 0.00427 m$$

$$\delta_{max} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{0.00987^2 + 0.00427^2} = 0.0107 m = 1.07 cm$$



4.2.Б.2 – Одређивање нормалних напона у греди при косом савијању силама

- За конзолу оптерећену према скици, датог попречног пресека, одредити положај n-n линије и екстремне нормалне напоне и нацртати дијаграм нормалних напона.



Површина попречног пресека:

$$A = A_1 + A_2 = 4 \cdot 10 + 20 \cdot 3 = 40 + 60 = 100 \text{ cm}^2$$

Положај тежишта попречног пресека:

$$y_t = \frac{40 \cdot 5 + 60 \cdot 11.5}{100} = 8.9 \text{ cm}$$

Аксијални моменти инерције попречног пресека I_x и I_y :

$$I_x = \frac{20 \cdot 3^3}{12} + 60 \cdot 2 \cdot 6^2 + \frac{4 \cdot 10^3}{12} + 40 \cdot 3 \cdot 9^2 = 1392 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{3 \cdot 20^3}{12} + \frac{10 \cdot 4^3}{12} = 2053 \text{ cm}^4$$

Положај неутралне линије n-n:

$$\alpha = \arctan \left(-\text{ctg} \varphi' \cdot \frac{I_x}{I_y} \right) = \arctan \left(-\text{ctg} 60^\circ \cdot \frac{1392}{2053} \right) = \arctan \left(-0.577 \cdot \frac{1392}{2053} \right)$$

$$\alpha = \arctan(-0.391) = -21.4^\circ$$

Разлагање момента савијања на компоненте:

$$M_x = M_{\max} \cdot \cos \varphi = M_{\max} \cdot \cos 30^\circ = 14 \cdot 0.866 = 12.12 \text{ kNm}$$

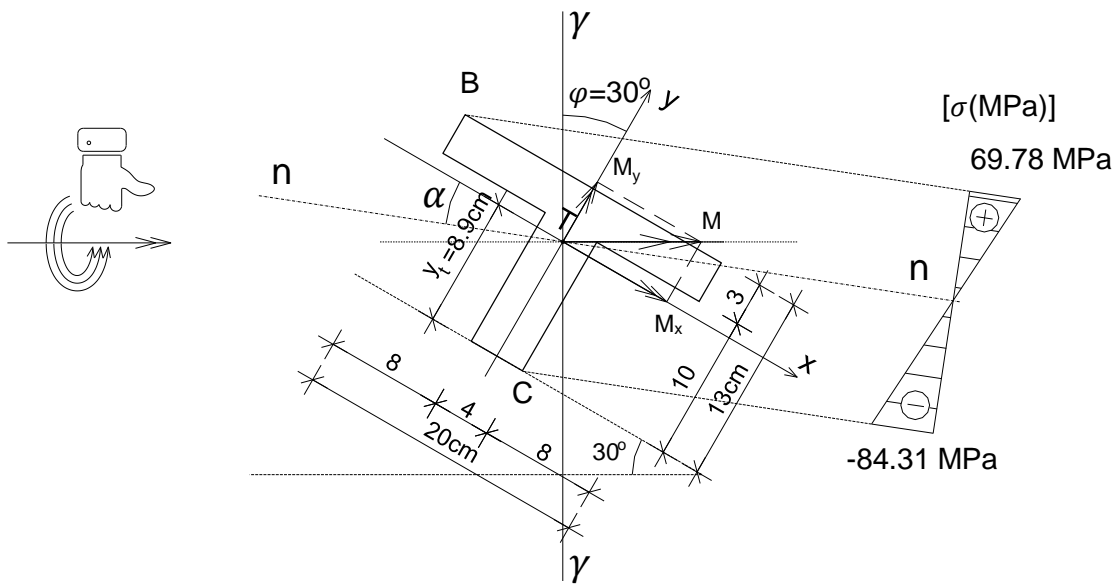
$$M_y = M_{\max} \cdot \sin \varphi = M_{\max} \cdot \sin 30^\circ = 14 \cdot 0.5 = 7 \text{ kNm}$$

Екстремни нормални напони:

$$\sigma_z = \pm \frac{M_x}{I_x} y_i \pm \frac{M_y}{I_y} x_i$$

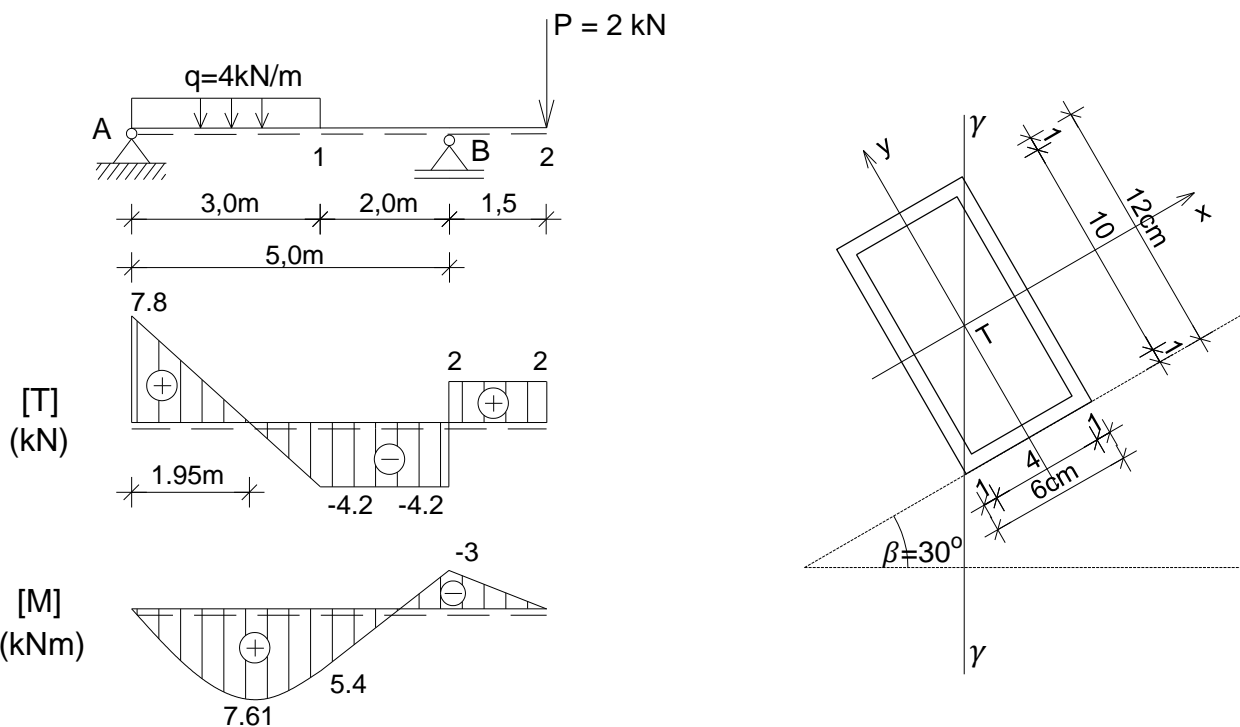
$$\sigma_{zB} = \frac{12.12 \cdot 10^{-3}}{1392 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.041 + \frac{7 \cdot 10^{-3}}{2053 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.1 = 35.69 + 34.09 = 69.78 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zC} = -\frac{12.12 \cdot 10^{-3}}{1392 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.089 - \frac{7 \cdot 10^{-3}}{2053 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.02 = -77.49 - 6.81 = -84.31 \text{ MPa}$$



4.2.Б.3 – Одређивање нормалних напона у греди при косом савијању силама

- За греду са препустом оптерећену према скици, датог попречног пресека, одредити положај n-n линије и екстремне нормалне напоне и нацртати дијаграм нормалних напона.



Аксијални моменти инерције попречног пресека:

$$I_x = \frac{6 \cdot 12^3}{12} - \frac{4 \cdot 10^3}{12} = 530 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{12 \cdot 6^3}{12} - \frac{10 \cdot 4^3}{12} = 162 \text{ cm}^4$$

Положај неутралне линије n-n:

$$\alpha = \arctan\left(-\operatorname{ctg}\varphi' \cdot \frac{I_x}{I_y}\right) = \arctan\left(-\operatorname{ctg}60^\circ \cdot \frac{530}{162}\right) = \arctan\left(-0.577 \cdot \frac{530}{162}\right)$$

$$\alpha = \arctan(-1.887) = -62.1^\circ$$

Компонентални моменти савијања:

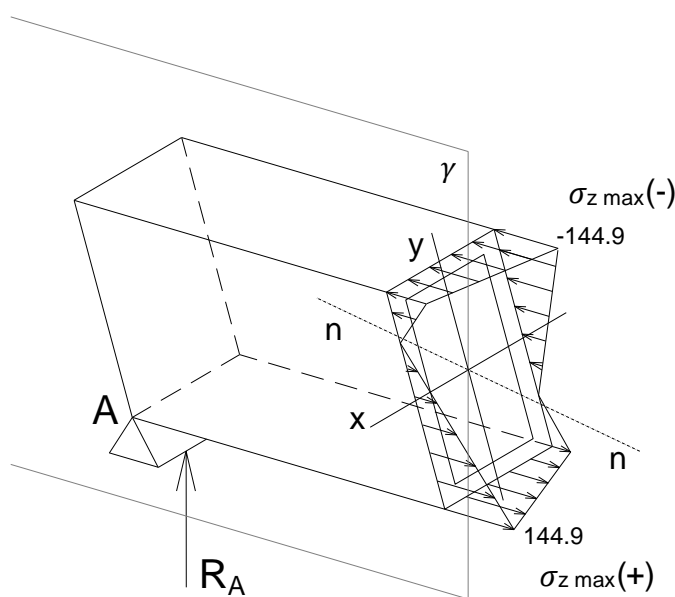
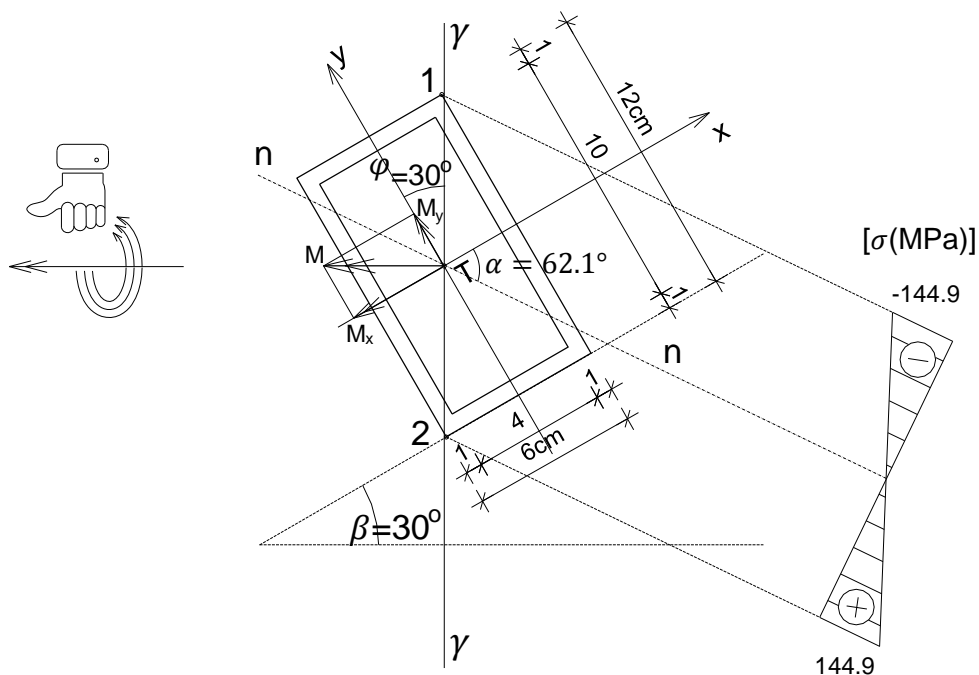
$$M_{max} = 7.61 \text{ kNm}$$

$$M_x = M \cdot \cos\varphi = M \cdot \cos 30^\circ = 7.61 \cdot 0.866 = 6.59 \text{ kNm}$$

$$M_y = M \cdot \sin\varphi = M \cdot \sin 30^\circ = 7.61 \cdot 0.5 = 3.8 \text{ kNm}$$

Екстремни нормални напони:

$$\sigma_z = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x = \pm \frac{6.59 \cdot 10^{-3}}{530 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.06 \pm \frac{3.8 \cdot 10^{-3}}{162 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.03 = \pm 74.6 \pm 70.3 = \pm 144.9 \text{ MPa}$$



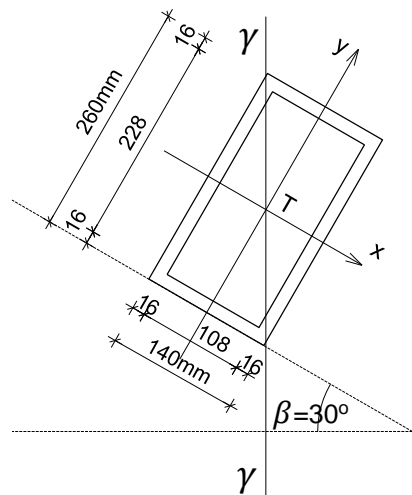
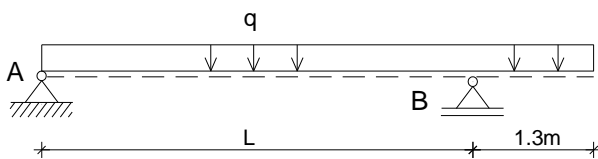
4.2.B. Вежба 4.2 (IX предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

За рожњачу оптерећењу према скици, датог попречног пресека, одредити положај n-n линије и величине нормалних напона у пресеку у пољу у коме се јављају њихове апсолутно максималне вредности и нацртати дијаграм напона. Одредити и величине нормалних напона у пресеку над непокретним лежиштем В и нацртати дијаграм напона.

$$L = (350 + \text{број индекса})/100 \text{ m}$$

$$q = (3 + \text{цифра јединица}) \text{ kN/m}$$

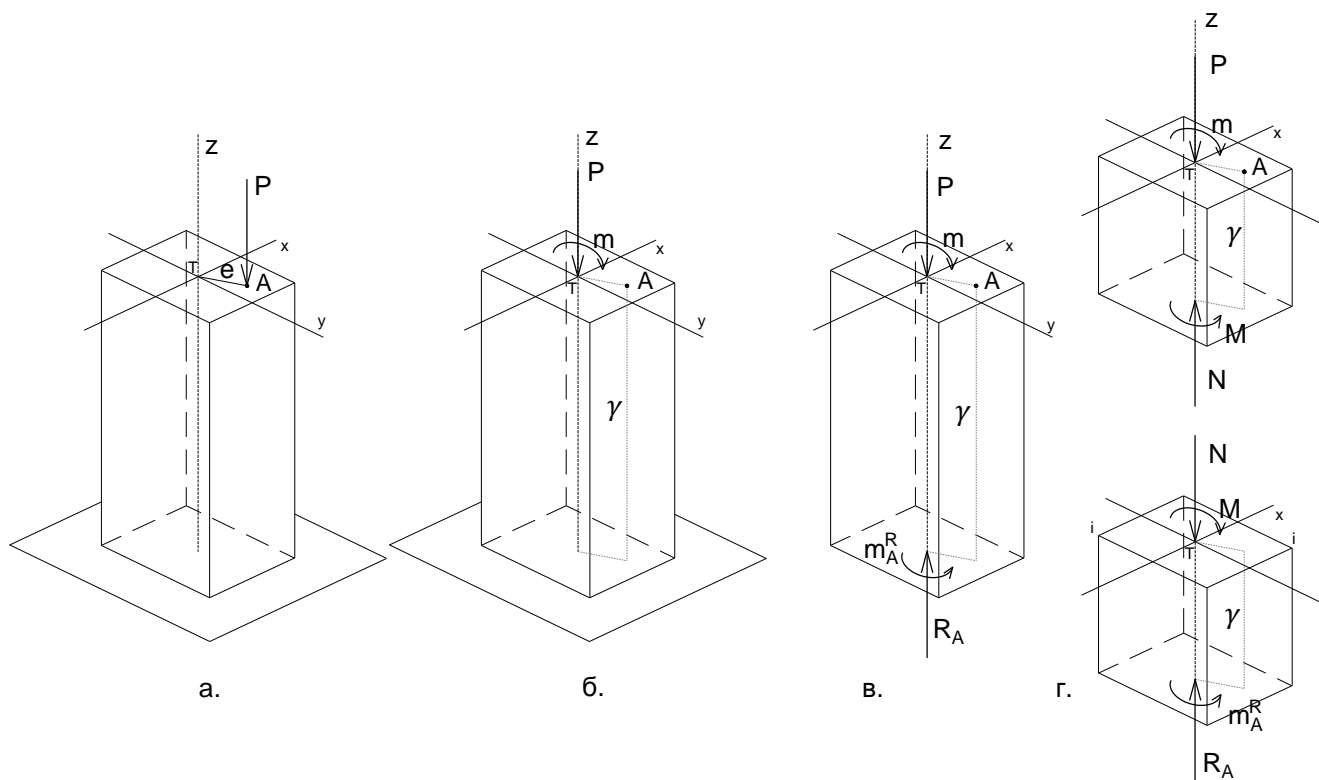


5. ЗАДАТАК 5 - ЕКСЦЕНТРИЧНО НАПРЕГНУТИ ЕЛЕМЕНТИ

На основу Анализе случаја у општим бројевима и анализе Бројних примера, решити постављени задатак у оквиру дате Вежбе.

5.А. Анализа случаја

5.А.а) **Дејство - Оптерећење** – Дат је случај носача на који делује спољна концентрисана сила P у тачки „А“ ван тежишта попречног пресека, на правцу паралелном са осом штапа (Сл. 5.А.1а). Дејство силе P у тачки „А“ је статички еквивалентно дејству силе у тежишту и момента спрега $m=P \cdot e$ који делује у равни γ која садржи осу штапа и нападну тачку силе (Сл. 5.А.1б).



Сл. 5.А.1 Ексцентрично напрегнут елемент – сила и моменат у пресеку

5.А.б) **Реакција везе - Равнотежа** – Штап је у стању статичке равнотеже захваљујући појави реакција везе³⁰, односно силе R_A и момента укљештења m_{AR} , у укљештењу А (Сл. 5.А.1в). Из услова статичке равнотеже крутог тела следи да је $R_A=P$ (занемарена је сопствена тежина штапа) и $m_{AR} = m$.

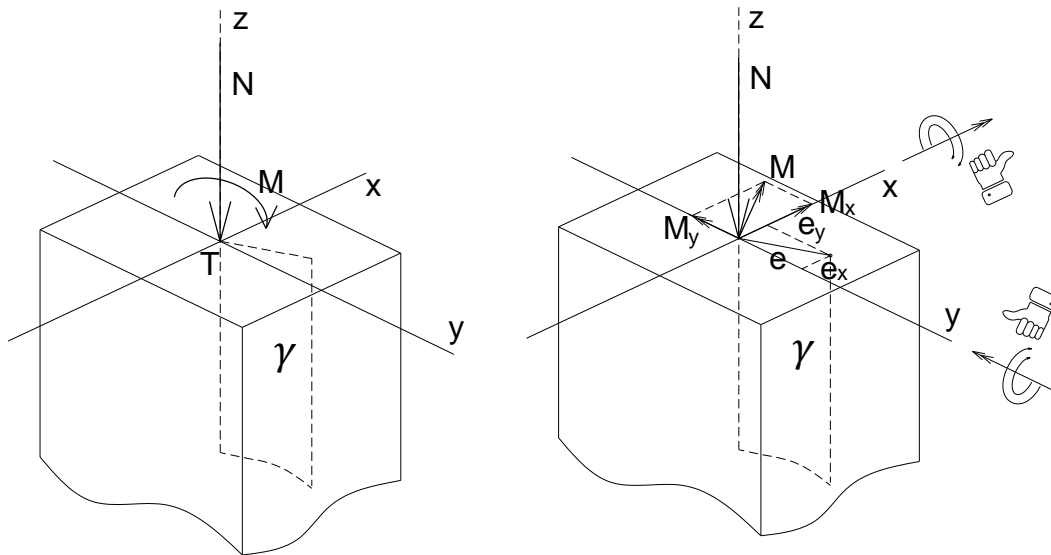
5.А.в) **Сила и моменат у пресеку штапа** – У попречним пресецима штапа управним на осу штапа $i-i$, услед дејства спољних сила на правцу осе штапа (у случају датом на слици активне P и реактивне R_A), јавља се унутрашња сила или сила у пресеку N – нормална сила (Сл. 5.А.1г). Из услова равнотеже издвојеног дела штапа следи да је нормална сила по интензитету $N = P$ или $N = R_A$. У попречним пресецима штапа управним на осу штапа $i-i$, услед дејства момента (у случају датом на слици активног m и реактивног m_{AR}), јавља се унутрашњи моменат или моменат у пресеку M – моменат савијања (Сл. 5.А.1г). Из услова равнотеже издвојеног дела штапа следи да је моменат савијања по интензитету $M = m$ или $M = m_{AR}$.

³⁰ Веза се замени реакцијама везе што омогућава да се штап анализира као слободно круто тело које је у статичкој равнотежи (Сл. 5.А.1в).

5.A.г) Распредела нормалних напона при ексцентричном напрезању

У општем случају, редукцијом силе P на тежиште попречног пресека штапа, ексцентрично напрезање се третира као комбинација аксијалног напрезања ($N=\text{const.}$) и чистог косога савијања штапа ($M=\text{const.}$ и $T=0$).

Момент савијања M разлаже се на компоненте M_x и M_y (Сл. 5.A.2).



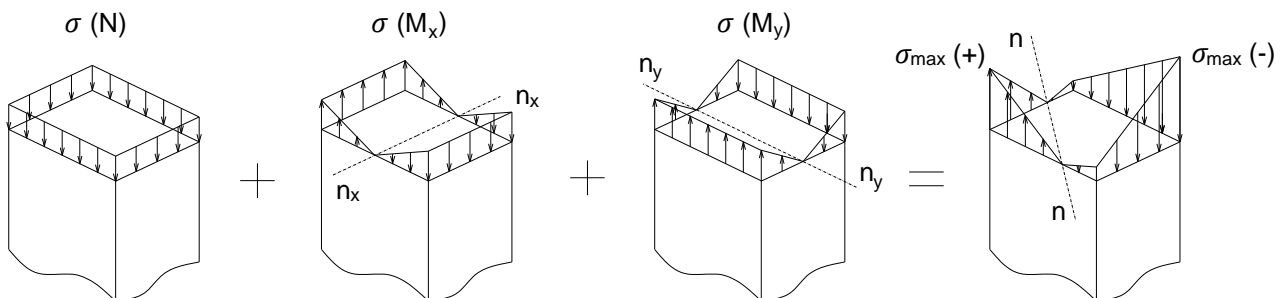
$$M_x = P \cdot e_y \quad M_y = P \cdot e_x$$

Сл. 5.A.2 Разлагање момента савијања на компоненте.

На основу принципа суперпозиције, нормални напон у посматраној тачки попречног пресека добија се као алгебарски збир нормалног напона за аксијално напрезање и нормалног напона за право савијање око X тежишне осе и нормалног напона за право савијање око Y тежишне осе (Сл. 5.A.3). Знак напона је позитиван (+) уколико је посматрана тачка изложена затезању или негативан (-) уколико је изложена притиску. Потребно је одредити екстремне вредности нормалног напона и упоредити их са дозвољеним.

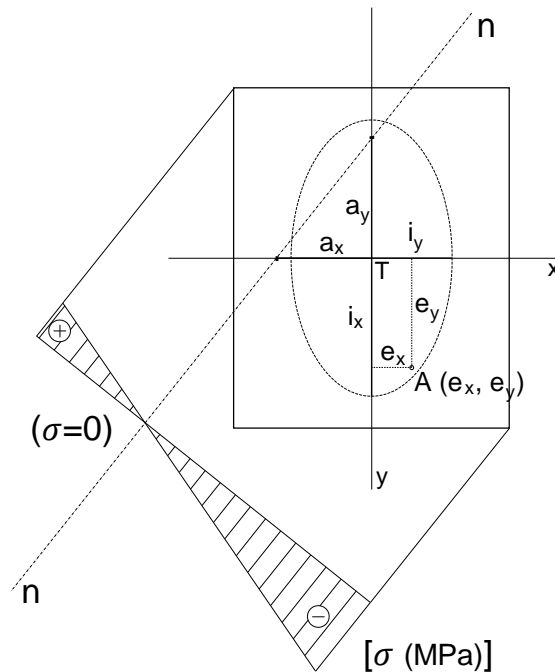
$$\sigma_z = \pm \sigma_z^N \pm \sigma_z^{M_x} \pm \sigma_z^{M_y}$$

$$\sigma_z = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x \quad \sigma_{z_{max}} \leq \sigma_{doz}$$



Сл. 5.A.3 Распредела нормалних напона при ексцентричном напрезању.

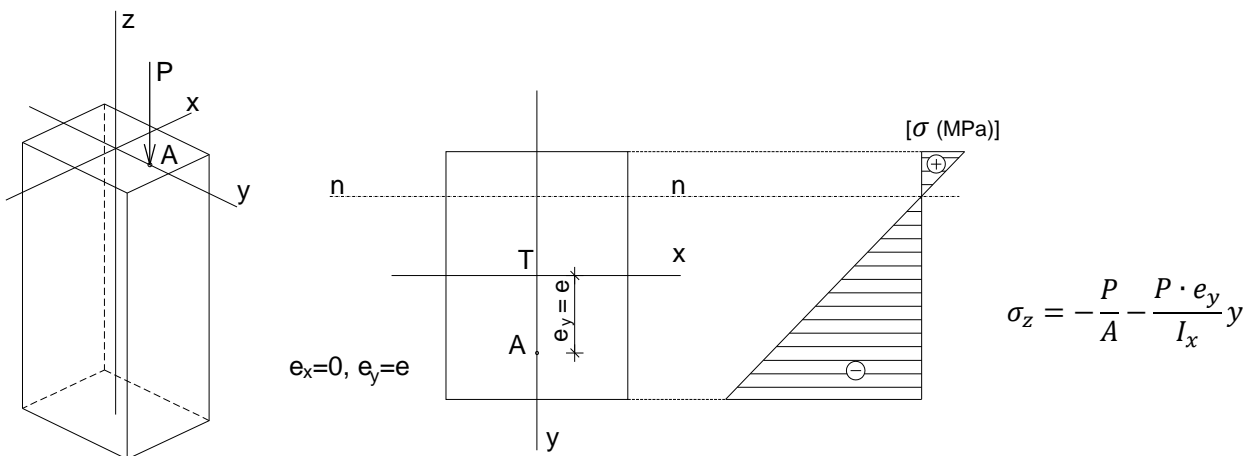
Нормални напони су пропорционални удаљењима посматраних тачака од неутралне линије n-n (Сл. 5.A.4). Екстремне вредности нормалних напона јављају се у тачкама пресека које су најудаљеније од неутралне линије. Неутрална линија не пролази кроз тежиште попречног пресека, већ пресеца правце тежишних (главних) оса инерције на удаљењима a_x и a_y . Положај неутралне линије n-n се код ексцентричног напрезања одређује на основу датих израза у којима су e_x и e_y координате нападне тачке силе P, а i_x и i_y полупречници елипсе инерције³¹. Неутрална линија пролази кроз супротан квадрант од оног у коме се налази нападна тачка силе P.



Сл. 5.A.4 Положај неутралне линије n-n при ексцентричном напрезању и дијаграм нормалних напона.

$$a_x = -\frac{i_y^2}{e_x} \quad a_y = -\frac{i_x^2}{e_y} \quad i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad i_x^2 = \frac{I_x}{A} \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

Уколико се нападна тачка силе налази на X оси, неутрална линија n-n је права паралелна са Y осом. Уколико се нападна тачка силе налази на Y оси, неутрална линија је права паралелна са X осом (Сл. 5.A.5).



Сл. 5.A.5 Дијаграм нормалних напона за случај нападне тачке силе на Y тежишној оси.

³¹ Елипса инерције графички представља промену момента инерције, од минималног до максималног.

5.Б. Бројни примери

5.Б.1 – Одређивање нормалних напона у ексцентрично притиснутом штапу

- На стуб дат скицом делује сила притиска $P=350\text{kN}$ у тачки А. Одредити положај неутралне линије n-n и екстремне вредности нормалног напона и нацртати дијаграм нормалних напона. $\sigma_{\text{doz}}=12\text{MPa}$

Површина попречног пресека:

$$A = 30 \cdot 60 = 1800\text{cm}^2$$

Аксијални моменти инерције попречног пресека:

$$I_x = \frac{30 \cdot 60^3}{12} = 540000\text{cm}^4 = 0.0054\text{m}^4$$

$$I_y = \frac{60 \cdot 30^3}{12} = 135000\text{cm}^4 = 0.00135\text{m}^4$$

Полупречници елипсе инерције:

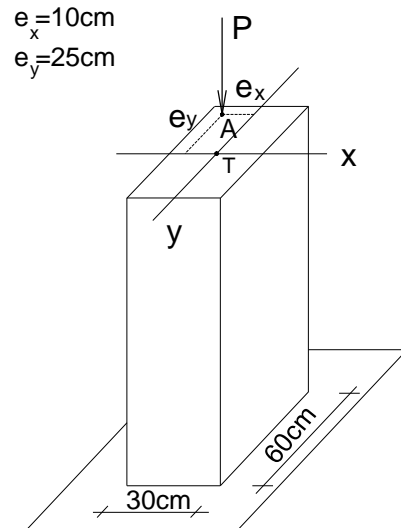
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{540000}{1800}} = 17.32\text{cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{135000}{1800}} = 8.66\text{cm}$$

Одсечци n-n линије:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{e_x} = -\frac{8.66^2}{10} = -7.5\text{cm}$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{e_y} = -\frac{17.32^2}{-25} = 12\text{cm}$$



Компонентални моменти:

$$M_x = P \cdot e_y = 350 \cdot 0.25 = 87.5\text{kNm}$$

$$M_y = P \cdot e_x = 350 \cdot 0.10 = 35\text{kNm}$$

Максимални нормални напони:

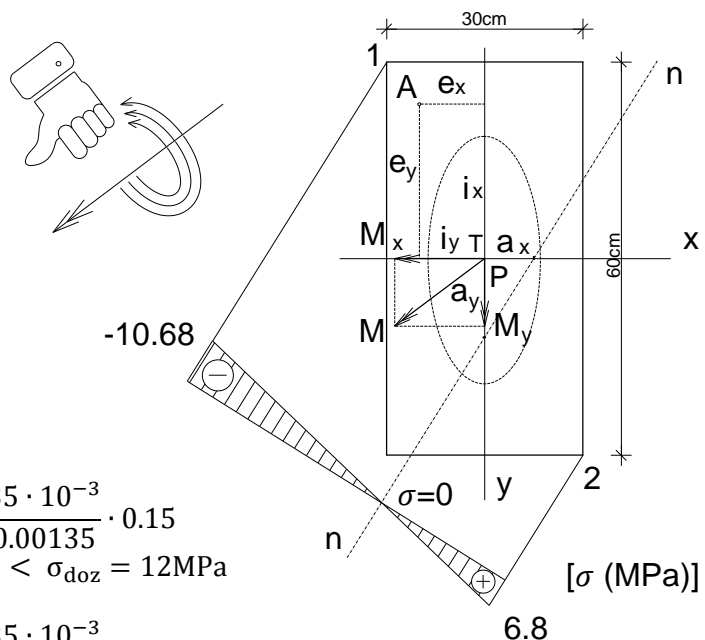
$$\sigma_z = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x$$

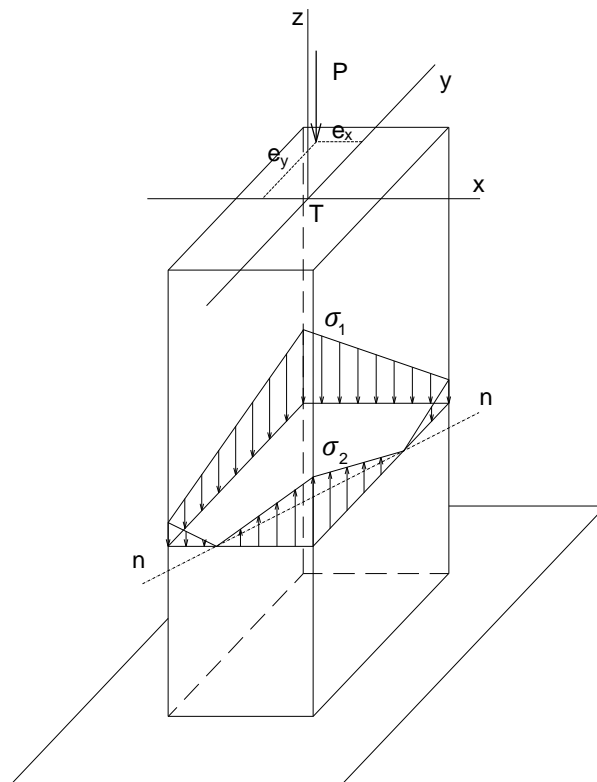
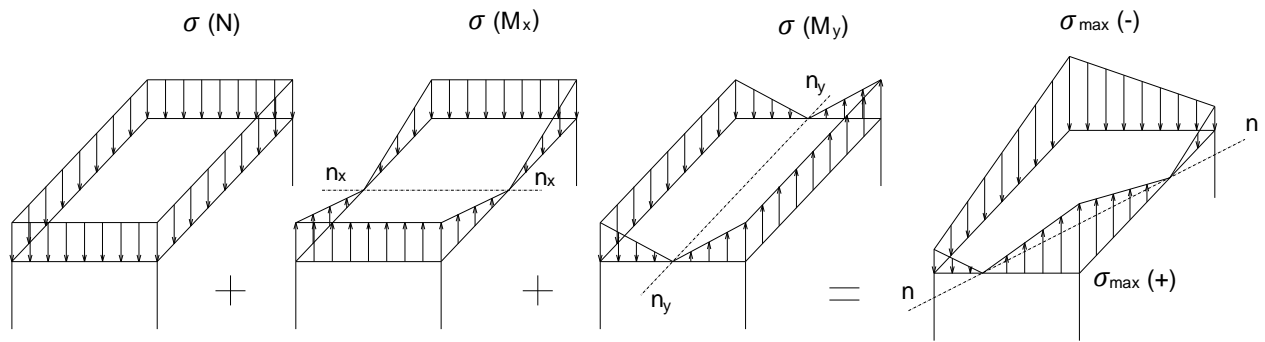
$$\sigma_{z1} = -\frac{350 \cdot 10^{-3}}{1800 \cdot 10^{-4}} - \frac{87.5 \cdot 10^{-3}}{0.0054} \cdot 0.3 - \frac{35 \cdot 10^{-3}}{0.00135} \cdot 0.15$$

$$\sigma_{z1} = -1.94 - 4.86 - 3.88 = -10.69\text{MPa} < \sigma_{\text{doz}} = 12\text{MPa}$$

$$\sigma_{z2} = -\frac{350 \cdot 10^{-3}}{1800 \cdot 10^{-4}} + \frac{87.5 \cdot 10^{-3}}{0.0054} \cdot 0.3 + \frac{35 \cdot 10^{-3}}{0.00135} \cdot 0.15$$

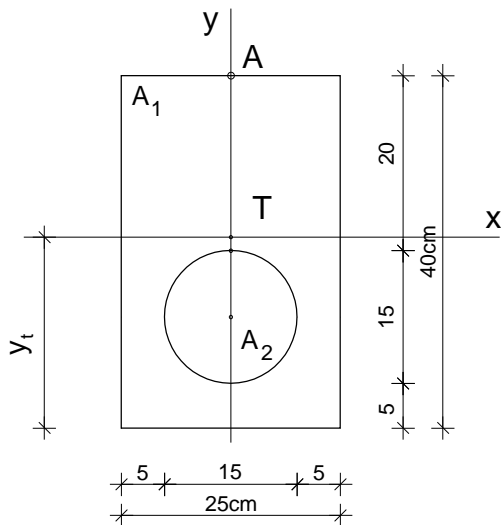
$$\sigma_{z2} = -1.94 + 4.86 + 3.88 = 6.8\text{MPa} < \sigma_{\text{doz}} = 12\text{MPa}$$





5.Б.2 – Одређивање нормалних напона у ексцентрично притиснутом штапу

- На стуб попречног пресека датог скицом делује сила притиска $P=250\text{kN}$ у тачки А. Одредити положај неутралне линије n-n и максималне вредности нормалног напона и нацртати дијаграм нормалних напона. $\sigma_{\text{doz}}=12\text{MPa}$



Површина попречног пресека:

$$A_1 = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1\text{m}^2$$

$$A_2 = 0.075^2 \cdot 3.14 = 0.01766\text{m}^2$$

$$A = A_1 - A_2 = 0.0823\text{m}^2$$

Положај тежишта попречног пресека:

$$y_t = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A} = \frac{0.1 \cdot 0.2 - 0.01766 \cdot 0.125}{0.0823} = 0.216\text{cm}$$

Аксијални моменти инерције попречног пресека:

$$I_x = \frac{0.25 \cdot 0.4^3}{12} + 0.1 \cdot 0.016^2 - \left(\frac{0.075^4 \cdot 3.14}{4} + 0.01766 \cdot 0.091^2 \right) = 0.001184\text{m}^4$$

$$I_y = \frac{0.4 \cdot 0.25^3}{12} - \frac{0.075^4 \cdot 3.14}{4} = 0.000496\text{m}^4$$

Полупречници елипсе инерције:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{0.001184}{0.0823} = 0.01432\text{m}^2$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{0.000496}{0.0823} = 0.006026\text{m}^2$$

Одсечци n-n линије:

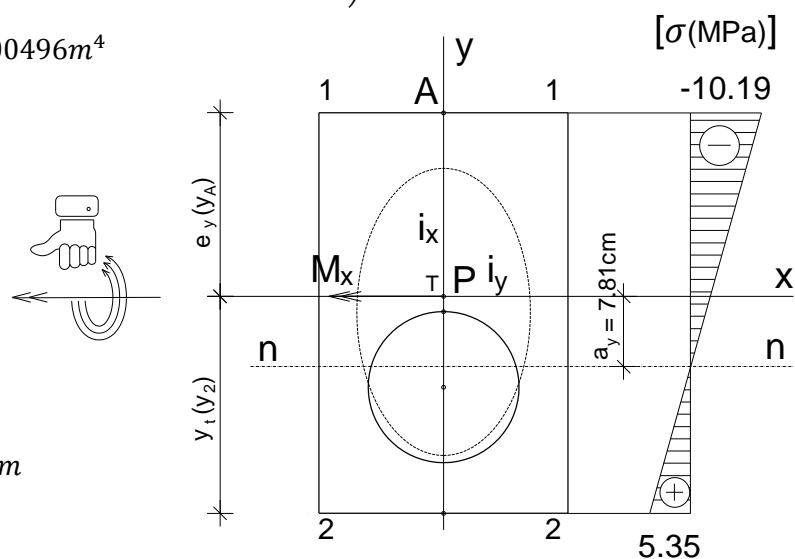
$$a_x = -\frac{i_y^2}{e_x} = -\frac{0.006026^2}{0} = -\infty$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{e_y} = -\frac{0.01438^2}{0.184} = -0.07818\text{m}$$

Компонентални моменти:

$$M_x = P \cdot e_y = 250 \cdot 0.184 = 46\text{kNm}$$

$$M_y = P \cdot e_x = 250 \cdot 0 = 0$$



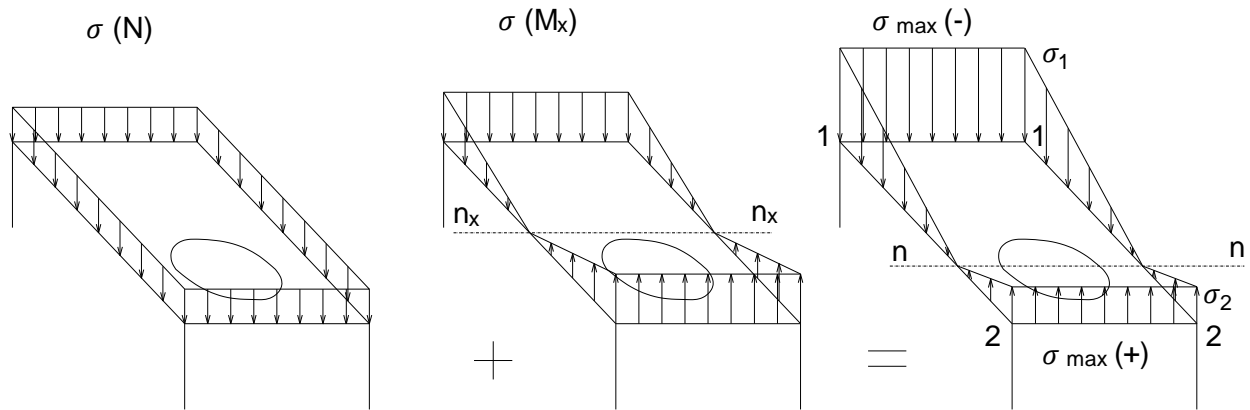
Максимални нормални напони:

$$\sigma_{z1-1} = -\frac{P}{A} - \frac{M_x}{I_x} \cdot y_1 = -\frac{250 \cdot 10^{-3}}{0.0823} - \frac{46 \cdot 10^{-3}}{0.001184} \cdot 0.184$$

$$\sigma_{z1-1} = -3.04 - 7.15 = -10.19 \text{ MPa} < \sigma_{\text{doz}} = 12 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{z2-2} = -\frac{P}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_2 = -\frac{250 \cdot 10^{-3}}{0.0823} + \frac{46 \cdot 10^{-3}}{0.001184} \cdot 0.216$$

$$\sigma_{z2-2} = -3.04 + 8.39 = 5.35 \text{ MPa} < \sigma_{\text{doz}} = 12 \text{ MPa}$$



5.Б.3 – Одређивање нормалних напона у ексцентрично притиснутом штапу

- На стуб дат скицом делује сила притиска $P=650\text{kN}$ у тачки А. Одредити положај неутралне линије n-n и екстремне вредности нормалног напона и нацртати дијаграм нормалних напона. $\sigma_{\text{doz}}=160\text{MPa}$

Површина попречног пресека:

$$A = 60 \cdot 35 - 2 \cdot 15 \cdot 50 = 600 \text{ cm}^2$$

Аксијални моменти инерције:

$$I_x = 2 \cdot \frac{5 \cdot 35^3}{12} + \frac{50 \cdot 5^3}{12} = 36250 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{35 \cdot 60^3}{12} - 2 \cdot \frac{15 \cdot 50^3}{12} = 317500 \text{ cm}^4$$

Полупречници елипсе инерције:

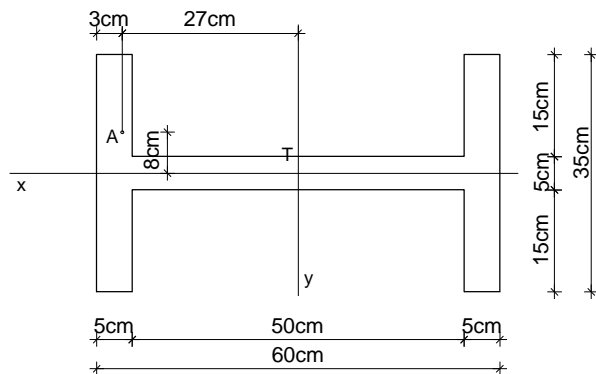
$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{36250}{600}} = 7.773 \text{ cm} \quad i_x^2 = 60.42 \text{ cm}^2$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{317500}{600}} = 23 \text{ cm} \quad i_y^2 = 529.17 \text{ cm}^2$$

Одсечци n-n линије:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{e_x} = -\frac{529.17}{27} = -19.60 \text{ cm}$$

$$a_y = -\frac{i_x^2}{e_y} = -\frac{60.42}{-8} = 7.55 \text{ cm}$$



Компонентални моменти:

$$M_x = P \cdot e_y = 650 \cdot 0.08 = 52 \text{ kNm}$$

$$M_y = P \cdot e_x = 650 \cdot 0.27 = 175.5 \text{ kNm}$$

Максимални нормални напони:

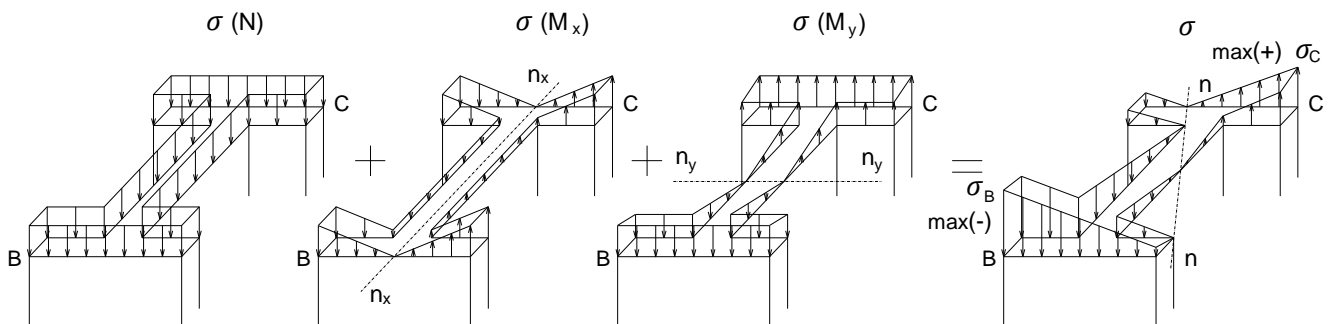
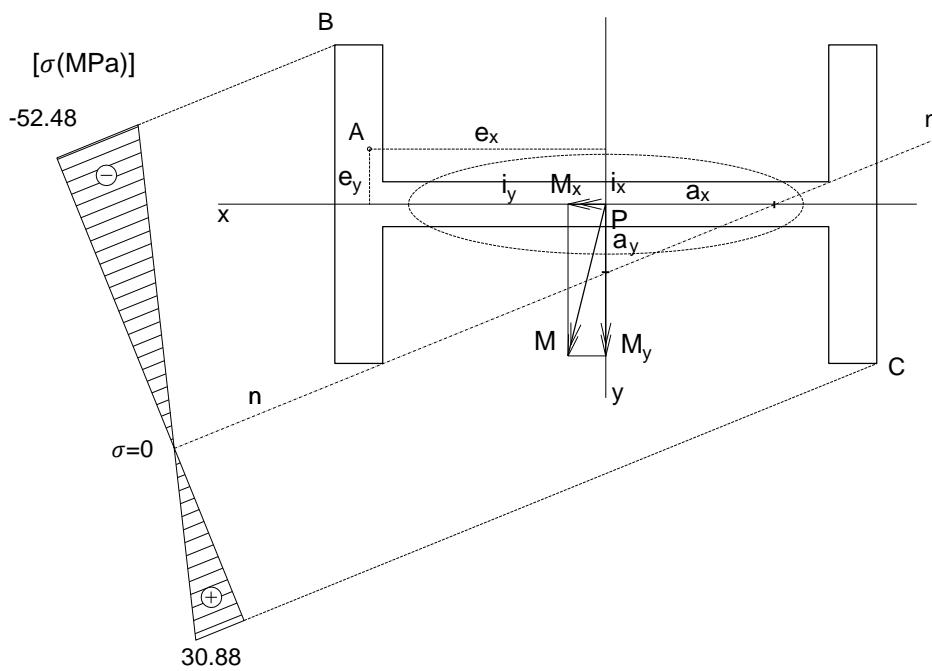
$$\sigma_z = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x$$

$$\sigma_{zB} = -\frac{650 \cdot 10^{-3}}{600 \cdot 10^{-4}} - \frac{52 \cdot 10^{-3}}{36250 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.175 - \frac{175.5 \cdot 10^{-3}}{317500 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.30$$

$$\sigma_{zB} = -10.8 - 25.1 - 16.6 = -52.48 \text{ MPa} < \sigma_{\text{doz}} = 160 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zC} = -\frac{650 \cdot 10^{-3}}{600 \cdot 10^{-4}} + \frac{52 \cdot 10^{-3}}{36250 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.175 + \frac{175.5 \cdot 10^{-3}}{317500 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.30$$

$$\sigma_{zC} = -10.8 + 25.1 + 16.6 = 30.88 \text{ MPa} < \sigma_{\text{doz}} = 160 \text{ MPa}$$



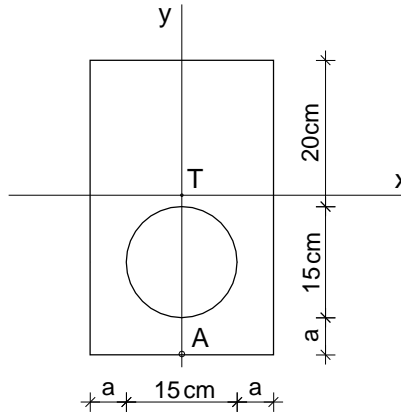
5.B. Вежба 5 (X предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

На стуб задатог попречног пресека делује сила притиска P у тачки A . Одредити положај неутралне линије $n-n$, интензитет нормалних напона у тачкама у којима напони достижу максималне вредности и нацртати њихов дијаграм.

$$P = (200 + \text{цифра јединица}) \text{ kN}$$

$$a = (6 + \text{цифра десетица}) \text{ cm}$$

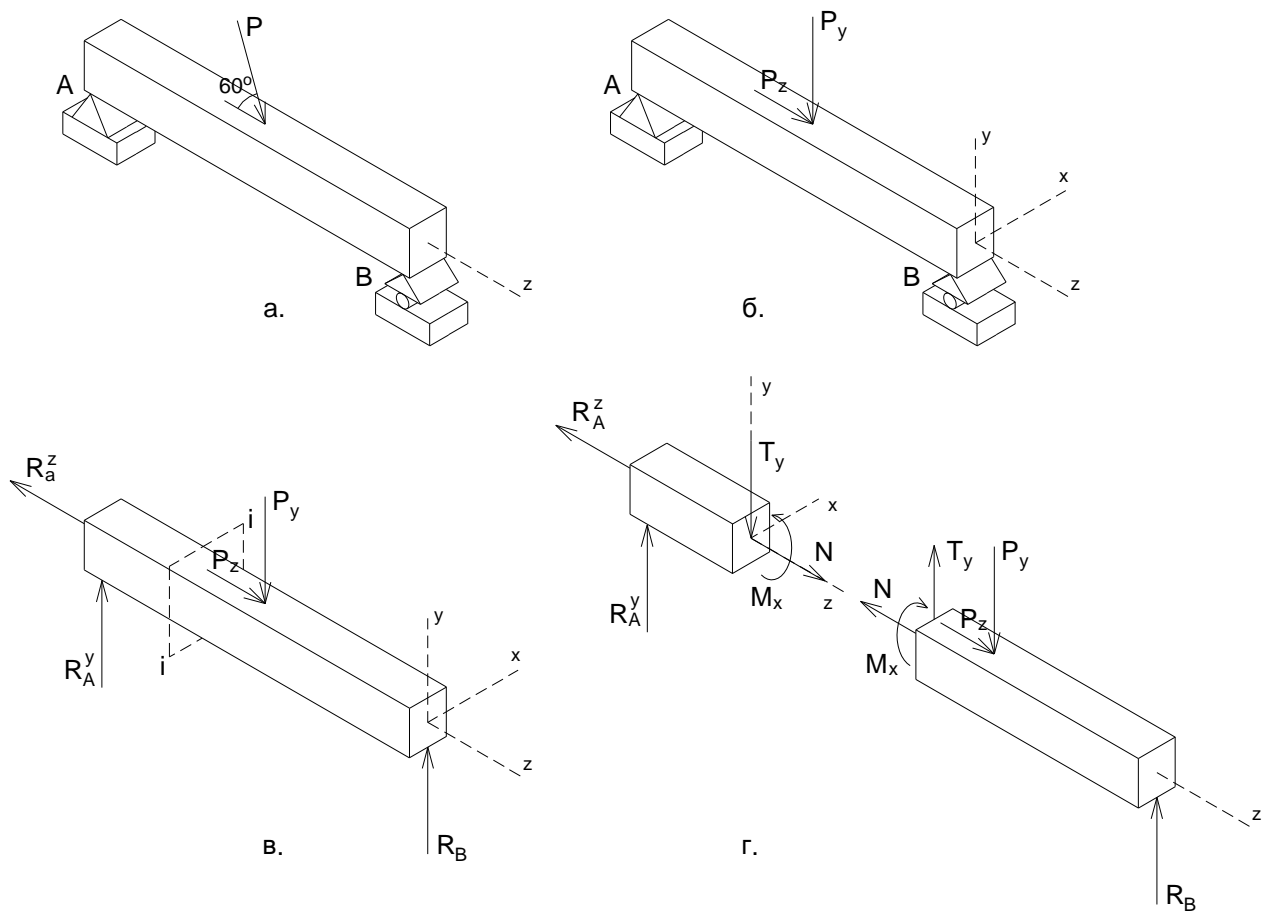


6. ЗАДАТАК 6 - КОМБИНОВАНО НАПРЕГНУТИ ЕЛЕМЕНТИ – аксијално напрезање и право савијање силама

На основу Анализе случаја у општим бројевима и анализе Бројних примера, решити постављени задатак у оквиру дате Вежбе.

6.А. Анализа случаја

6.А.а) **Дејство - Оптерећење** – Дат је случај носача на који делује спољна концентрисана сила P на правцу под оштрим углом у односу на осу штапа (Сл. 6.А.1а). Дејство силе P под оштрим углом је статички еквивалентно дејству њених компоненти P_x и P_y (разлагање силе) (Сл. 6.А.1б).



Сл. 6.А.1 Комбиновано напрегнут елемент – силе и моменат у пресеку.

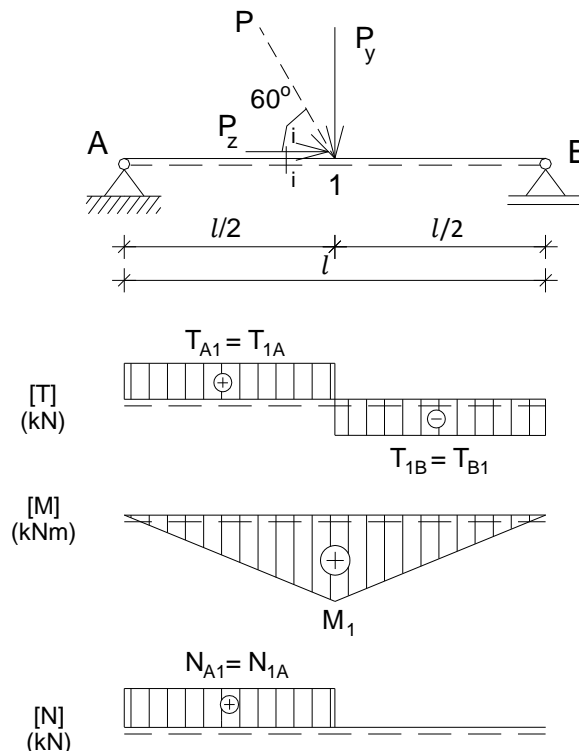
6.А.б) **Реакције веза - Равнотежа** – Штап датог носача је у стању статичке равнотеже захваљујући појави реакција веза, односно сила R_{Az} и R_{Ay} у непокретном лежишту А и силе R_B у покретном лежишту В (Сл. 6.А.1в). Реакције веза се добијају из услова статичке равнотеже круте плоче у равни YZ , када сво оптерећење лежи у равни плоче.

6.А.в) **Силе и моменат у пресеку штапа** - У попречном пресеку штапа управном на осу штапа $i-i$, услед дејства спољних сила на правцу његове осе (у случају датом на слици активне P_x и реактивне R_{Ax}), јавља се унутрашња сила или сила у пресеку N – нормална сила (Сл. 6.А.1г). Сила N у пресеку се добија из услова да сума свих сила по Z оси за издвојени део штапа буде једнака нули $\sum Z=0$.

У попречном пресеку штапа управном на осу штапа $i-i$, услед дејства спољних сила на правцима управним на осу штапа (у случају датом на слици активне P_y и реактивних R_{Ay} и R_B), јавља се унутрашња сила или сила у пресеку T_y – трансверзала сила (Сл. 6.А.1г). Сила T_y у пресеку штапа се добија из услова да сума свих сила по Y оси за издвојени део штапа буде једнака нули $\sum Y=0$.

У попречном пресеку штапа управном на осу штапа $i-i$, услед дејства момената спољних сила, јавља се унутрашњи моменат или моменат у пресеку M_x – моменат савијања (Сл. 6.А.1г). Моменат савијања M_x у пресеку се добија из услова да сума свих момената за издвојени део штапа буде једнака нули $\sum M_x=0$.

За анализирани пример дати су дијаграми трансверзалних сила T_y , момената савијања M_x и нормалних сила N (Сл. 6.А.2).



Сл. 6.А.2 Дијаграм трансверзалних и нормалних сила и момената савијања.

6.А.г) Расподела нормалних напона при комбинованом напрезању - аксијалном напрезању и правом савијању силама

У општем случају, уколико се попречном пресеку штапа јавља трансверзална сила T_y , моменат савијања M_x и нормална сила N (као у пресеку $i-i$ означеном на слици) (Сл. 6.А.2), напрезање штапа се третира као комбинација два основна напрезања - аксијалног напрезања и савијања око X тежишне осе.

На основу принципа суперпозиције, нормални напон у посматраној тачки попречног пресека добија се као алгебарски збир нормалног напона за аксијално напрезање и нормалног напона за савијање око X тежишне осе. Знак напона је позитиван (+) уколико је посматрана тачка изложена затезању или негативан (-) уколико је изложена притиску. Потребно је одредити

максималне вредности нормалних напона који се јављају у критичном попречном пресеку³², у тачкама најудаљенијим од n-n линије, и упоредити их са дозвољеним.

$$\sigma_z = \sigma_z^{(N)} + \sigma_z^{(M_x)} = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \quad \sigma_{z_{max}} \leq \sigma_{doz}$$

Положај неутралне линије n-n, која је паралелна са X тежишном осом, добија се на основу датог израза за њен одсечак на Y оси (за $\sigma=0$):

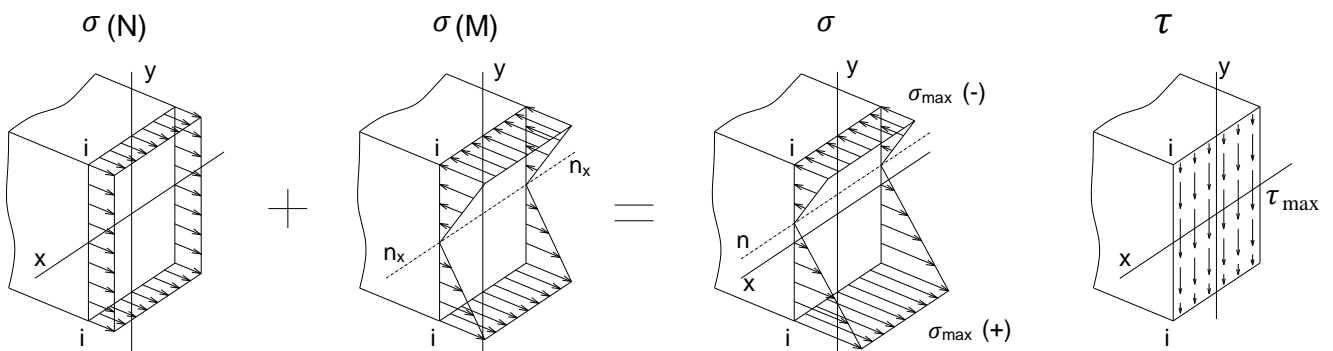
$$y_n = - \frac{N}{M_x} \frac{I_x}{A}$$

У већини практичних случајева утицај нормалне силе на нормалне напоне је знатно мањи од утицаја момента савијања, па се при димензионисању може занемарити. У том случају, усвајају се нешто веће вредности потребних димензија попречног пресека, а затим се врши контрола напона.

Тангенцијални напон у тачки попречног пресека штапа добија се на основу датог израза:

$$\tau_{zy} = \frac{T_y \cdot S_x}{b \cdot I_x}$$

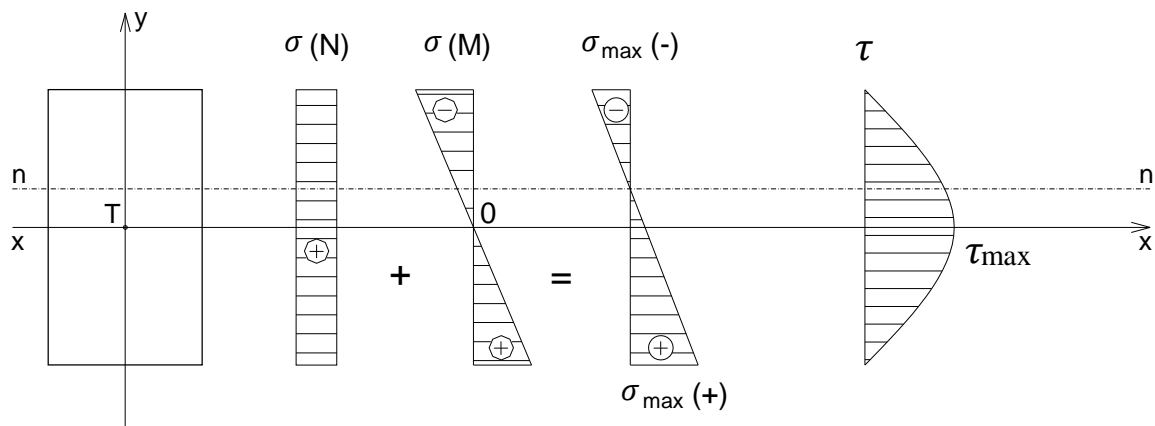
На слици је приказана расподела појединачних и укупних нормалних напона и расподела тангенцијалних напона за анализирани случај (Сл. 6.A.3).



Сл. 6.A.3 Расподела нормалних и тангенцијалних напона при комбинованом напрезању - аксијалном напрезању и правом савијању силама.

³² Уколико се максималне вредности нормалне силе и момента савијања не јављају у истом попречном пресеку штапа, онда се мора вршити контрола за два пресека и то за пресек где се јавља екстремни момент савијања са одговарајућом нормалном силом и пресек где се јавља екстремна нормална сила са одговарајућим моментом савијања.

На слици су дати дијаграми појединачних и укупних нормалних напона и дијаграм тангенцијалних напона за анализирани случај (Сл. 6.А.4).



Сл. 6.А.4 Дијаграми нормалних и тангенцијалних напона при комбинованом напрезању - аксијалном напрезању и правом савијању силама.

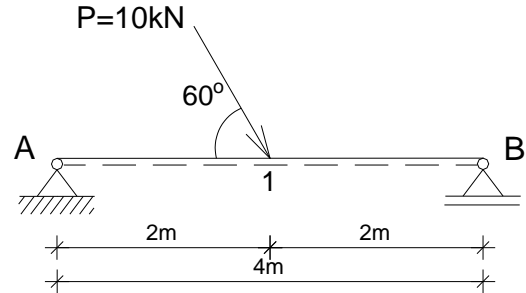
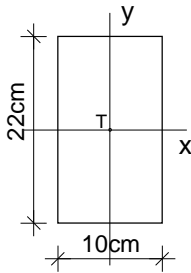
При контроли деформације, у анализираном случају врши се контрола угиба као и код носача изложених савијању (обрађено у претходним поглављима).

Исти поступак важи за савијање око Y тежишне осе.

6.Б. Бројни примери

6.Б.1 – Одређивање нормалних, тангенцијалних напона и угиба греде при аксијалном напрезању и правом савијању силама

- За дрвену просту греду оптерећену према скици, датог попречног пресека, одредити реакције веза и пресечне силе у карактеристичним пресецима и нацртати дијаграме пресечних сила. Одредити максималне нормалне и тангенцијалне напоне и максимални угиб и упоредити их са дозвољеним. $\sigma_{doz}=11\text{MPa}$, $\tau_{doz}=0.9\text{MPa}$, $E=10\text{GPa}$, $v_{doz}=l/300$



Разлагање силе на компоненте:

$$P_z = P \cdot \cos\alpha = 10 \cdot 0.5 = 5\text{kN}$$

$$P_y = P \cdot \sin\alpha = 10 \cdot 0.866 = 8.66\text{kN}$$

Реакције веза:

$$R_A^z = P_z = 5\text{kN}$$

$$R_A^y = R_B^y = \frac{P_y}{2} = \frac{8.66}{2} = 4.33\text{kN}$$

Трансверзалне силе у пресецима штапа:

$$T_{A1} = T_{1A} = R_A^y = 4.33\text{kN}$$

$$T_{1B} = T_{B1} = -R_B^y = -4.33\text{kN}$$

Моменти савијања у пресецима штапа:

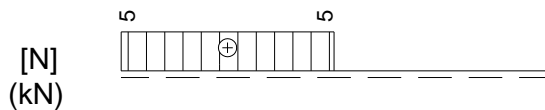
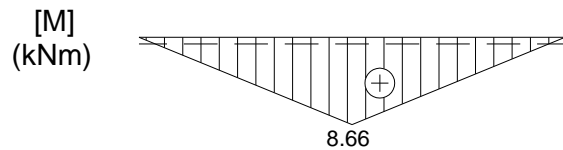
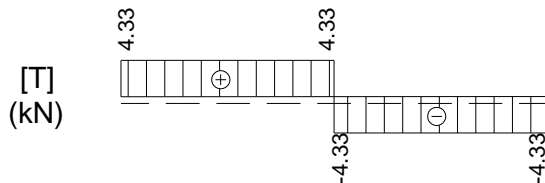
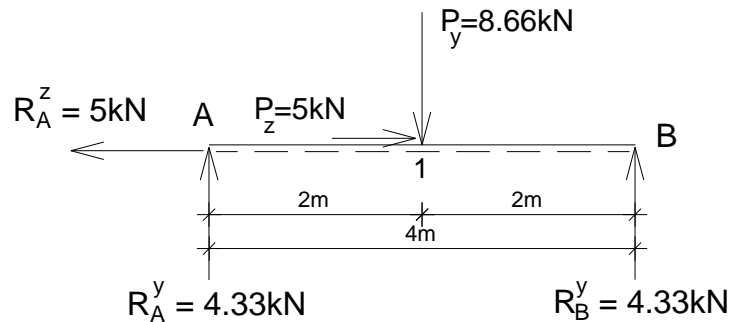
$$M_A = M_B = 0$$

$$M_{max} = R_A^y \cdot 2.0 = 4.33 \cdot 2.0 = 8.66\text{kNm}$$

Нормалне силе у пресецима штапа:

$$N_{A1} = N_{1A} = R_A^z = 5\text{kN}$$

$$N_{1B} = N_{B1} = 0$$



Површина попречног пресека и аксијални момент инерције:

$$A = 0.1 \cdot 0.22 = 0.022\text{m}^2 \quad I_x = \frac{0.1 \cdot 0.22^3}{12} = 8.87 \cdot 10^{-5}\text{m}^4$$

Положај n-n линије:

$$y_n = -\frac{N}{M_x} \cdot \frac{I_x}{A} = -\frac{5 \cdot 10^3}{8.66 \cdot 10^3} \cdot \frac{8.87 \cdot 10^{-5}}{0.022} = -0.00232\text{m} = -0.232\text{cm}$$

Максимални нормални напони:

$$\sigma_{z \max(+)} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0.022} + \frac{8.66 \cdot 10^{-3}}{8.87 \cdot 10^{-5}} \cdot 0.11$$

$$\sigma_{z \max(+)} = 0.227 + 10.73 = 10.96 \text{MPa} < \sigma_{z \text{ doz}} = 11 \text{MPa}$$

$$\sigma_{z \max(-)} = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{I_x} \cdot y_A = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0.022} - \frac{8.66 \cdot 10^{-3}}{8.87 \cdot 10^{-5}} \cdot 0.11$$

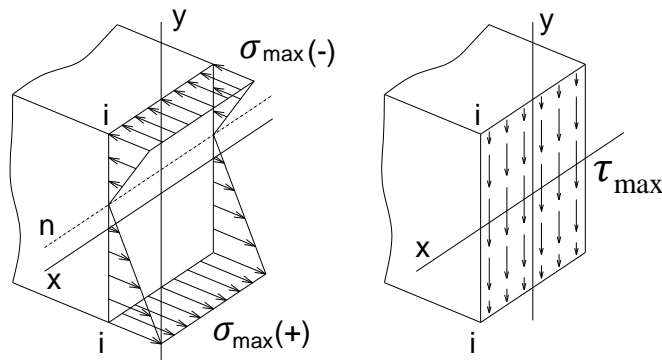
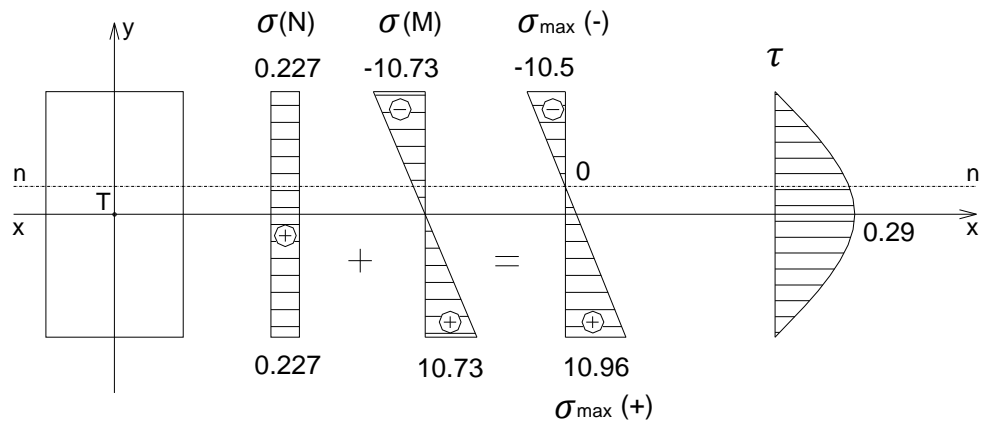
$$\sigma_{z \max(-)} = 0.227 - 10.73 = -10.5 \text{MPa} < \sigma_{z \text{ doz}} = 11 \text{MPa}$$

Максимални тангенцијални напони:

$$\tau_{\max} = 1.5 \frac{T}{A} = 1.5 \cdot \frac{4.33 \cdot 10^{-3}}{0.022} = 0.29 \text{MPa} < \tau_{\text{ doz}} = 0.9 \text{MPa}$$

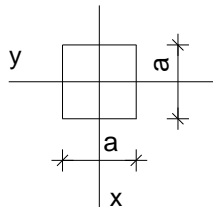
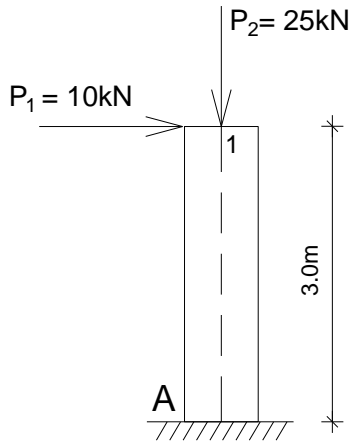
Угиб:

$$v = \frac{P_y \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_x} = \frac{8.66 \cdot 10^3 \cdot 4.0^3}{48 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 8.87 \cdot 10^{-5}} = 0.013 \text{m} = 1.3 \text{cm} < v_{\text{ doz}} = \frac{L}{300} = \frac{400}{300} = 1.33 \text{cm}$$



6.Б.2 – Димензионисање штапа напрегнутог на аксијално напрезање и право савијање силама

- За дрвени стуб оптерећен према скици одредити реакције везе и пресечне силе у карактеристичним пресецима и нацртати дијаграме пресечних сила (занемарити сопствену тежину). Димензионисати стуб квадратног попречног пресека и за усвојене димензије извршити контролу нормалних и тангенцијалних напона и хоризонталног померања врха стуба. Нацртати дијаграме нормалних и тангенцијалних напона. $\sigma_{doz}=10\text{MPa}$, $\tau_{doz}=0.9\text{MPa}$, $\nu_{doz}=1/150$, $E=10\text{GPa}$



Реакције везе:

$$R_A^y = P_1 = 10\text{kN}$$

$$R_A^z = P_2 = 25\text{kN}$$

$$m_A^R = P_1 \cdot 3.0 = 10 \cdot 3.0 = 30\text{kNm}$$

Трансверзалне силе:

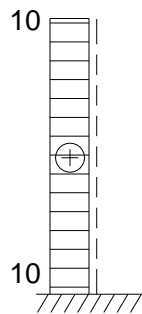
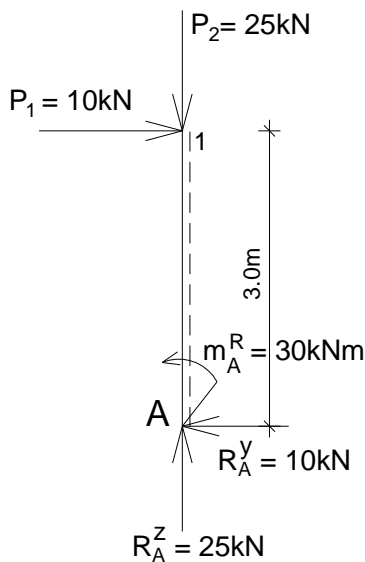
$$T_{A1} = T_{1A} = P_1 = 10\text{kN}$$

Моменти савијања:

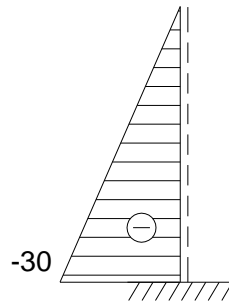
$$M_A = -P_1 \cdot 3.0 = -30\text{kNm}$$

Нормалне силе:

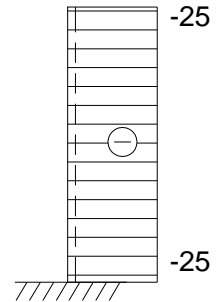
$$N_{A1} = N_{1A} = -R_A^z = -25\text{kN}$$



[T]
(kN)



[M]
(kNm)



[N]
(kN)

У првој итерацији димензионисања може се занемарити утицај нормалне силе N:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_{pot}} \rightarrow W_{pot} = \frac{M_x}{\sigma_{doz}} = \frac{30 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6} = 3 \cdot 10^{-3} \text{m}^3$$

$$W = \frac{a^3}{6} \rightarrow a = \sqrt[3]{6W_{pot}} = \sqrt[3]{6 \cdot 3 \cdot 10^{-3}} = 0.262\text{m} = 26.2\text{cm}$$

$$a_{usv} = 28\text{cm}$$

Површина усвојеног попречног пресека, аксијални и отпорни момент инерције:

$$A = a^2 = 0.28^2 = 0.0784 m^2$$

$$I_x = \frac{a^4}{12} = \frac{0.28^4}{12} = 5.12 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$W_{usv} = \frac{a^3}{6} = \frac{0.28^3}{6} = 3.658 \cdot 10^{-3}$$

Положај n-n линије:

$$y_n = -\frac{N}{M_x} \cdot \frac{I_x}{A} = -\frac{25 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^3} \cdot \frac{5.12 \cdot 10^{-4}}{0.0784} = -0.0054 m = -0.54 cm$$

Максимални нормални напони:

$$\sigma_{z \max(+)} = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} = -\frac{25 \cdot 10^3}{0.0784} + \frac{30 \cdot 10^3}{3.658 \cdot 10^{-3}}$$

$$\sigma_{z \max(+)} = -0.318 + 8.2 = 7.88 MPa < \sigma_{z \text{ doz}} = 10 MP$$

$$\sigma_{z \max(-)} = -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} = -\frac{25 \cdot 10^3}{0.0784} - \frac{30 \cdot 10^3}{3.658 \cdot 10^{-3}}$$

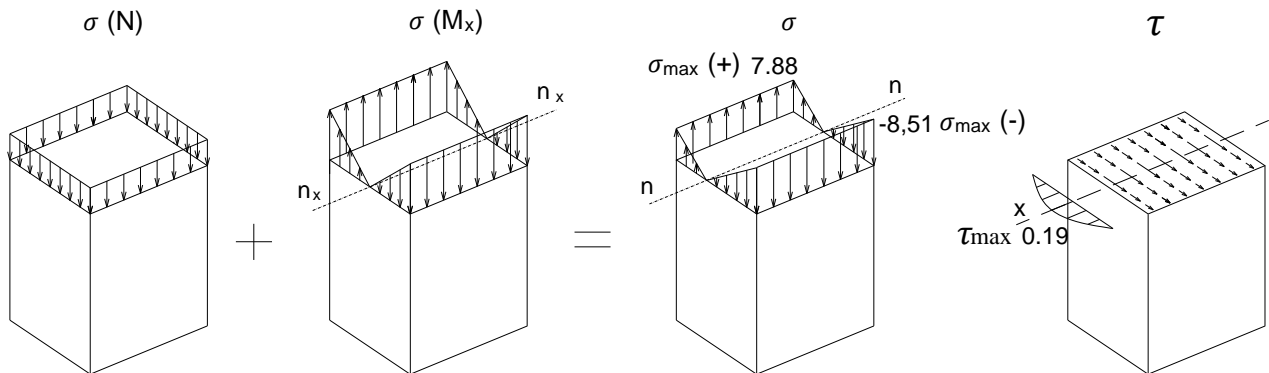
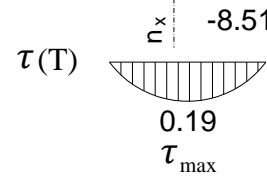
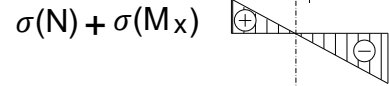
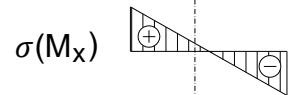
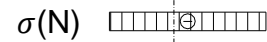
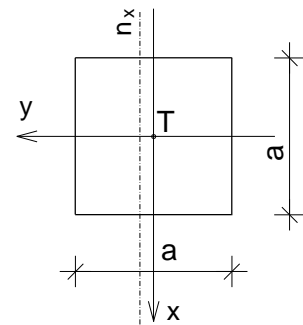
$$\sigma_{z \max(-)} = -0.318 - 8.2 = -8.51 MPa < \sigma_{z \text{ doz}} = 10 MPa$$

Максимални тангенцијални напони:

$$\tau_{\max} = 1.5 \frac{T}{A} = 1.5 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-3}}{0.0784} = 0.19 MPa < \tau_{\text{doz}} = 0.9 MPa$$

Хоризонтално померање врха стуба:

$$v = \frac{P_1 \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I_x} = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 3.0^3}{3 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 5.12 \cdot 10^{-4}} = 0.0175 m = 1.75 cm < v_{\text{doz}} = \frac{L}{150} = \frac{300}{150} = 2 cm$$

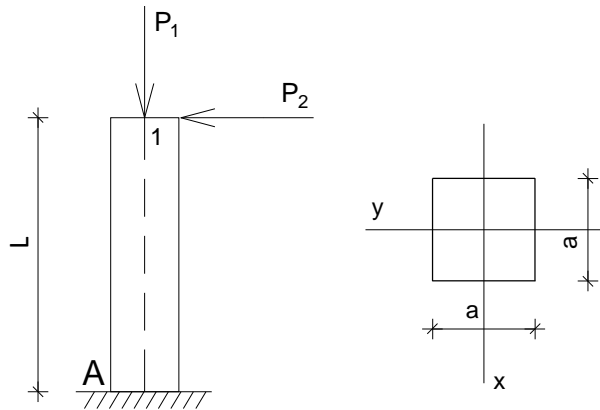


6.B. Вежба 6 (XI предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11**243**) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

За дрвени стуб оптерећен према скици одредити реакције веза и пресечне силе у карактеристичним пресецима и нацртати дијаграме пресечних сила. Димензионисати стуб квадратног попречног пресека (занемарити сопствену тежину) и за усвојене димензије извршити контролу нормалних и тангенцијалних напона и хоризонталног померања врха стуба. Нацртати дијаграме нормалних и тангенцијалних напона. $\sigma_{doz}=10\text{MPa}$, $\tau_{doz}=0.9\text{MPa}$, $E=10\text{GPa}$, $\nu_{doz}=1/150$

$L = (300 + \text{цифра јединица}) \text{ cm}$
 $P_1 = (7 + \text{цифра десетица}) \text{ kN}$
 $P_2 = (20 + \text{цифра стотина}) \text{ kN}$



7. ЗАДАТАК 7 - ЕЛЕМЕНТИ НАПРЕГНУТИ НА ТОРЗИЈУ- штап кружног попречног пресека

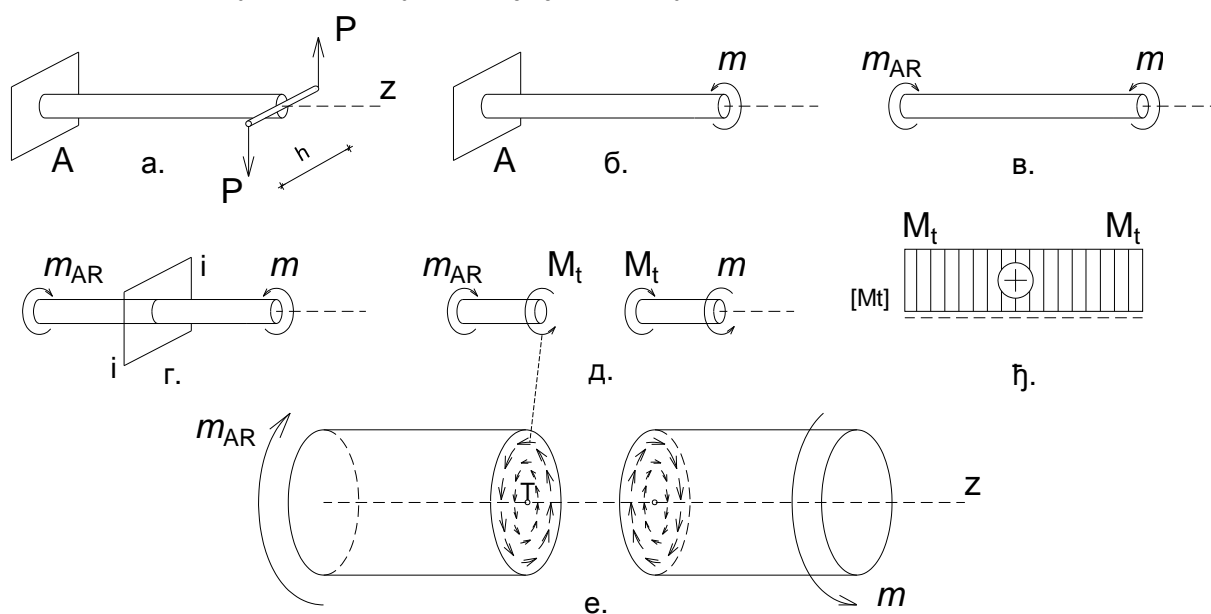
На основу Анализе случаја у општим бројевима и анализе Бројних примера, решити постављени задатак у оквиру дате Вежбе.

7.А. Анализа случаја

7.А.а) **Дејство - Оптерећење** – Дат је случај носача на чијем слободном крају делује спрег сила у равни управној на осу штапа (Сл. 7.А.1а). Дејство спрега на штап замењујемо дејством момента спрега m (Сл. 7.А.1б), односно момента торзије, чији је интензитет једнак производу једне силе из спрега и крака спрега $m = P \cdot h$.

7.А.б) **Реакција везе - Равнотежа** – Штап је у стању статичке равнотеже захваљујући појави реакције везе³³, односно момента укљештења m_{AR} у укљештењу А (Сл. 7.А.1в). Из услова статичке равнотеже крутог тела следи да је $m_{AR} = m$ (занемарено је дејство сопствене тежине штапа).

7.А.в) **Моменат у пресеку штапа** – У попречном пресеку штапа управном на осу штапа $i-i$, услед дејства спољних момената торзије у равни управној на осу штапа (активног m и реактивног m_{AR}), јавља се унутрашњи момент торзије или моменат у пресеку M_t (Сл. 7.А.1г и 7.А.1д). У питању је момент резултујућег редукционог спрега унутрашњих елементарних сила које леже у равни попречног пресека штапа (Сл. 7.А.1е), редуктованих на тежиште попречног пресека штапа (редукциона резултанта је једнака нули).

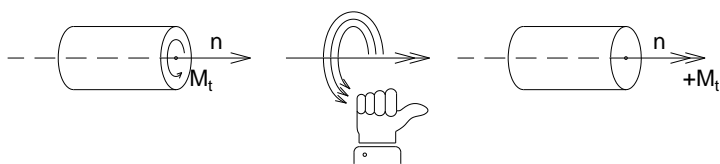


Сл. 7.А.1 Елемент напрегнут на торзију – штап кружног попречног пресека.

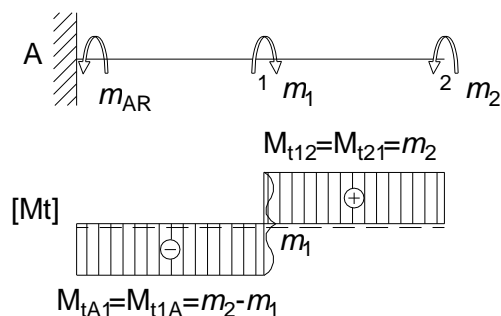
За одређивање момента торзије M_t у пресеку штапа користи се метода пресека. Штап се замишљено пресеца попречном равни управном на осу штапа, на изабраном месту $i-i$, а затим се подели на два дела (Сл. 7.А.1г и 7.А.1д). Момент торзије M_t у пресеку штапа се одређује помоћу услова статичке равнотеже целине и њених делова. Применом овог поступка, моменат торзије M_t у пресеку посматра се као спољашњи за издвојени део. У том смислу, моменат торзије M_t у пресеку се добија из услова да сума свих момената за издвојени део буде једнака нули $\sum M_z = 0$, одакле следи да је по интензитету $M_t = m$ или $M_t = m_{AR}$, а разликују се по смеру (Сл. 7.А.1д). Момент торзије у пресеку једног дела штапа замењује утицај другог дела.

³³ Веза се замени реакцијом везе што омогућава да се штап анализира као слободно круто тело које је у статичкој равнотежи (Сл. 7.А.1в).

У општем случају, унутрашњи момент торзије M_t у произвољном попречном пресеку штапа носача i - i једнак је алгебарском збиру спољних момената торзије са једне или друге стране пресека. Унутрашњи момент торзије M_t је позитиван (+), ако се смер његовог вектора, који се одређује применом правила десног палца (ако се прстима десне руке показује смер обртања момента торзије, тада палац показује смер његовог вектора), поклапа са смером спољашње нормале на пресечну раван (Сл. 7.А.2). Интензитет унутрашњег момента торзије у попречним пресецима штапа се графички представља у облику дијаграма (Сл. 7.А.1ђ и 7.А.3б). Нанесене ординате у карактеристичним попречним пресецима линијски се повежу³⁴. У дијаграму M_t постоји скок у пресеку у коме делује спољни момент торзије (Сл. 7.А.3а).

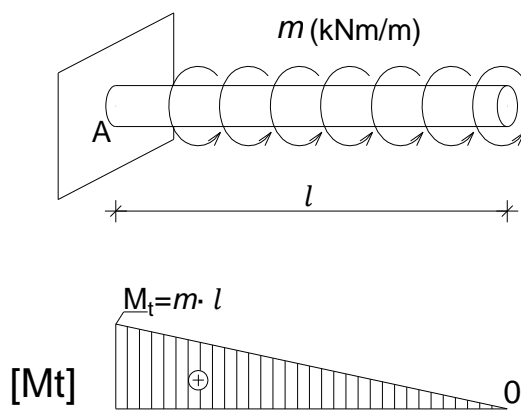


Сл. 7.А.2 Конвенција знака унутрашњег момента торзије.



Сл. 7.А.3 Моменти торзије у пресецима штапа.

Спољни моменти торзије могу бити и расподељени по јединици дужине штапа као у случају датом на слици (Сл. 7.А.4а). Интензитет максималног унутрашњег момента торзије, који се у датом случају јавља непосредно уз укљештење А, добија се као производ једнако подељеног момената торзије m и дужине штапа по којој делује - $M_{tA1} = m \cdot l$. На слици је дат дијаграм момената торзије дуж штапа за анализирани случај, где моменти торзије расту од 0 до максималног M_{tA1} (занемарена је сопствена тежина штапа) (Сл. 7.А.4б).

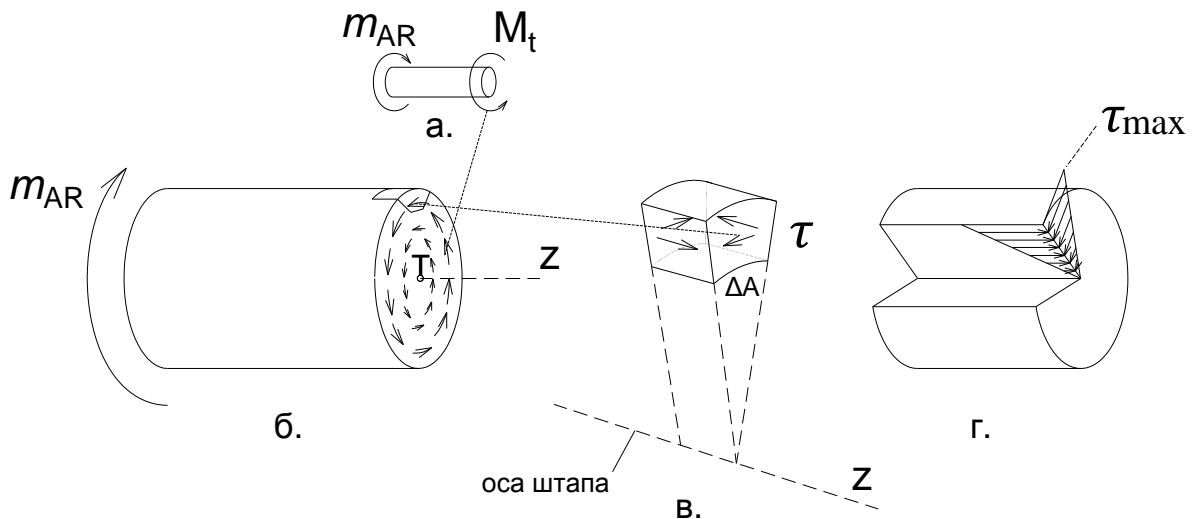


Сл. 7.А.4 Дијаграм момената торзије за случај расподељених спољних момената торзије.

³⁴ Дијаграми се цртају у одговарајућој размери, тако што се усвоји да одређен број сантиметара одговара одређеном броју kNm.

7.A.г) **Расподела тангенцијалних напона при торзији** - кружни попречни пресека – поларни момент инерције и поларни отпорни момент

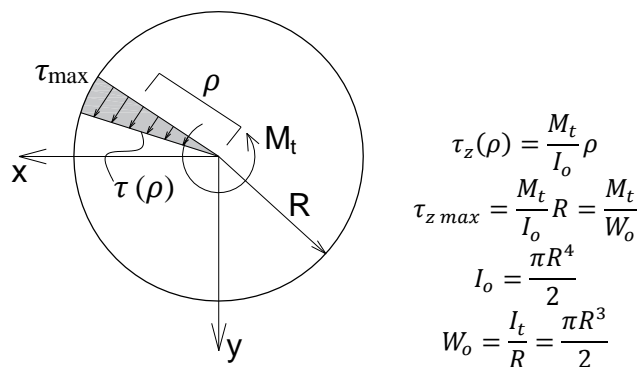
Штап кружног попречног пресека анализираног носача, на који делује спољни моменат торзије m у равни управној на осу штапа је **напрегнут на торзију** (Сл. 7.A.16). У пресецима штапа $i-i$ управним на осу штапа јавља се унутрашњи моменат торзије M_t (Сл. 7.A.5а), као моменат резултујућег спрега унутрашњих елементарних сила које леже у равни попречног пресека (Сл. 7.A.5б).



Сл. 7.A.5 Расподела тангенцијалних напона при торзији - кружни попречни пресека – елементарна коцка.

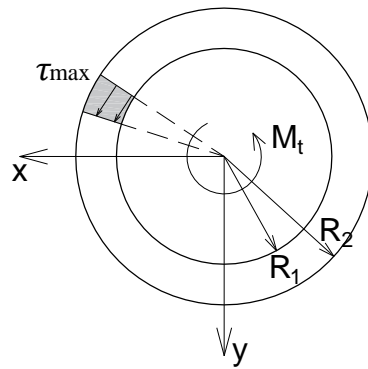
На слици је дата елементарна коцка у околини произвољне тачке попречног пресека штапа пуног кружног попречног пресека напрегнутог на торзију (Сл. 7.A.5в). Према ставу о коњугованости тангенцијалних напона, тангенцијални напони при торзији који се јављају у равни попречног пресека штапа праћени су тангенцијалним напонима исте величине који се јављају у уздужним равнима (Сл. 7.A.5в и 7.A.5г).

На сликама су дати дијаграми тангенцијалних напона при торзији за штапове пуног кружног и прстенастог попречног пресека (Сл. 7.A.6 и 7.A.7). Тангенцијални напони су пропорционални удаљењу тачке од тежишта пресека (линеарна расподела), при чему се максимални тангенцијални напони јављају у тачкама на омотачу цилиндра³⁵.



Сл. 7.A.6 Расподела тангенцијалних напона при торзији штапа пуног кружног попречног пресека.

³⁵ Расподела тангенцијалних напона по попречним пресецима другачијег облика у односу на кружни је другачија.



$$\tau_{z \max} = \frac{M_t}{W_o}$$

$$I_o = \frac{\pi}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$W_o = \frac{I_o}{R_2} = \frac{\pi}{2} \left(R_2^3 - \frac{R_1^4}{R_2} \right)$$

Сл. 7.А.7 Распредела тангенцијалних напона при торзији штапа прстенастог попречног пресека.

Максимална величина тангенцијалног напона при торзији штапа пуног кружног и прстенастог попречног пресека јавља се у тачкама на ободу цилиндричне површи и добија се на основу датих израза (Сл. 7.А.6а и Сл. 7.А.7). Величине I_o - поларни момент инерције и W_o - поларни отпорни момент представљају геометријске карактеристике попречног пресека штапа.

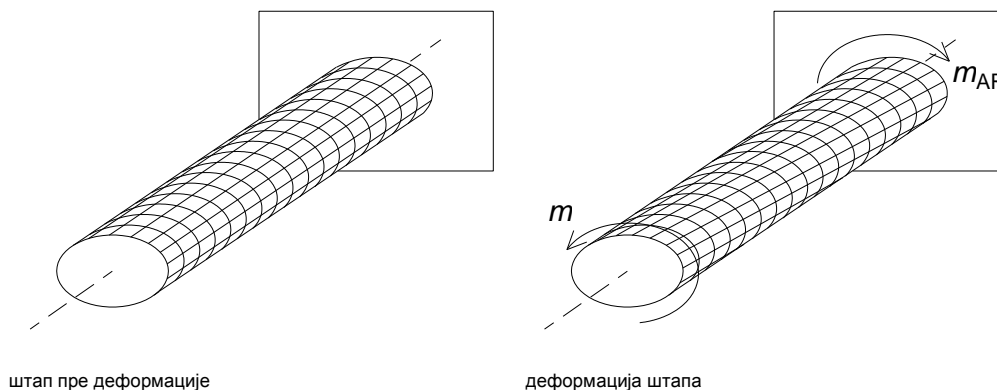
При димензионисању штапа напрегнутог на торзију прорачунава се потребни поларни отпорни моменат попречног пресека, који се добија као количник максималног момента торзије M_t и дозвољеног тангенцијалног напона при торзији за дати материјал и случај оптерећења. За усвојени пречник тела штапа врши се контрола тангенцијалног напона.

$$W_{opot} = \frac{M_{t \max}}{\tau_{t \text{ doz}}}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t \max}}{W_o} \leq \tau_{t \text{ doz}}$$

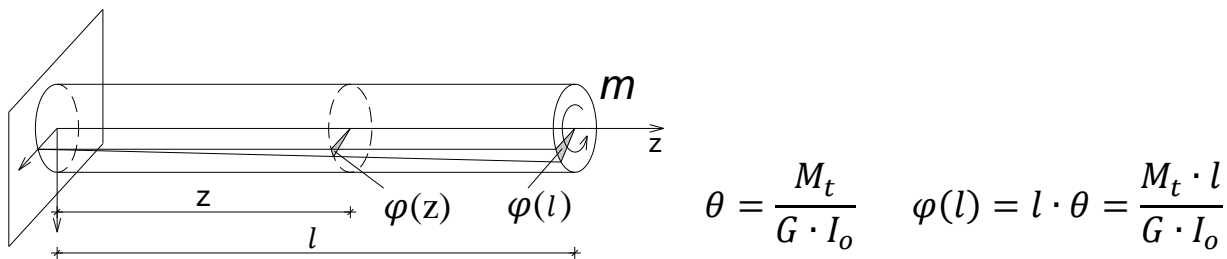
7.А.д) Деформација при торзији штапа - кружни попречни пресек

Услед деловања спољних момената торзије, активног m и реактивног m_{AR} , попречни пресеци штапа се ротирају један у односу на други око подужне осе³⁶, при чему остају и даље кружни и равни (Сл. 7.А.8). Влакна иницијално паралелна са осом штапа се заокрећу и прелазе у нове положаје (оса не мења положај), при чему се не мења ни дужина штапа, ни полупречник попречног пресека. Деформација штапа у еластичном подручју траје све дотле док се не успостави равнотежа између спољних и унутрашњих сила које се опирају дејству спољних и које теже да честице штапа врате у првобитни положај. Деформација је зависна од величине момента торзије M_t и расте са порастом његовог интензитета.



Сл. 7.А.8 Деформација при торзији штапа кружног попречног пресека.

На основу зависности између тангенцијалног напона τ и клизања γ , која се изражава преко модула клизања - $\tau = G \cdot \gamma$, изведен је израз за релативни угао торзије θ (угао по јединици дужине штапа) за који ће се два попречна пресека штапа ротирати један у односу на други. Угао торзије φ за који ће се два попречна пресека штапа, која се налазе на удаљености l , ротирати један у односу на други добија се као производ релативног угла торзије θ и дужине l (Сл. 7.А.9). Угао торзије φ је пропорционалан моменту торзије M_t и дужини штапа између два попречна пресека l , а обрнуто пропорционалан модулу клизања G и поларном моменту инерције I_o , односно обрнуто пропорционалан торзионој крутости штапа GI_o .



Сл. 7.А.9 Угао торзије.

При димензионисању штапа напрегнутог на торзију потребно је извршити и контролу деформације³⁷. У већини практичних случајева довољно је извршити контролу угла торзије φ и упоредити га са дозвољеним.

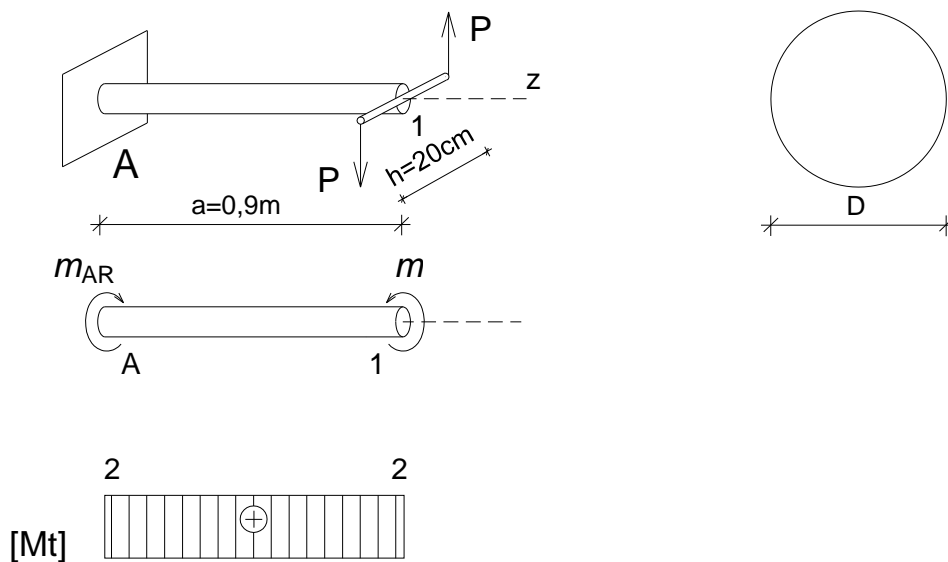
³⁶ При успостављању услова статичке равнотеже занемарена је деформација штапа, као релативно мала у односу на његове димензије.

³⁷ Наведени изрази везани за напоне и деформацију при торзији штапа пуног кружног и прстенастог попречног пресека не важе за штапове са попречним пресецима другачијег облика (квадратни, правоугаони..).

7.Б. Бројни примери

7.Б.1 – Одређивање тангенцијалних напона и угла торзије штапа

- На челичну конзолу пуног кружног попречног пресека пречника $D=64\text{mm}$ делује спрег сила $P=10\text{kN}$ чији је крак $h=20\text{cm}$. Одредити реактивни момент и унутрашње моменте торзије дуж штапа и нацртати њихов дијаграм. Одредити максимални тангенцијални напон при торзији конзоле и нацртати дијаграм тангенцијалних напона. Одредити и угао торзије φ . $G=80\text{MPa}$



Реактивни момент:

$$m = P \cdot h = 10 \cdot 0.2 = 2\text{kNm}$$

$$\sum m_z = 0 \rightarrow m_A^R = m = 2\text{kNm}$$

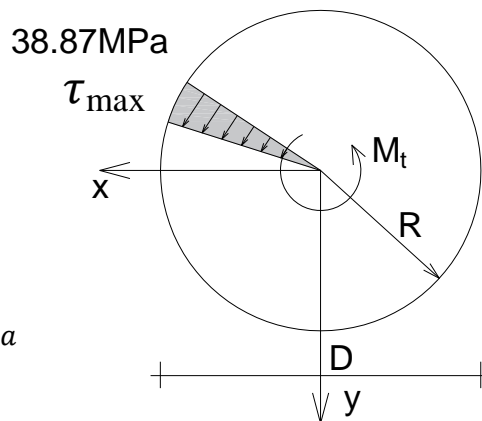
Унутрашњи моменте торзије:

$$M_{tA1} = M_{t1A} = m = 2\text{kNm}$$

Максимални тангенцијални напон:

$$W_0 = \frac{D^3 \pi}{16} \quad (W_0 = \frac{R^3 \pi}{2})$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_0} = \frac{M_t}{\frac{D^3 \pi}{16}} = \frac{16 M_t}{D^3 \pi} = \frac{16 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{0.064^3 \cdot 3.14} = 38.87\text{MPa}$$



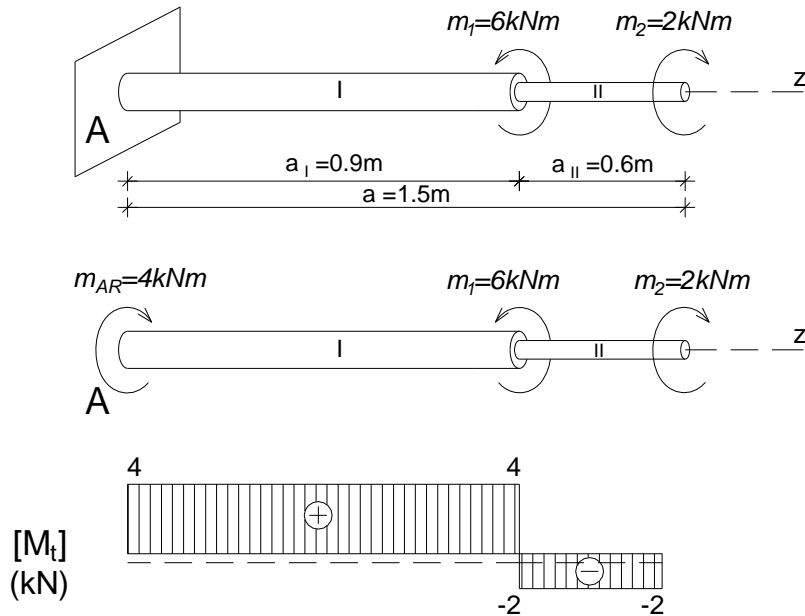
Угао торзије:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot a}{G \cdot I_o} = \frac{M_t \cdot a}{G \cdot \frac{D^4 \pi}{32}} = \frac{32 \cdot M_t \cdot a}{G \cdot D^4 \pi} = \frac{32 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 0.9}{80 \cdot 10^9 \cdot 0.064^4 \cdot 3.14} = 0.01366\text{rad}$$

$$\varphi = 0.01366\text{rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0.783^\circ$$

7.Б.2 – Одређивање тангенцијалних напона и угла торзије штапа променљивог пуног кружног попречног пресека

- За челични штап променљивог пуног кружног попречног пресека, оптерећен моментима торзије према скици, одредити реактивни моменат и унутрашње моменте торзије дуж штапа и нацртати њихов дијаграм. Одредити димензије појединих делова и угао торзије слободног краја. $G=80\text{MPa}$, $\tau_{doz}=40\text{MPa}$



Реактивни моменат:

$$\sum m_z = 0 \rightarrow m_A^R = m_1 - m_2 = 6 - 2 = 4\text{kNm}$$

Унутрашњи моменте торзије:

$$M_{tII} = -m_2 = -2\text{kNm}$$

$$M_{tI} = -m_2 + m_1 = -2 + 6 = 4\text{kNm}$$

Димензионисање делова штапа:

$$D_I = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{tI}}{\pi \cdot \tau_{doz}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 4 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 0.0798\text{m} = 79.8\text{mm} \quad D_{I\text{ usv}} = 80\text{mm}$$

$$D_{II} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{tII}}{\pi \cdot \tau_{doz}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 0.0633\text{m} = 63.3\text{mm} \quad D_{II\text{ usv}} = 64\text{mm}$$

Углови торзије делова штапа:

$$\varphi_I = \frac{M_{tI} \cdot a_I}{G \cdot I_{oI}} = \frac{32 \cdot M_{tI} \cdot a_I}{G \cdot D_I^4 \cdot \pi} = \frac{32 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 0.9}{80 \cdot 10^9 \cdot 0.08^4 \cdot 3.14} = 0.01119\text{rad}$$

$$\varphi_{II} = \frac{M_{tII} \cdot a_{II}}{G \cdot I_{oII}} = \frac{32 \cdot M_{tII} \cdot a_{II}}{G \cdot D_{II}^4 \cdot \pi} = \frac{32 \cdot (-2) \cdot 10^3 \cdot 0.6}{80 \cdot 10^9 \cdot 0.064^4 \cdot 3.14} = -0.00911\text{rad}$$

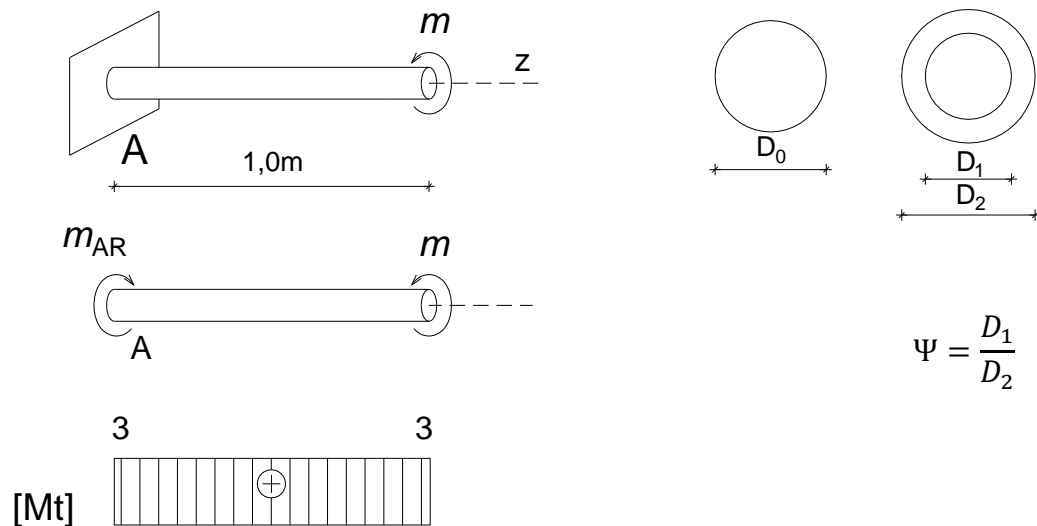
Укупан угао торзије:

$$\varphi_{uk} = \varphi_I + \varphi_{II} = 0.01119 - 0.00911 = 0.00208\text{rad}$$

$$\varphi_{uk} = 0.00208\text{rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 0.119^\circ$$

7.Б.3 – Димензионисање штапа пуног кружног и прстенастог попречног пресека напрегнутих на торзију

- Челични штап изложен је дејству момента $m=3\text{kNm}$. Димензионисати штап као штап пуног кружног и као штап прстенастог попречног пресека (за $D_1=0.8D_2$) и одредити однос пречника и тежина штапова за варијантна решења. $G=80\text{MPa}$, $\tau_{doz}=40\text{MPa}$, $\theta_{doz} = 0.75^\circ/m$



$$\Psi = \frac{D_1}{D_2}$$

$$W_0 = \frac{D_0^3 \pi}{16} \geq \frac{M_t \max}{\tau_{doz}} \rightarrow D_0 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t \max}{\pi \tau_{doz}}} \quad \text{— пун кружни попречни пресек}$$

$$W_0 = \frac{D_2^3 \pi}{16} (1 - \Psi^4) \geq \frac{M_t \max}{\tau_{doz}} \rightarrow D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t \max}{\pi \tau_{doz} (1 - \Psi^4)}} \quad \text{— прстенасти попречни пресек}$$

а) Пун кружни попречни пресек - димензионисање

Димензионисање штапа из услова дозвољеног напона:

$$W_0 = \frac{D_0^3 \pi}{16} \geq \frac{M_t \max}{\tau_{doz}} \rightarrow D_0 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_t \max}{\pi \tau_{doz}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 0.0725\text{m} = 72.5\text{mm}$$

Димензионисање штапа из услова дозвољене деформације:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_o} \quad I_o = \frac{D_o^4 \pi}{32} \rightarrow D_o^4 = \frac{32 I_o}{\pi} = \frac{32 M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta_{doz}} \rightarrow D_o = \sqrt[4]{\frac{32 M_t}{\pi \cdot G \cdot \theta}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0.75^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}}}$$

$$D_o = 0.0736\text{m} = 73.6\text{mm}$$

$$D_{o \text{ usv}} = 74\text{mm}$$

б) Прстенасти попречни пресек - $\Psi = D_1/D_2 = 0.8$ - димензионасање

Димензионасање штапа из услова дозвољеног напона:

$$W_0 = \frac{D_2^3 \pi}{16} (1 - \Psi^4) \geq \frac{M_{t \max}}{\tau_{doz}} \rightarrow D_2 \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{t \max}}{\pi \tau_{doz} (1 - \Psi^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3 \cdot 10^3}{3.14 \cdot 40 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0.8^4)}} = 0.0865 \text{ m} = 86.5 \text{ mm}$$

Димензионасање штапа из услова дозвољене деформације:

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_o} \quad I_o = \frac{\pi}{32} (D_2^4 - D_1^4) = \frac{\pi}{32} [D_2^4 - (0.8 D_2)^4] = \frac{\pi}{32} 0.5904 D_2^4 = 0.05796 D_2^4$$

$$\theta = \frac{M_t}{G \cdot I_o} = \frac{M_t}{G \cdot 0.05796 D_2^4} \rightarrow D_2 = \sqrt[4]{\frac{M_t}{G \cdot 0.05796 \cdot \theta_{doz}}} = \sqrt[4]{\frac{M_t}{80 \cdot 10^9 \cdot 0.05796 \cdot 0.75^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}}}$$

$$D_2 = 0.0839 \text{ m} = 83.9 \text{ mm}$$

$$D_{2 \text{ usv}} = 88 \text{ mm}$$

$$D_1 = 0.8 D_2 = 0.8 \cdot 86.5 = 69.2 \text{ mm}$$

$$D_{1 \text{ usv}} = 70 \text{ mm}$$

в) Однос тежина штапова за варијантна решења

Однос потребних пречника:

$$\frac{D_2}{D_o} = \frac{86.5}{73.6} = 1.17$$

Однос тежина одговара односу површина попречног пресека:

$$\frac{A_{pr}}{A_{kr}} = \frac{\pi \frac{D_2^2 - D_1^2}{4}}{\frac{\pi D_o^2}{4}} = \frac{D_2^2 - D_1^2}{D_o^2} = \frac{86.5^2 - 69.2^2}{73.6^2} = 0.497$$

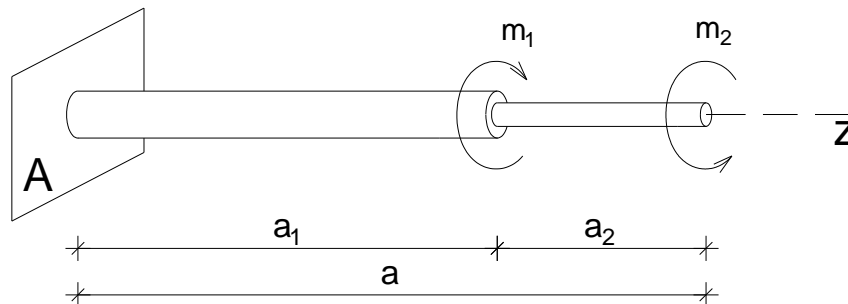
Штап прстенастог попречног пресека је ~ 50% тежине штапа пуног кружног попречног пресека, док му је спољни пречник већи за само 17%.

7.B. Вежба 7 (XII предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

За челични штап променљивог пуног кружног попречног пресека, оптерећен моментима торзије према скици, одредити реактивни моменат и унутрашње моменте торзије дуж штапа и нацртати њихов дијаграм. Одредити димензије појединих делова и угао торзије слободног краја. $G=80\text{MPa}$, $\tau_{\text{doz}}=40\text{MPa}$

$$m_1 = (3 + \text{цифра јединица})/2 \text{ kNm}$$
$$m_2 = (4 + \text{цифра десетица})/2 \text{ kNm}$$
$$a_1 = (100 + \text{цифра јединица})/100 \text{ m}$$
$$a_2 = (50 + \text{цифра десетица})/100 \text{ m}$$

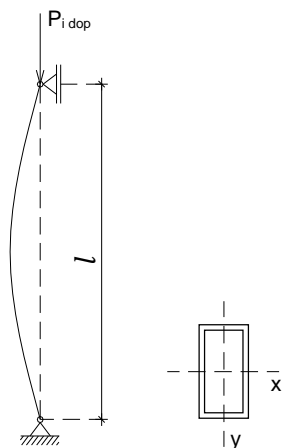


8. ЗАДАТАК 8 - СТАБИЛНОСТ АКСИЈАЛНО ПРИТИСНУТИХ ЕЛЕМЕНАТА – Извијање у еластичној области

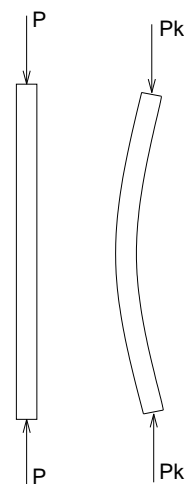
На основу Анализе случаја у општим бројевима и анализе Бројних примера, решити постављене задатке у оквиру дате Вежбе.

8.А. Анализа случаја

Дат је случај обострано зглобно везаног изразито витког штапа носача, датог попречног пресека, напрегнутог на аксијални притисак (Сл. 8.А.1). У питању је штап чија је дужина релативно велика у односу на димензије његовог попречног пресека (Сл. 8.А.2). При порасту интензитета аксијалне силе и достизању њене критичне вредности (P_k) доћи ће до губитка еластичне стабилности, односно до извијања штапа у еластичној области, када закривљеност штапа нагло расте и са незнатним порастом силе (Сл. 8.А.2).



Сл. 8.А.1 Извијање штапа.



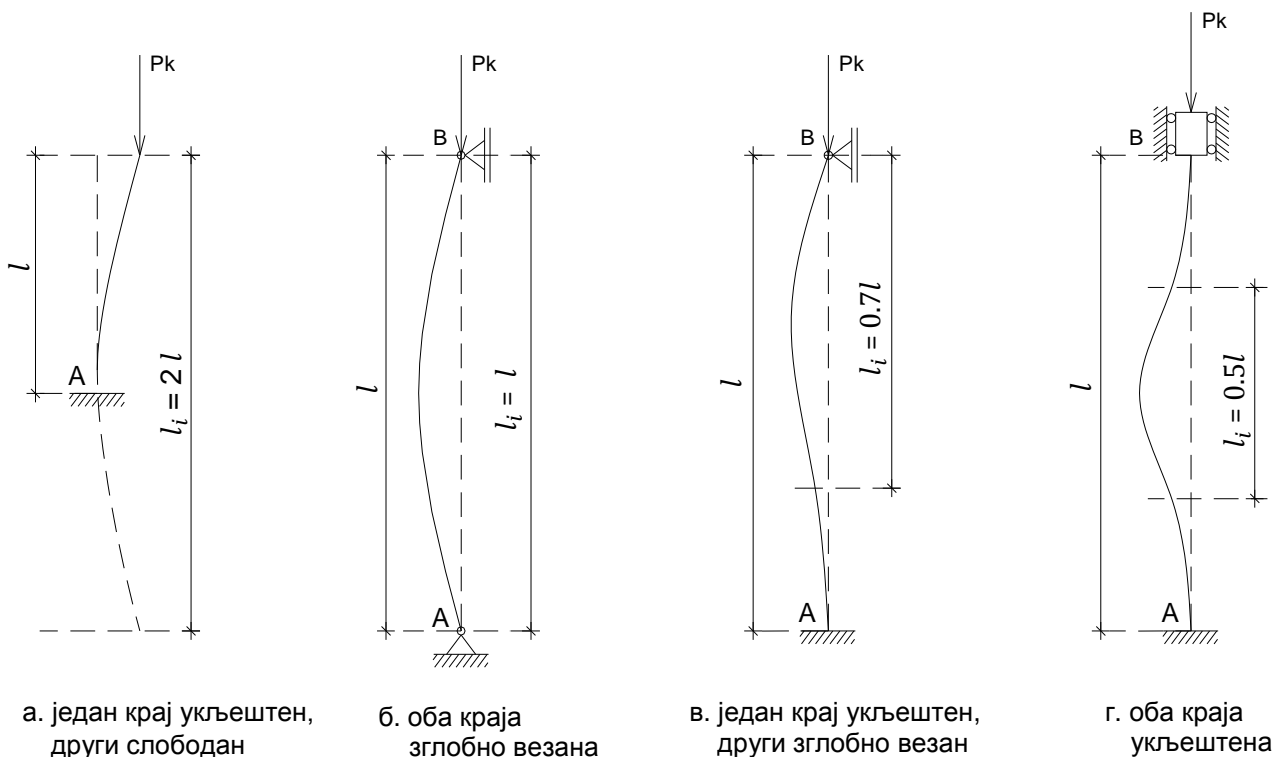
Сл. 8.А.2 Критична сила извијања.

Проблем извијања у еластичној области, у теоријском смислу, своди се на одређивање критичне силе извијања P_k , која се добија на основу израза³⁸ у коме фигуришу модул еластичности материјала E , минимални момент инерције попречног пресека штапа I_{min} и слободна дужина извијања штапа l_i . Допуштена аксијална сила притиска којом се штап сме оптеретити $P_{i\ dop}$ добија се као количник критичне силе извијања P_k и коефицијента сигурности против извијања k_i .

$$P_k = \pi^2 \frac{E \cdot I_{min}}{l_i^2} \quad P_{i\ dop} = \frac{P_k}{k_i}$$

Слободна дужина извијања штапа l_i , као дужина између суседних превојних тачака извијеног облика штапа, је условљена начином његовог везивања (Сл. 8.А.3).

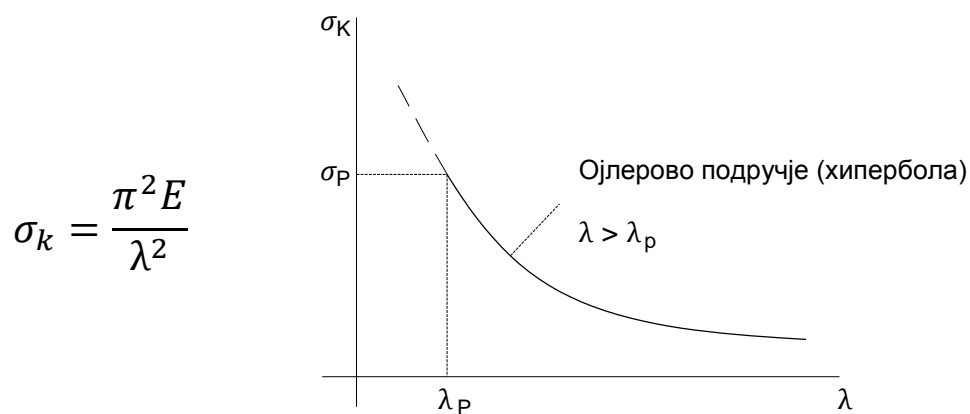
³⁸ Израз за критичну силу извијања (Ојлер) изведен је за центрично оптерећен идеално прав штап константног попречног пресека, од хомогеног, изотропног и линеарно еластичног материјала, односно без утицаја несавршености. Прописи предвиђају контролне поступке засноване на резултатима експерименталних испитивања реалних (несавршених) конструктивних елемената.



Сл. 8.А.3 Слободна дужина извијања штапа према условима везивања.

У анализираном случају слободна дужина извијања штапа је једнака његовој стварној дужини $l_i = l$, с обзиром на то да је штап зглобно везан на оба краја (Сл. 8.А.3б).

Критичној сили извијања P_k одговара критични нормални напон σ_k који се може директно добити преко датог израза. У питању је Ојлеров израз у облику који даје везу између критичног нормалног напона и виткости штапа (Сл. 8.А.4). На слици је дат дијаграм везе критични напон – виткост штапа у еластичној области, односно у Ојлеровом подручју³⁹.



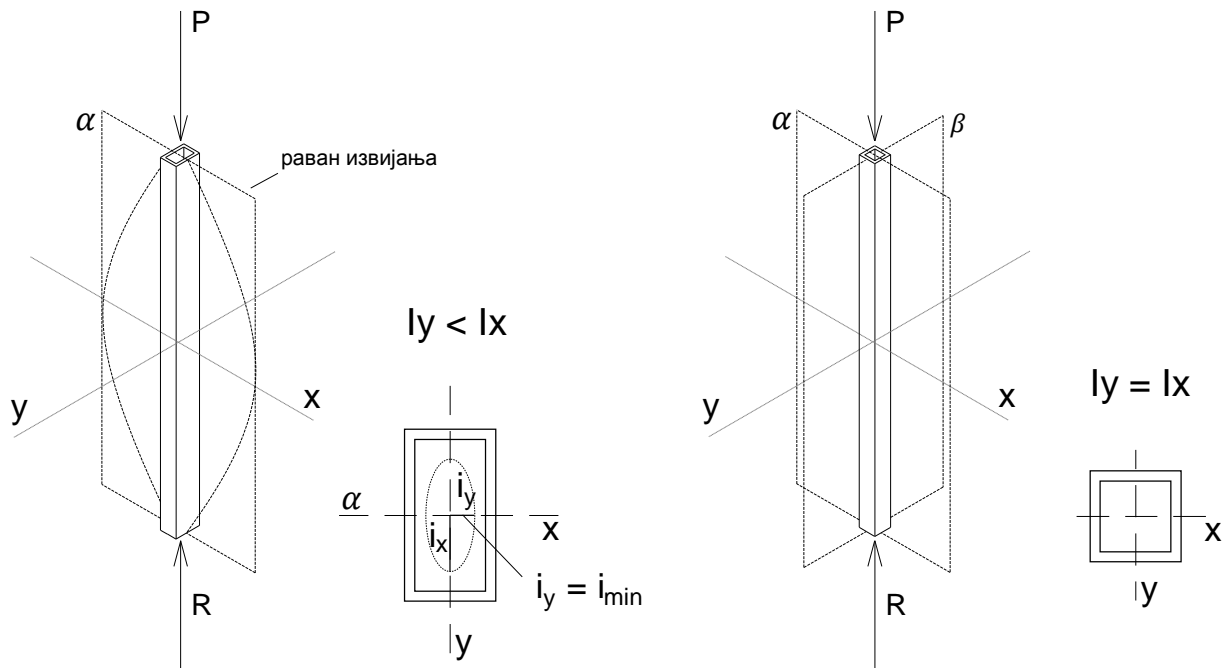
Сл. 8.А.4 Дијаграм везе критични нормални напон – виткост штапа у Ојлеровом подручју.

Виткост штапа λ се добија на основу датог израза у коме је l_i слободна дужина извијања штапа, а i_{\min} минимални полупречник елипсе инерције (Сл. 8.А.5а), с обзиром на то да се извијање дешава око тежишне осе са мањим аксијалним моментом инерције. У анализираном случају извијање ће се јавити око осе Y , односно у равни α (Сл. 8.А.5а). За случај да су аксијални

³⁹ Дијаграм је преузет из књиге аутора Димитрија Рајића и Живорада Бојовића под насловом „Отпорност материјала“ (Издавач: Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1994).

моменти инерције попречног пресека у односу на тежишне осе X и Y једнаки, извијање се може јавити око било које од тежишних оса (или у равни α или у равни β) (Сл. 8.A.5б).

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} \quad i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$$



Сл. 8.A.5 Раван извијања штапа.

Ојлеров израз за критични нормални напон важи само за изразито витке штапове $\lambda > \lambda_p$, при чему се гранична виткост (виткост која одговара граници пропорционалности) добија на основу датог израза:

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$$

При димензионисању аксијално притиснутих витких штапова, како би био задовољен и услов стабилности, нормални напон у штапу мора да буде мањи од допуштеног који се добија као количник критичног нормалног напона σ_k и коефицијента сигурности против извијања k_i .

$$\sigma_i = \frac{P_{i dop}}{A} \leq \sigma_{i dop} \quad \sigma_{i dop} = \frac{\sigma_k}{k_i}$$

8.Б. Бројни примери

8.Б.1 – Одређивање допуштене силе – различита дужина штапа

- За аксијално притиснуте дрвене стубове дате на скици, истих димензија попречног пресека а различитих висина, одредити и упоредити допуштену силу. Коефицијент сигурности против извијања је $k_i=3$. $E=10\text{GPa}$, $\lambda_p=75$

Површина попречног пресека штапа:

$$A = 16 \cdot 20 = 320\text{cm}^2 = 0.032\text{m}^2$$

Аксијални моменти инерције попречног пресека:

$$I_x = \frac{16 \cdot 20^3}{12} = 10666\text{cm}^4$$

$$I_y = \frac{20 \cdot 16^3}{12} = 6826\text{cm}^4$$

Минимални полупречник елипсе инерције:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{6826}{320}} = 4.618\text{cm}$$

а) Стуб висине 2m

Слободна дужина извијања стуба:

$$l = 2.0\text{m}$$

$$l_i = 2 \cdot 200 = 400\text{cm} = 4\text{m}$$

Виткост стуба:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} = \frac{400}{4.618} = 86 > \lambda_p = 75 \text{ — еластична област извијања}$$

Критична сила:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_i^2} = \frac{3.14^2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 6826 \cdot 10^{-8}}{4^2} = 420\text{kN}$$

Допуштена сила:

$$P_{i\text{ dop}} = \frac{P_k}{k_i} = \frac{420}{3} = 140\text{kN}$$

б) Стуб висине 3m

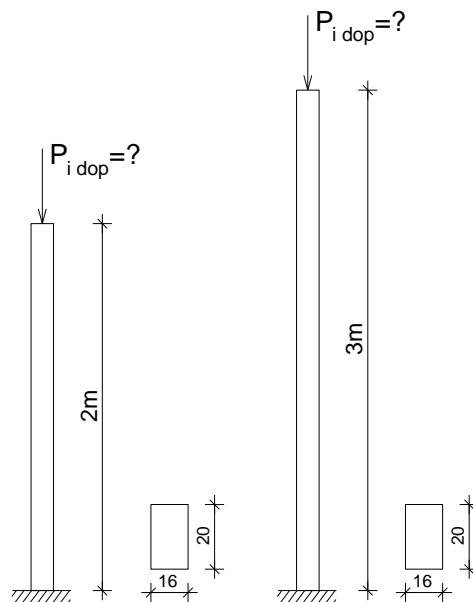
Слободна дужина извијања стуба:

$$l = 3.0\text{m}$$

$$l_i = 2 \cdot 300 = 600\text{cm} = 6\text{m}$$

Виткост стуба:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} = \frac{600}{4.618} = 129 > \lambda_p = 75 \text{ — еластична област извијања}$$



Критична сила:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_i^2} = \frac{3.14^2 \cdot 10 \cdot 10^9 \cdot 6826 \cdot 10^{-8}}{6^2} = 187kN$$

Допуштена сила:

$$P_{i\ dop} = \frac{P_k}{k_i} = \frac{187}{3} = 62kN$$

Допуштена сила којом се може оптеретити стуб висине 3m, с обзиром на већу виткост, чини 44% од допуштене силе којим се може оптеретити стуб висине од 2 m.

8.Б.2 – Одређивање допуштене силе – различити услови ослањања штапа

- За аксијално притиснуте челичне стубове дате на скици, исте висине и истих попречних пресека, а са различитим условима везивања штапа, одредити и упоредити допуштену силу. Коефицијент сигурности против извијања је $k_i=2$. $E=210GPa$, $\lambda_p=100$

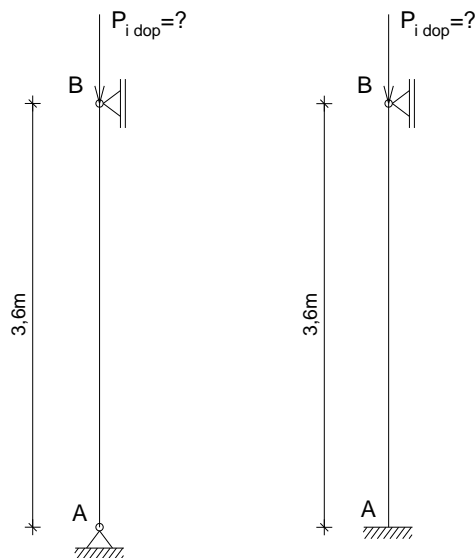
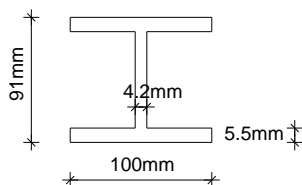
Геометријске карактеристике попречног пресека:

$$A = 15.6cm^2$$

$$I_x = 236cm^4$$

$$I_y = 92cm^4$$

$$i_{min} = 2.43cm$$



а) Обострано зглобно везан стуб

Слободна дужина извијања стуба:

$$l = 3.6m$$

$$l_i = 360 = 3.6m$$

Виткост стуба:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} = \frac{360}{2.43} = 148 > \lambda_p = 100 - \text{еластична област извијања}$$

Критична сила:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_i^2} = \frac{3.14^2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 92 \cdot 10^{-8}}{3.6^2} = 146.9kN$$

Допуштена сила:

$$P_{i\ dop} = \frac{P_k}{k_i} = \frac{146}{2} = 73.5kN$$

b) Стуб на једном крају зглобно везан, а на другом укљештен

Слободна дужина извијања стуба:

$$l = 3.6m$$

$$l_i = 0.7 \cdot 360 = 252cm = 2.52m$$

Виткост стуба:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} = \frac{252}{2.43} = 103.7 > \lambda_p = 100 - \text{еластична област извијања}$$

Критична сила:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_i^2} = \frac{3.14^2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 92 \cdot 10^{-8}}{2.52^2} = 299.9kN$$

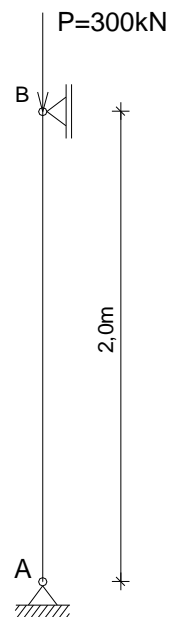
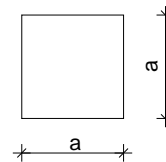
Допуштена сила:

$$P_{i\text{ dop}} = \frac{P_k}{k_i} = \frac{299}{2} = 149.9kN$$

Стуб на једном крају зглобно везан, а на другом укљештен може се оптеретити 2 пута већом силом од обострано зглобно везаног стуба, с обзиром на мању слободну дужину извијања, односно мању виткост.

8.Б.3 – Димензионисање штапа према извијању

➤ Димензионисати челични стуб квадратног попречног пресека оптерећен аксијалном силом притиска $P=300kN$, и упоредити његове димензије са невитким стубом. Коefицијент сигурности против извијања је $k_i=2$. $E=210GPa$, $\lambda_p=100$



a) Димензионисање стуба изразите виткост:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_i^2} \quad P_k = P_{i\text{ dop}} \cdot k_i$$

$$P_{i\text{ dop}} \cdot k_i = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l_i^2} \rightarrow I_{pot} = \frac{P_{i\text{ dop}} \cdot k_i \cdot l_i^2}{\pi^2 \cdot E} = \frac{300 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 2.0^2}{3.14^2 \cdot 210 \cdot 10^9} = 116cm^4$$

$$I = \frac{a^4}{12} \rightarrow a_{pot} = \sqrt[4]{12 \cdot I_{pot}} = \sqrt[4]{12 \cdot 116} = 6.108cm$$

$$a_{usv} = 62mm = 6.2cm \quad A_{usv} = 38.44cm^2$$

Контрола виткост, односно области извијања:

$$\lambda = \frac{l_i}{i_{min}} = \frac{200}{0.289 \cdot 6.2} = 111 > \lambda_p = 100 - \text{еластична област извијања}$$

$$(i_{min} = 0.289 \cdot a)$$

b) Димензионисање невитког стуба:

$$\sigma = \frac{P}{A} \rightarrow A_{pot} = \frac{P}{\sigma_{doz}} = \frac{300 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1.875 \cdot 10^{-3}m^2 \rightarrow a_{pot} = \sqrt{A_{pot}} = \sqrt{1.875 \cdot 10^{-3}} = 4.33cm$$

$$a_{usv} = 44mm = 4.4cm \quad A_{usv} = 19.36cm^2$$

Невитки стуб има 2 пута мању потребну површину од стуба висине 2m изразите виткост.

8.Б.4 – Одређивање допуштене силе – различит облик попречног пресека штапа

- Одредити допуштену силу за челични стуб за дате облике попречног пресека, кружни пуни и прстенасти, истог аксијалног момента инерције. Коефицијент сигурности против извијања је $k_i=2$. $E=210\text{GPa}$, $\lambda_p=100$

Површине попречних пресека:

$$A_1 = 81.6\text{cm}^2$$

$$A_2 = 23.6\text{cm}^2$$

Аксијални momenti инерције попречних пресека:

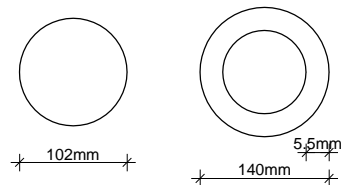
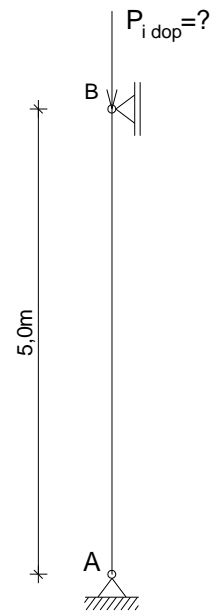
$$I_1 = I_2 = 531\text{cm}^4$$

Критична сила:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{e_i^2} = \frac{3.14^2 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 531 \cdot 10^{-8}}{5^2} = 439.8 \text{ kN}$$

Допуштена сила:

$$P_{dop} = \frac{P_k}{k_i} = \frac{439.8}{2} = 219.9 \text{ kN}$$

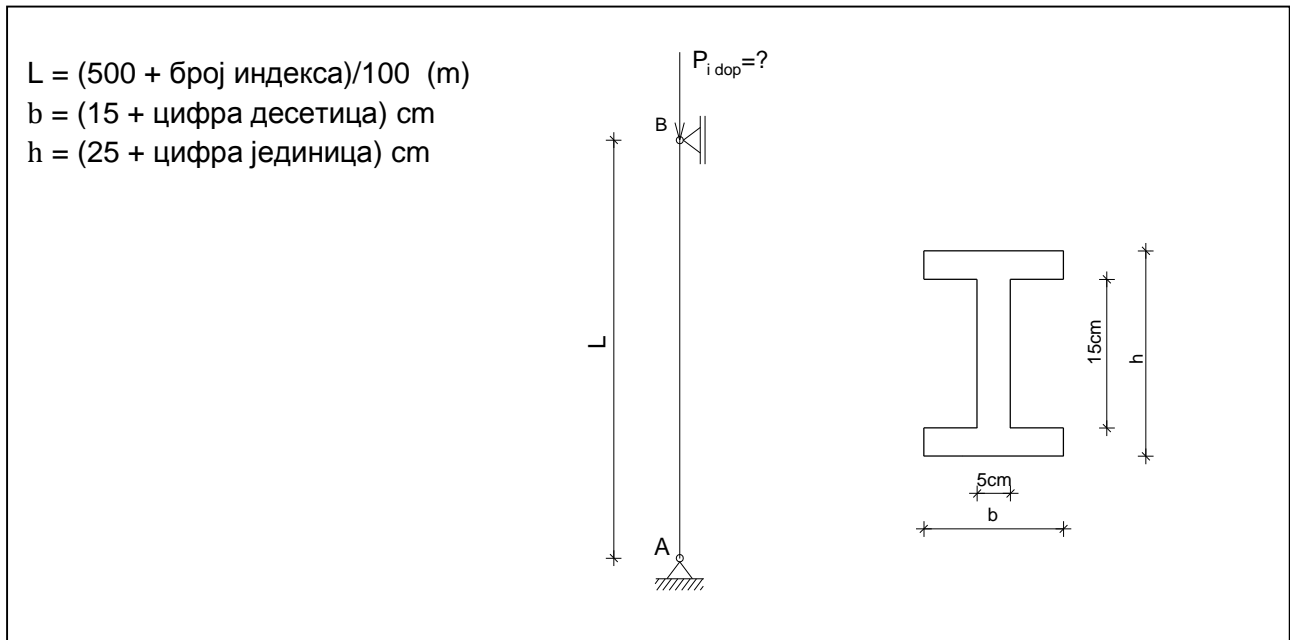


Дати попречни пресеци стуба имају исти аксијални момент инерције и захваљујући томе стуб се може оптеретити силом једнаког интензитета у оба случаја, с тим што се за пун попречни пресек (без обзира на мањи пречник) троши 3.5 пута више материјала, обзиром на однос површина попречног пресека.

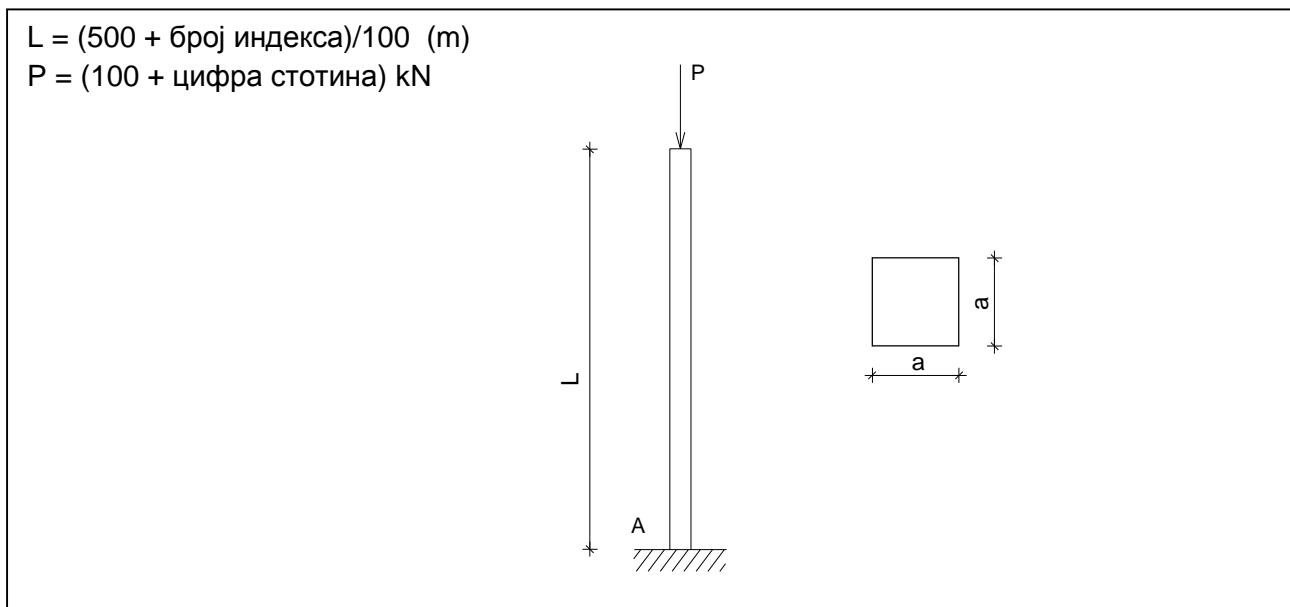
8.B. Вежба 8 (XIII предавање)

Напомена: „Број индекса“ се односи на последње три цифре броја индекса (нпр. 2023/11243) и оквиру кога се читавају цифра јединица, десетица и стотина.

а) За стуб дат скицом, задатог попречног пресека, одредити допуштену силу. Коefицијент сигурности против извијања је $k_i = 3$. $E = 10 \text{ GPa}$, $\lambda_P = 75$



б) Стуб дат скицом задатог попречног пресека оптерећен је аксијалном притискајућом силом P . Одредити потребне димензије квадратног попречног пресека. Коefицијент сигурности против извијања је $k_i = 3$. $E = 10 \text{ GPa}$, $\lambda_P = 75$



ЛИТЕРАТУРА

1. Предраг Јовановић, Божидар Петровић: "Статика I и II", Завод за издавање уџбеника, Београд, 1963.
2. Димитрије Рајић, Живорад Бојовић: "Отпорност материјала", Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1994.
3. Димитрије Рајић: "Отпорност материјала: Збирка решених задатака са изводима из теорије", Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1995.
4. James M. Gere, Barry J. Goodno: "Mechanics of Materials, Brief Edition", Cengage Learning, Stamford, USA 2012.
5. Владо Лубарда: „Отпорност материјала (Увод у механику деформабилног тела), НИО, Универзитетска ријеч, Титоград, 1989.

CIP - Каталогизација у публикацији Народна библиотека Србије, Београд

624.04(075.8)(076)(0.034.2)

539.3/.4(075.8)(076)(0.034.2)

НЕНАДОВИЋ, Александра, 1971-

Механика и отпорност материјала [Електронски извор] : практикум /
Александра Ненадовић. - Београд : Универзитет, Архитектонски факултет,
2024 (Београд : Универзитет, Архитектонски факултет). - 1 USB флеш
меморија ; 1 x 2 x 6 cm

Системски захтеви: Нису наведени. - Насл. са насловне стране документа.
- Тираж 10. - Садржи библиографију.

ISBN 978-86-7924-352-2

а) Отпорност материјала -- Вежбе

COBISS.SR-ID 137214985